Praktikumi teema “Vektorite segakorrutis”

Analüütiline geomeetria

Tartu Ülikool

Praktikum, segakorrutis

Segakorrutist defineeritakse valemiga

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) =< \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} > .$$

Praktikum, segakorrutis

Segakorrutist defineeritakse valemiga

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = < \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} > .$$

Segakorrutise absoluutväärtus $|(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|$ on võrdne kolmele vektorile $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud rööptahuka ruumalaga V.

Praktikum, segakorrutis

Segakorrutist defineeritakse valemiga

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) =< \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} > .$$

Segakorrutise absoluutväärtus $|(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|$ on võrdne kolmele vektorile $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud rööptahuka ruumalaga V.Vektorid $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui vektorite segakorrutis on võrdne nulliga.

Praktikum, segakorrutis

Segakorrutist defineeritakse valemiga

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) =< \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} > .$$

Segakorrutise absoluutväärtus $|(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|$ on võrdne kolmele vektorile $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud rööptahuka ruumalaga V.Vektorid $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui vektorite segakorrutis on võrdne nulliga.
Segakorrutise algebralised omadused

- $(\alpha\, \vec{x} + \beta\, \vec{y}, \vec{z}, \vec{v}) = \alpha\, (\vec{x}, \vec{z}, \vec{v}) + \beta\, (\vec{y}, \vec{z}, \vec{v})$,
- $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = -(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) = -(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) = -(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y})$.

Praktikum, segakorrutis

Segakorrutist defineeritakse valemiga

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = < \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} > .$$

Segakorrutise absoluutväärtus $|(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|$ on võrdne kolmele vektorile $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud rööptahuka ruumalaga V.Vektorid $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui vektorite segakorrutis on võrdne nulliga.
Segakorrutise algebralised omadused

- $(\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y}, \vec{z}, \vec{v}) = \alpha\,(\vec{x}, \vec{z}, \vec{v}) + \beta\,(\vec{y}, \vec{z}, \vec{v})$,
- $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = -(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) = -(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) = -(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y})$.

Segakorrutis võrdub nulliga, kui kaks vektorit (kolmest) on kollineaarsed (erijuhul võrdsed).

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{y}, \vec{z}$. Vektorite $\vec{y}, \vec{z}$ vaheline nurk on $\pi/6$ (30^o), st $\angle(\vec{y}, \vec{z}) = 30^o$. On antud vektorite pikkused $|\vec{x}| = 3, |\vec{y}| = 6, \vec{z}| = 3$. Arvutada segakorrutis $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{y}, \vec{z}$. Vektorite $\vec{y}, \vec{z}$ vaheline nurk on $\pi/6$ (30^o), st $\angle(\vec{y}, \vec{z}) = 30^o$. On antud vektorite pikkused $|\vec{x}| = 3, |\vec{y}| = 6, \vec{z}| = 3$. Arvutada segakorrutis $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Vastus: $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \pm 27.$

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{y}, \vec{z}$. Vektorite $\vec{y}, \vec{z}$ vaheline nurk on $\pi/6$ (30^o), st $\angle(\vec{y}, \vec{z}) = 30^o$. On antud vektorite pikkused $|\vec{x}| = 3, |\vec{y}| = 6, \vec{z}| = 3$. Arvutada segakorrutis $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Vastus: $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \pm 27$.

Ülesanne

Tõestada võrratus $|(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,|\vec{z}|$. Millisel juhul kehtib võrdus?

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{y}, \vec{z}$. Vektorite $\vec{y}, \vec{z}$ vaheline nurk on $\pi/6$ (30^o), st $\angle(\vec{y}, \vec{z}) = 30^o$. On antud vektorite pikkused $|\vec{x}| = 3, |\vec{y}| = 6, \vec{z}| = 3$. Arvutada segakorrutis $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Vastus: $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \pm 27$.

Ülesanne

Tõestada võrratus $|(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,|\vec{z}|$. Millisel juhul kehtib võrdus?

Vastus: võrdus kehtib siis, kui vektorid $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ on teineteisega risti.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{y}, \vec{z}$. Vektorite $\vec{y}, \vec{z}$ vaheline nurk on $\pi/6$ (30^o), st $\angle(\vec{y}, \vec{z}) = 30^o$. On antud vektorite pikkused $|\vec{x}| = 3, |\vec{y}| = 6, \vec{z}| = 3$. Arvutada segakorrutis $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Vastus: $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \pm 27$.

Ülesanne

Tõestada võrratus $|(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,|\vec{z}|$. Millisel juhul kehtib võrdus?

Vastus: võrdus kehtib siis, kui vektorid $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ on teineteisega risti.

Ülesanne

Tõestada samasus $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{y} + \vec{z}, \vec{z} + \vec{x}) = 2\,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Tõestada, et vektorid, mis rahuldavad tingimust

$$\vec{x} \times \vec{y} + \vec{y} \times \vec{z} + \vec{z} \times \vec{x} = \vec{0},$$

on komplanaarsed.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Tõestada, et vektorid, mis rahuldavad tingimust

$$\vec{x} \times \vec{y} + \vec{y} \times \vec{z} + \vec{z} \times \vec{x} = \vec{0},$$

on komplanaarsed.

Vihje: tingimuse mõlemad pooled korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{x}$.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Tõestada, et vektorid, mis rahuldavad tingimust

$$\vec{x} \times \vec{y} + \vec{y} \times \vec{z} + \vec{z} \times \vec{x} = \vec{0},$$

on komplanaarsed.

Vihje: tingimuse mõlemad pooled korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{x}$.

Ülesanne

On antud vektorid $\vec{a} = (1, -1, 3), \vec{b} = (-2, 2, 1), \vec{c} = (3, -2, 5)$. Arvutada $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Reeper on parema käe orientatsiooniga ristreeper.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Tõestada, et vektorid, mis rahuldavad tingimust

$$\vec{x} \times \vec{y} + \vec{y} \times \vec{z} + \vec{z} \times \vec{x} = \vec{0},$$

on komplanaarsed.

Vihje: tingimuse mõlemad pooled korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{x}$.

Ülesanne

On antud vektorid $\vec{a} = (1, -1, 3), \vec{b} = (-2, 2, 1), \vec{c} = (3, -2, 5)$. Arvutada $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Reeper on parema käe orientatsiooniga ristreeper.

Vastus: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -7$.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Kas järgmised vektorid on komplanaarsed või mitte

- $\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (1, 9, -11)$,
- $\vec{a} = (3, -2, 1), \vec{b} = (2, 1, 2), \vec{c} = (3, -1, -2)$?

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Kas järgmised vektorid on komplanaarsed või mitte

- ✠ $\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (1, 9, -11)$,
- ♣ $\vec{a} = (3, -2, 1), \vec{b} = (2, 1, 2), \vec{c} = (3, -1, -2)$?

Vastus: ✠ komplanaarsed, ♣ mitte komplanaarsed.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Kas järgmised vektorid on komplanaarsed või mitte

- ✠ $\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (1, 9, -11)$,
- ♣ $\vec{a} = (3, -2, 1), \vec{b} = (2, 1, 2), \vec{c} = (3, -1, -2)$?

Vastus: ✠ komplanaarsed, ♣ mitte komplanaarsed.

Ülesanne

Kasutades vektorite segakorrutist näidata, et neli punkti $A(1, 2, -1), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1), D(2, 1, 3)$ asuvad ühisel tasandil.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Kas järgmised vektorid on komplanaarsed või mitte

- ✠ $\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (1, 9, -11)$,
- ♣ $\vec{a} = (3, -2, 1), \vec{b} = (2, 1, 2), \vec{c} = (3, -1, -2)$?

Vastus: ✠ komplanaarsed, ♣ mitte komplanaarsed.

Ülesanne

Kasutades vektorite segakorrutist näidata, et neli punkti $A(1, 2, -1), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1), D(2, 1, 3)$ asuvad ühisel tasandil.

Ülesanne

Leida tetraeedri ruumala, kui selle tipud on punktid $A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1), D(4, 1, 3)$.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Kas järgmised vektorid on komplanaarsed või mitte

- ✠ $\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (1, 9, -11)$,
- ♣ $\vec{a} = (3, -2, 1), \vec{b} = (2, 1, 2), \vec{c} = (3, -1, -2)$?

Vastus: ✠ komplanaarsed, ♣ mitte komplanaarsed.

Ülesanne

Kasutades vektorite segakorrutist näidata, et neli punkti $A(1, 2, -1), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1), D(2, 1, 3)$ asuvad ühisel tasandil.

Ülesanne

Leida tetraeedri ruumala, kui selle tipud on punktid $A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1), D(4, 1, 3)$.

Vastus: $V = 3$ (mõõtühikut).

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Tetraeedri $ABCD$ ruumala on 5. Selle tetraeedri kolm tippu asuvad punktides koordinaatidega $A(2, 1, -1), B(3, 0, 1), C(2, -1, 3)$. Leida tipu D koordinaadid, kui on antud, et ta asub y-koordinaatteljel.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Tetraeedri $ABCD$ ruumala on 5. Selle tetraeedri kolm tippu asuvad punktides koordinaatidega $A(2, 1, -1), B(3, 0, 1), C(2, -1, 3)$. Leida tipu D koordinaadid, kui on antud, et ta asub y-koordinaatteljel.

Vastus: $D(0, 8, 0), D(0, -7, 0)$.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Tetraeedri $ABCD$ ruumala on 5. Selle tetraeedri kolm tippu asuvad punktides koordinaatidega $A(2,1,-1), B(3,0,1), C(2,-1,3)$. Leida tipu D koordinaadid, kui on antud, et ta asub y-koordinaatteljel.

Vastus: $D(0,8,0), D(0,-7,0)$.

Ülesanne

Kolmnurga $\triangle ABC$ tipud on punktid koordinaatidega $A(2,-1,-3), B(1,2,-4), C(3,-1,-2)$. Kasutades kahekordset vektorkorrutist, leida vektor $\vec{x}$, kui $|\vec{x}| = 2\sqrt{34}$ ja $\pi/2 < \angle(\vec{x}, \vec{e}_2) < \pi$.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Tetraeedri $ABCD$ ruumala on 5. Selle tetraeedri kolm tippu asuvad punktides koordinaatidega $A(2, 1, -1), B(3, 0, 1), C(2, -1, 3)$. Leida tipu D koordinaadid, kui on antud, et ta asub y-koordinaatteljel.

Vastus: $D(0, 8, 0), D(0, -7, 0)$.

Ülesanne

Kolmnurga $\triangle ABC$ tipud on punktid koordinaatidega $A(2, -1, -3), B(1, 2, -4), C(3, -1, -2)$. Kasutades kahekordset vektorkorrutist, leida vektor $\vec{x}$, kui $|\vec{x}| = 2\sqrt{34}$ ja $\pi/2 < \angle(\vec{x}, \vec{e}_2) < \pi$.

Vastus: $\vec{x} = (-6, -8, -6)$.

Praktikum, segakorrutis

Ülesanne

Tetraeedri $ABCD$ ruumala on 5. Selle tetraeedri kolm tippu asuvad punktides koordinaatidega $A(2,1,-1), B(3,0,1), C(2,-1,3)$. Leida tipu D koordinaadid, kui on antud, et ta asub y-koordinaatteljel.

Vastus: $D(0,8,0), D(0,-7,0)$.

Ülesanne

Kolmnurga $\triangle ABC$ tipud on punktid koordinaatidega $A(2,-1,-3), B(1,2,-4), C(3,-1,-2)$. Kasutades kahekordset vektorkorrutist, leida vektor $\vec{x}$, kui $|\vec{x}| = 2\sqrt{34}$ ja $\pi/2 < \angle(\vec{x}, \vec{e}_2) < \pi$.

Vastus: $\vec{x} = (-6,-8,-6)$.

Ülesanne

Tõestada $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$.