Analüütiline geomeetria

VI loeng. Sirge võrrandid.

Sirgete ja tasandite võrrandid

Selles ja järgmistes loengutes tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

Sirgete ja tasandite võrrandid

Selles ja järgmistes loengutes tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

Sirge või tasandi kõige fundamentaalsem võrrand on selline, kus kasutame ainult vektoreid ja tehteid nendega, st me ei kasuta reeperit või koordinaadisüsteemi. Sellist võrrandit nimetatakse sirge või tasandi vektorvõrrandiks.

Sirgete ja tasandite võrrandid

Selles ja järgmistes loengutes tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

Sirge või tasandi kõige fundamentaalsem võrrand on selline, kus kasutame ainult vektoreid ja tehteid nendega, st me ei kasuta reeperit või koordinaadisüsteemi. Sellist võrrandit nimetatakse sirge või tasandi vektorvõrrandiks.

Kui sirge võrrandis esineb muutuv reaalarv (järgnevas nimetame parameetriks ja tähistame t) nii, et selle muutuva arvu igale väärtusele vastab sirge üks ja ainult üks punkt, siis võrrandit nimetame parameetriliseks võrrandiks.

Sirgete ja tasandite võrrandid

Selles ja järgmistes loengutes tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

Sirge või tasandi kõige fundamentaalsem võrrand on selline, kus kasutame ainult vektoreid ja tehteid nendega, st me ei kasuta reeperit või koordinaadisüsteemi. Sellist võrrandit nimetatakse sirge või tasandi vektorvõrrandiks.

Kui sirge võrrandis esineb muutuv reaalarv (järgnevas nimetame parameetriks ja tähistame t) nii, et selle muutuva arvu igale väärtusele vastab sirge üks ja ainult üks punkt, siis võrrandit nimetame parameetriliseks võrrandiks. Kui sirge või tasandi vektorvõrrand on koostatud ja uuritud, siis ruumi varustame **reeperiga** (koordinaadisüsteemiga) ja leiame **vektorvõrrandi kuju koordinaatides**.

Sirge parameetriline vektorvõrrand

Hermann Weyl'i aksiomaatikas **sirge** on punktihulk

$$\mathfrak{L} = \{X \in E : \vec{OX} = \vec{OA} + t\,\vec{AB},\ O, A, B \in E, t \in \mathbb{R}\},$$

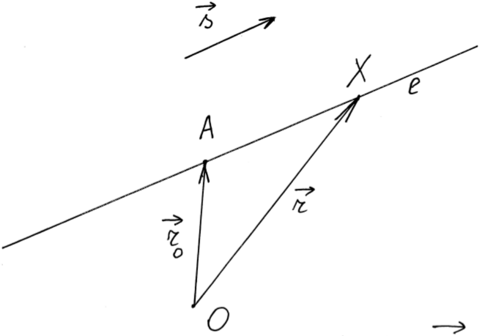
kus O on ruumi E mingi punkt ja $A, B, A \neq B$ on sirge punktid, X on sirge muutuv punkt ja t on suvaline reaalarv. Tähistame $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$. Sirge parameetrilise vektorvõrrandi kuju muutub järgmiseks

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{s}.$$

Vektorit $\vec{s}$ nimetatakse sirge $\mathfrak{L}$ sihivektoriks. Kui lisaks tähistame $\overrightarrow{OX} = \vec{r}, \overrightarrow{OA} = \vec{r}_0$, siis

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}.$$

(vt joonis).



$\vec{s}$ on sirge l sihivektor. $\vec{r}-\vec{r}_0=\overrightarrow{AX}$, seega $\vec{r}-\vec{r}_0 \parallel \vec{s}$, st $\vec{r}-\vec{r}_0$ ja $\vec{s}$ on kollineaarsed vektorid. Järelikult leidub reaalarv t nii, et $\vec{r}-\vec{r}_0=t\cdot\vec{s}$. Sirge parameetriline vektorvõrrand on

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{s}}$$

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \,||\, \vec{s}$. Siit järeldub (kollineaarsete vektorite piisav ja tarvilik tingimus)

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s} \text{ või } \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}} \qquad (1)$$

kus t on reaalarv. Märgime, et vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üks-ühene. Seega võime vaadelda parameetrit t sirge l punktide koordinaadina.

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \,||\, \vec{s}$. Siit järeldub (kollineaarsete vektorite piisav ja tarvilik tingimus)

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s} \ \text{ või } \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}} \qquad (1)$$

kus t on reaalarv. Märgime, et vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üks-ühene. Seega võime vaadelda parameetrit t sirge l punktide koordinaadina.

Definitsioon

Võrrandit (1) nimetatakse sirge parameetriliseks vektorvõrrandiks, muutujat t nimetatakse sirge parameetriks.

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \,||\, \vec{s}$. Siit järeldub (kollineaarsete vektorite piisav ja tarvilik tingimus)

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s} \;\text{ või }\; \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}} \qquad (1)$$

kus t on reaalarv. Märgime, et vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üks-ühene. Seega võime vaadelda parameetrit t sirge l punktide koordinaadina.

Definitsioon

Võrrandit (1) nimetatakse sirge parameetriliseks vektorvõrrandiks, muutujat t nimetatakse sirge parameetriks.

Märgime, et sirge vektorvõrrandi kuju ei sõltu ruumi dimensioonist.

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s}$. Siit järeldub (kollineaarsete vektorite piisav ja tarvilik tingimus)

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s} \ \text{ või } \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}} \tag{1}$$

kus t on reaalarv. Märgime, et vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üks-ühene. Seega võime vaadelda parameetrit t sirge l punktide koordinaadina.

Definitsioon

Võrrandit (1) nimetatakse sirge parameetriliseks vektorvõrrandiks, muutujat t nimetatakse sirge parameetriks.

Märgime, et sirge vektorvõrrandi kuju ei sõltu ruumi dimensioonist.

Kirjutame sirge parameetrilise vektorvõrrandi kolmemõõtmelise ruumi koordinaatides. Selleks ruumis E^3 fikseerime reeperi $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (ei pea olema ristreeper!) ja olgu

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$$

vektorite $\vec{r}_0, \vec{r}, \vec{s}$ koordinaadid.

Sirge parameetrilise vektorvõrrandi kuju koordinaatides on järgmine

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + s_1\, t, \\
y &= y_0 + s_2\, t, \\
z &= z_0 + s_3\, t,
\end{aligned}
$$

Antud võrrandit nimetatakse sirge parameetriliseks võrrandiks koordinaatides.

Sirge parameetrilise vektorvõrrandi kuju koordinaatides on järgmine

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \\ z &= z_0 + s_3\, t, \end{aligned}$$

Antud võrrandit nimetatakse sirge parameetriliseks võrrandiks koordinaatides.

Kui ruum on kahemõõtmeline ruum E^2, ruumis on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja sirge, siis sirge parameetrilise võrrandi kuju on järgmine

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus (x, y) on sirge muutuva punkti koordinaadid, (x_0, y_0) on sirge fikseeritud punkti koordinaadid, (s_1, s_2) on sirge sihivektori koordinaadid ja t on parameeter, $-\infty < t < +\infty$.

Joone parameetriliseks vektorvõrrandiks nimetatakse võrrandit $\vec{r} = \vec{r}(t)$, kus $t \in I$ ja $I \subset \mathbb{R}$. Kui ruumis E^2 on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, siis joone vektorvõrrandi kuju baasivektorite kaudu on

$$\vec{r}(t) = \xi(t)\,\vec{e}_1 + \eta(t)\,\vec{e}_2 \ \text{ või } \ \vec{r}(t) = (\xi(t), \eta(t)).$$

Edaspidi joone parameetrilise võrrandi sageli kirjutame kujul

$$x = \xi(t),\ y = \eta(t), \tag{2}$$

kus $\xi(t), \eta(t)$ on t funktsioonid, $t \in I$. Antud võrrandit nimetatakse tasandilise joone parameetriliseks võrrandiks ja muutujat t nimetatakse joone parameetriks.

Ruumilise joone korral ülalpool näidatud võrrandite kuju on analoogiline

$$\vec{r}(t) = \xi(t)\,\vec{e}_1 + \eta(t)\,\vec{e}_2 + \xi(t)\,\vec{e}_3 \ \text{ või } \ \vec{r}(t) = (\xi(t), \eta(t), \xi(t)).$$

Ruumilise joone parameetrilise võrrandi sageli kirjutatakse järgmiselt

$$x = \xi(t), y = \eta(t), z = \xi(t), \tag{3}$$

kus $\xi(t), \eta(t), \chi(t)$ on t funktsioonid, $t \in I$.

Kui tasandilise sirge parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus $s_1 \neq 0$, siis esimesest võrrandist leiame

$$t = \frac{x - x_0}{s_1}.$$

Kui tasandilise sirge parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus $s_1 \neq 0$, siis esimesest võrrandist leiame

$$t = \frac{x - x_0}{s_1}.$$

Järelikult

$$y - y_0 = \frac{s_2}{s_1}\,(x - x_0),$$

või

$$\boxed{y = k\,x + b,}$$

kus $k = \frac{s_2}{s_1}, b = y_0 - \frac{s_2\,x_0}{s_1}$. Kordajat k nimetatakse tasandilise sirge tõusuks.

Kui tasandilise sirge parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus $s_1 \neq 0$, siis esimesest võrrandist leiame

$$t = \frac{x - x_0}{s_1}.$$

Järelikult

$$y - y_0 = \frac{s_2}{s_1}\,(x - x_0),$$

või

$$\boxed{y = k\,x + b,}$$

kus $k = \frac{s_2}{s_1}, b = y_0 - \frac{s_2\,x_0}{s_1}$. Kordajat k nimetatakse tasandilise sirge tõusuks. Tasandilise sirge kanooniliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\boxed{\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2}.}$$

Tasandiline sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

Tasandiline sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

- sirge punkt A,
- sirge normaalvektor $\overrightarrow{N}$, kus sirge normaalvektoriks nimetatakse vektorit $\overrightarrow{N} \neq \vec{0}$, mis on risti sirge mistahes sihivektoriga.

Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\overrightarrow{N}$ sirge normaalvektor.

Tasandiline sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

- sirge punkt A,
- sirge normaalvektor $\overrightarrow{N}$, kus sirge normaalvektoriks nimetatakse vektorit $\overrightarrow{N} \neq \vec{0}$, mis on risti sirge mistahes sihivektoriga.

Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\overrightarrow{N}$ sirge normaalvektor.

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \overrightarrow{N}$, seega $\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \overrightarrow{N} >= 0.}$

Tasandiline sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

- sirge punkt A,
- sirge normaalvektor $\overrightarrow{N}$, kus sirge normaalvektoriks nimetatakse vektorit $\overrightarrow{N} \neq \vec{0}$, mis on risti sirge mistahes sihivektoriga.

Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\overrightarrow{N}$ sirge normaalvektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \overrightarrow{N}$, seega $\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \overrightarrow{N} >= 0.}$ Antud võrrandit (9) nimetatakse tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu.

Tasandiline sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

- sirge punkt A,
- sirge normaalvektor $\overrightarrow{N}$, kus sirge normaalvektoriks nimetatakse vektorit $\overrightarrow{N} \neq \vec{0}$, mis on risti sirge mistahes sihivektoriga.

Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\overrightarrow{N}$ sirge normaalvektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \overrightarrow{N}$, seega $\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \overrightarrow{N} >= 0.}$ Antud võrrandit (9) nimetatakse tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu. Kirjutame kujul $< \vec{r}, \vec{N} > +C = 0$, kus $< \vec{r}_0, \vec{N} >= -C$.

Tasandiline sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

- sirge punkt A,
- sirge normaalvektor $\overrightarrow{N}$, kus sirge normaalvektoriks nimetatakse vektorit $\overrightarrow{N} \neq \vec{0}$, mis on risti sirge mistahes sihivektoriga.

Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\overrightarrow{N}$ sirge normaalvektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \overrightarrow{N}$, seega $\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \overrightarrow{N} >= 0.}$ Antud võrrandit (9) nimetatakse tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu. Kirjutame kujul $< \vec{r}, \vec{N} > + C = 0$, kus $< \vec{r}_0, \vec{N} >= -C$. Fikseerime tasandil **ristreeperi** $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja olgu $\vec{r} = (x, y), \vec{N} = (A, B)$, siis eespool kirjutatud võrrandi kuju koordinaatides on

$$\boxed{A\,x + B\,y + C = 0.}$$

Tasandiline sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

- sirge punkt A,
- sirge normaalvektor $\overrightarrow{N}$, kus sirge normaalvektoriks nimetatakse vektorit $\overrightarrow{N} \neq \vec{0}$, mis on risti sirge mistahes sihivektoriga.

Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\overrightarrow{N}$ sirge normaalvektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \overrightarrow{N}$, seega $\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \overrightarrow{N} >= 0.}$ Antud võrrandit (9) nimetatakse tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu. Kirjutame kujul $< \vec{r}, \vec{N} > +C = 0$, kus $< \vec{r}_0, \vec{N} >= -C$. Fikseerime tasandil **ristreeperi** $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja olgu $\vec{r} = (x, y), \vec{N} = (A, B)$, siis eespool kirjutatud võrrandi kuju koordinaatides on

$$\boxed{A\,x + B\,y + C = 0.}$$

Antud võrrandit nimetatakse tasandilise sirge üldvõrrandiks. Pöörame tähelepanu sellele, et üldvõrrandis kordajad A, B on sirge **normaalvektori koordinaadid.**

Tasandilise joone ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y) = c,$$

kus $F(x, y)$ on kahemuutuja funktsioon määramispiirkonnaga $U \subset E^2$ ja c on reaalarv.

Tasandilise joone ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y) = c,$$

kus $F(x, y)$ on kahemuutuja funktsioon määramispiirkonnaga $U \subset E^2$ ja c on reaalarv. Kui $F(x, y)$ on n-astme polünoom, siis ilmutamata võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joont nimetatakse n-järku algebraliseks jooneks.

Tasandilise joone ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y) = c,$$

kus $F(x, y)$ on kahemuutuja funktsioon määramispiirkonnaga $U \subset E^2$ ja c on reaalarv. Kui $F(x, y)$ on n-astme polünoom, siis ilmutamata võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joont nimetatakse n-järku algebraliseks jooneks. Erijuhul, kui $n = 2$, st $F(x, y)$ on teise astme polünoom, joont nimetatakse teist järku jooneks.

Tasandilise joone ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y) = c,$$

kus $F(x, y)$ on kahemuutuja funktsioon määramispiirkonnaga $U \subset E^2$ ja c on reaalarv. Kui $F(x, y)$ on n-astme polünoom, siis ilmutamata võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joont nimetatakse n-järku algebraliseks jooneks. Erijuhul, kui $n = 2$, st $F(x, y)$ on teise astme polünoom, joont nimetatakse teist järku jooneks. Kui $F(x, y)$ on esimese astme polünoom (lineaarne), siis võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joon on sirge.

Näide

Ringjoon raadiusega R ja keskpunktiga punktis $A(x_0, y_0)$.

Näide

Ringjoon raadiusega R ja keskpunktiga punktis $A(x_0, y_0)$.

Fikseerime tasandil suvalise punkti O. Olgu X ringjoone muutuv punkt. Moodustame vektori $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$ ja vektori $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$.

Näide

Ringjoon raadiusega R ja keskpunktiga punktis $A(x_0, y_0)$.
Fikseerime tasandil suvalise punkti O. Olgu X ringjoone muutuv punkt. Moodustame vektori $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$ ja vektori $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$. On ilmne, et kehtib

$$\boxed{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = R^2.}$$

See on ringjoone vektorvõrrand.

Näide

Ringjoon raadiusega R ja keskpunktiga punktis $A(x_0, y_0)$. Fikseerime tasandil suvalise punkti O. Olgu X ringjoone muutuv punkt. Moodustame vektori $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$ ja vektori $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$. On ilmne, et kehtib

$$\boxed{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = R^2.}$$

See on ringjoone vektorvõrrand. Ringjoone ilmutamata võrrand ristkoordinaatides on

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

seega antud juhul $F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $c = R^2$ ja $F(x, y)$ on teise astme polünoom. Järelikult ringjoon on teist järku joon. Ringjoone parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= R\cos t + x_0, \\ y &= R\sin t + y_0, \end{aligned}$$

kus $0 \leq t \leq 2\pi$.

Olgu tasandil antud polaarkoordinaatide süsteem r, ϕ.

Definitsioon

Tasandilise joone võrrandiks polaarkoordinaatides nimetatakse võrrandit

$$r = r(\phi),$$

kus $r(\phi)$ on polaarnurga ϕ funktsioon ja $\phi \in I \subset \mathbb{R}$.

Näiteks, tasandilist joont $r = k\,\phi$, kus $k > 0$ on konstant, nimetatakse Archimedese spiraaliks.

Olgu tasandil antud polaarkoordinaatide süsteem r, ϕ.

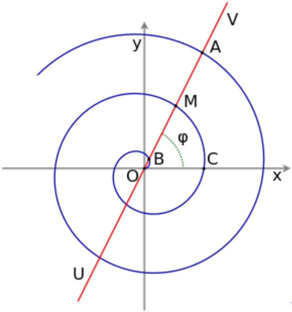
Definitsioon

Tasandilise joone võrrandiks polaarkoordinaatides nimetatakse võrrandit

$$r = r(\phi),$$

kus $r(\phi)$ on polaarnurga ϕ funktsioon ja $\phi \in I \subset \mathbb{R}$.

Näiteks, tasandilist joont $r = k\,\phi$, kus $k > 0$ on konstant, nimetatakse Archimedese spiraaliks.



Olgu antud sirge parameetriline võrrand

$$\boxed{\begin{cases} x = & x_0 + t\, s_1, \\ y = & y_0 + t\, s_2, \\ z = & z_0 + t\, s_3 \end{cases}} \tag{4}$$

Oletame, et $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 \neq 0$ ja avaldame parameetrit t

$$t = \frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Olgu antud sirge parameetriline võrrand

$$\boxed{\begin{cases} x = & x_0 + t\,s_1, \\ y = & y_0 + t\,s_2, \\ z = & z_0 + t\,s_3 \end{cases}} \tag{4}$$

Oletame, et $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 \neq 0$ ja avaldame parameetrit t

$$t = \frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Võrrandit

$$\boxed{\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3},}$$

nimetatakse ruumilise sirge kanooniliseks võrrandiks.

Sihivektor $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor, seega tema kõik koordinaadid korraga ei saa olla nullid, kuid mõned neist võivad olla nullid.

Sihivektor $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor, seega tema kõik koordinaadid korraga ei saa olla nullid, kuid mõned neist võivad olla nullid. Laiendame sirge kanoonilise võrrandi kasutamist ka juhule, kus sihivektori mõned koordinaadid on nullid. Näiteks, kui $s_3 = 0$, kirjutame

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{0}.$$

Sihivektor $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor, seega tema kõik koordinaadid korraga ei saa olla nullid, kuid mõned neist võivad olla nullid. Laiendame sirge kanoonilise võrrandi kasutamist ka juhule, kus sihivektori mõned koordinaadid on nullid. Näiteks, kui $s_3 = 0$, kirjutame

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{0}.$$

See tähendab, et ülalpool kirjutatud võrrand on ekvivalentne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{s_1} = & \frac{y-y_0}{s_2}, \\ z - z_0 = & 0 \end{cases} \tag{5}$$

Sihivektor $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor, seega tema kõik koordinaadid korraga ei saa olla nullid, kuid mõned neist võivad olla nullid. Laiendame sirge kanoonilise võrrandi kasutamist ka juhule, kus sihivektori mõned koordinaadid on nullid. Näiteks, kui $s_3 = 0$, kirjutame

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{0}.$$

See tähendab, et ülalpool kirjutatud võrrand on ekvivalentne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{s_1} = & \frac{y-y_0}{s_2}, \\ z - z_0 = & 0 \end{cases} \tag{5}$$

Kui ruumis on antud kaks sirget l_1, l_2, siis sirgete vaheliseks nurgaks nimetatakse sirgete sihivektorite vahelist nurka $\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$, kus $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ on sirgete l_1,l_2 sihivektorid. Seega kui sirgete vaheline nurk on tähistatud $\theta = \angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$, siis selle nurga koosinuse arvutame järgmise valemi abil

$$\cos \angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{< \vec{s}_1, \vec{s}_2 >}{|\vec{s}_1| \, |\vec{s}_2|}.$$

Punkti kaugus sirgeni

On antud sirge l ja ruumi punkt P. Kuidas leida punkti P kaugust d sirgeni l? Leiame vektorkujul. Olgu $\vec{s}$ sirge sihivektor, sirge läbib punkti A.

Punkti kaugus sirgeni

On antud sirge l ja ruumi punkt P. Kuidas leida punkti P kaugust d sirgeni l? Leiame vektorkujul. Olgu $\vec{s}$ sirge sihivektor, sirge läbib punkti A. Kauguse d leidmiseks kasutame vektorkorrutise rööpküliku pindala omadust. Vaatleme rööpkülikut, mis on ehitatud vektoritele $\vec{s}, \overrightarrow{AP}$ (vt joonis). On ilmne, et kaugus d on võrdne selle rööpküliku kõrgusega, seega

$$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{s}|}. \tag{6}$$

Vektori $\overrightarrow{AP}$ saab avaldada punktide A, P kohavektorite $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{r} = \overrightarrow{OP}$ kaudu järgmiselt $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$. Asendades valemisse (6) saame

$$\boxed{d = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a})|}{|\vec{s}|}.}$$

Valemi kuju koordinaatides

Punkti P kauguse d sirgeni l arvutusvalemi vektorkuju on järgmine

$$\boxed{d = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a})|}{|\vec{s}|}.}$$

Kirjutame ruumi ristkoordinaatides. Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ruumi ristreeper, olgu $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ sirge sihivektori koordinaadid, $A(x_a, y_a, z_a)$ sirge punkti A koordinaadid, $P(x_p, y_p, z_p)$ punkti P koordinaadid. Punkti P kauguse sirgeni arvutusvalemi kuju ristkoordinaatides on järgmine

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} s_2 & s_3 \\ y_p - y_a & z_p - z_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} s_1 & s_3 \\ x_p - x_a & z_p - z_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ x_p - x_a & y_p - y_a \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}$$

Tasandiline sirge

Tasandi ristreeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ formaalselt täiendame baasivektoriga $\vec{e}_3$ nii, et kogu reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ristreeper ruumis E^3. Seega $A(x_a, y_a, 0), P(x_p, y_p, 0), \vec{r} - \vec{a} = (x_p - x_a, y_p - y_a, 0)$. Olgu $Ax + By + C = 0$ tasandilise sirge võrrand. Seega $\vec{N} = (A, B)$ ja $< \vec{r}_a, \vec{N} >= C$. Selle sirge sihivektorit valime järgmiselt $\vec{s} = (-B, A, 0)$. Vektorkorrutise arvutamiseks moodustame abimaatriksi

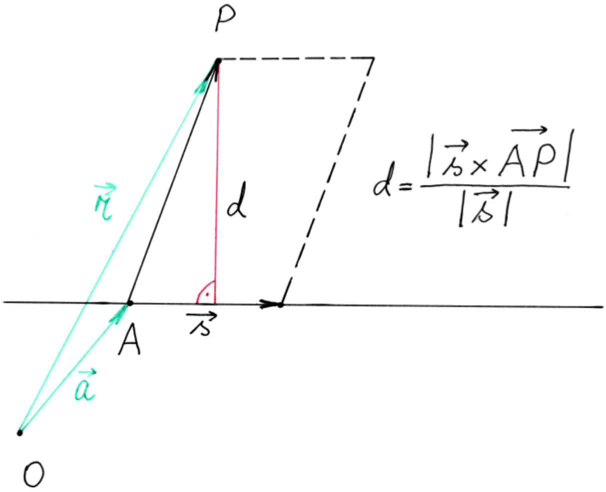
$$\begin{pmatrix} -B & A & 0 \\ x_p - x_a & y_p - y_a & 0 \end{pmatrix}$$

Arvutame

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a}) = (0, 0, -Ax_p - By_p - C).$$

Seega

$$d = \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + (Ax_p + By_p + C)^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_p + By_p + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$


P
$\vec{r}$
d
$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{s}|}$
A
$\vec{s}$
$\vec{a}$
O

Eksami küsimused

1. Tasandilise sirge parameetriline vektorvõrrand. Tasandilise sirge parameetriline ja kanooniline võrrand (koordinaatides). Tasandilise joone parameetrilise võrandi ja võrrand polaarkoordinaatides. Tasandilise sirge üldvõrrand.
2. Ruumilise sirge parameetriline vektorvõrrand. Ruumilise sirge parameetriline ja kanooniline võrrand (koordinaatides). Punkti kaugus sirgeni.

Eksami ülesanded

1. On antud sirgete l_1, l_2 parameetrilised vektorvõrrandid $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{s}_1$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + t\,\vec{s}_2$. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et sirged l_1, l_2 on lõikuvad sirged (st sirgetel on ainult üks ühine punkt, st lõikepunkt).
2. On antud sirge l parameetriline vektorvõrrand $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}$. On antud punkt P ja selle kohavektor $\vec{r}_P$. Olgu punkt M punkti P ristprojektsioon sirgele l. Leida punkti M kohavektor $\vec{r}_M$.