Praktikumi teema “Baas, reeper, koordinaadid”

Analüütiline geomeetria

Tartu Ülikool

Eeldame, et ruumis E^3 on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$.

Eeldame, et ruumis E^3 on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$.

Ülesanne

On antud kaks vektorit $\vec{x}, \vec{y}$ ja

$$\vec{x} = 2\,\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 3\,\vec{a}_3, \quad \vec{y} = -6\,\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 9\,\vec{a}_3. \tag{1}$$

Näidata, et vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ on kollineaarsed vektorid. Kas on nad samasuunalised või vastassuunalised?

Eeldame, et ruumis E^3 on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$.

Ülesanne

On antud kaks vektorit $\vec{x}, \vec{y}$ ja

$$\vec{x} = 2\,\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 3\,\vec{a}_3, \quad \vec{y} = -6\,\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 9\,\vec{a}_3. \tag{1}$$

Näidata, et vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ on kollineaarsed vektorid. Kas on nad samasuunalised või vastassuunalised?

Lahendus. Näeme, et kehtib $\vec{y} = -3\,\vec{x}$. Seega vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ on kollineaarsed vektorid. Kuna kordaja -3 on negatiivne, nad on vastassuunalised vektorid.

Ülesanne

Leida milliste parameetrite α, β väärtuste korral vektorid

$$\vec{x} = -2\,\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \beta\,\vec{a}_3, \;\; \vec{y} = \alpha\,\vec{a}_1 - 6\vec{a}_2 + 2\,\vec{a}_3,$$

on kollineaarsed.

Ülesanne

Leida milliste parameetrite α, β väärtuste korral vektorid

$$\vec{x} = -2\,\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \beta\,\vec{a}_3, \;\; \vec{y} = \alpha\,\vec{a}_1 - 6\vec{a}_2 + 2\,\vec{a}_3,$$

on kollineaarsed.

Vastus. $\alpha = 4, \beta = -1$.

Ülesanne

On antud neli punkti $A(3,-1,2), B(1,2,-1), C(-1,1,-3), D(3,-5,3)$. Nädake, et A, B, C, D on trapetsi tipud.

Ülesanne

On antud neli punkti $A(3,-1,2), B(1,2,-1), C(-1,1,-3), D(3,-5,3)$. Nädake, et A, B, C, D on trapetsi tipud.

Lahendus. Arvutame vektorite koordinaadid

$$\vec{AB} = (-2,3,-3), \;\; \vec{CD} = (4,-6,6).$$

Seega kehtib $\vec{CD} = -2\,\vec{AB}$, kust järeldub, et vektorid $\vec{AB}, \vec{CD}$ on kollineaarsed, st $\vec{AB}||\vec{CD}$. Sellest järeldub, et A, B, C, D on trapetsi tipud.

Järgmistes ülesannetes reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ristreeper.

Ülesanne

Leida vektoriga $\vec{r} = 6\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_1$ samasuunaline ühikvektor $\vec{e}$.

Järgmistes ülesannetes reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ristreeper.

Ülesanne

Leida vektoriga $\vec{r} = 6\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_1$ samasuunaline ühikvektor $\vec{e}$.

Lahendus. Kasutame loengus tõestatud valemit, et ristkoordinaatide korral vektori pikkus on võrdne ruutjuurega koordinaatide ruutude summast. Leiame

$$|\vec{r}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Seega $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$.

Järgmistes ülesannetes reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ristreeper.

Ülesanne

Leida vektoriga $\vec{r} = 6\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_1$ samasuunaline ühikvektor $\vec{e}$.

Lahendus. Kasutame loengus tõestatud valemit, et ristkoordinaatide korral vektori pikkus on võrdne ruutjuurega koordinaatide ruutude summast. Leiame

$$|\vec{r}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Seega $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$.

Ülesanne

Leida vektoriga $\vec{r} = 3\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_1 - 12\,\vec{e}_1$ samasuunaline ühikvektor $\vec{e}$.

Järgmistes ülesannetes reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ristreeper.

Ülesanne

Leida vektoriga $\vec{r} = 6\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_1$ samasuunaline ühikvektor $\vec{e}$.

Lahendus. Kasutame loengus tõestatud valemit, et ristkoordinaatide korral vektori pikkus on võrdne ruutjuurega koordinaatide ruutude summast. Leiame

$$|\vec{r}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Seega $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$.

Ülesanne

Leida vektoriga $\vec{r} = 3\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_1 - 12\,\vec{e}_1$ samasuunaline ühikvektor $\vec{e}$.

Vastus. $\vec{e} = (\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13})$.

Ülesanne

On antud vektor $\vec{r} = 16\,\vec{e}_1 - 15\,\vec{e}_2 + 12\,\vec{e}_3$. Leida vektor $\vec{x}$, kui

- $\vec{x}$ on vektoriga $\vec{r}$ vastassuunaline,
- $|\vec{x}| = 75$.

Ülesanne

On antud vektor $\vec{r} = 16\,\vec{e}_1 - 15\,\vec{e}_2 + 12\,\vec{e}_3$. Leida vektor $\vec{x}$, kui

- $\vec{x}$ on vektoriga $\vec{r}$ vastassuunaline,
- $|\vec{x}| = 75$.

Vastus. $\vec{x} = (-48, 45, -36)$.

Ülesanne

On antud vektor $\vec{r} = 16\,\vec{e}_1 - 15\,\vec{e}_2 + 12\,\vec{e}_3$. Leida vektor $\vec{x}$, kui

- $\vec{x}$ on vektoriga $\vec{r}$ vastassuunaline,
- $|\vec{x}| = 75$.

Vastus. $\vec{x} = (-48, 45, -36)$.

Ülesanne

On antud kaks vektorit $\vec{a} = 2\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 6\,\vec{e}_3, \vec{b} = -\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 2\,\vec{e}_3$. Fikseerime ruumi mingi punkti O. Rakendame vektori $\vec{a}$ punktist O, vastavat seotud vektorit tähistame $\overline{OA}$. Vektori $\vec{b}$ poolt punktis O tekitatud seotud vektorit tähistame $\overline{OB}$. Leida vektor $\vec{x}$, kui

- rakendatud punktist O ta asub nurga $\angle AOB$ nurgapoolitajal,
- $|\vec{x}| = 3\sqrt{42}$.

Ülesanne

On antud vektor $\vec{r} = 16\,\vec{e}_1 - 15\,\vec{e}_2 + 12\,\vec{e}_3$. Leida vektor $\vec{x}$, kui

- $\vec{x}$ on vektoriga $\vec{r}$ vastassuunaline,
- $|\vec{x}| = 75$.

Vastus. $\vec{x} = (-48, 45, -36)$.

Ülesanne

On antud kaks vektorit $\vec{a} = 2\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 6\,\vec{e}_3, \vec{b} = -\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 2\,\vec{e}_3$. Fikseerime ruumi mingi punkti O. Rakendame vektori $\vec{a}$ punktist O, vastavat seotud vektorit tähistame $\overline{OA}$. Vektori $\vec{b}$ poolt punktis O tekitatud seotud vektorit tähistame $\overline{OB}$. Leida vektor $\vec{x}$, kui

- rakendatud punktist O ta asub nurga $\angle AOB$ nurgapoolitajal,
- $|\vec{x}| = 3\sqrt{42}$.

Vastus. $\vec{x} = (-3, 15, 12)$.

Reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on suvaline (ei pea olema ristreeper).

Ülesanne

On antud kolm vektorit

$$\vec{p} = 3\,\vec{a}_1 - 2\,\vec{a}_2 + \vec{a}_3, \;\; \vec{q} = -\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 2\,\vec{a}_3, \;\; \vec{r} = 2\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 3\,\vec{a}_3.$$

Näidata, et vektorid $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ moodustavad ruumi E^3 baasi. Leida vektori $\vec{a} = 11\,\vec{a}_1 - 6\,\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3$ koordinaadid baasis $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$.

Reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on suvaline (ei pea olema ristreeper).

Ülesanne

On antud kolm vektorit

$$\vec{p} = 3\,\vec{a}_1 - 2\,\vec{a}_2 + \vec{a}_3, \quad \vec{q} = -\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 2\,\vec{a}_3, \quad \vec{r} = 2\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 3\,\vec{a}_3.$$

Näidata, et vektorid $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ moodustavad ruumi E^3 baasi. Leida vektori $\vec{a} = 11\,\vec{a}_1 - 6\,\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3$ koordinaadid baasis $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$.

Vastus. $\vec{x} = 2\,\vec{p} - 3\,\vec{q} + \vec{r}$.