Praktikumi teema "Vektorite skalaarkorrutis"

Analüütiline geomeetria

Tartu Ülikool

Teoreetiline sissejuhatus

Ruumis on antud ortonormeeritud baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. On antud kaks vektorit

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3), \\ \vec{s} &= y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + y_3\,\vec{e}_3 = (y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Teoreetiline sissejuhatus

Ruumis on antud ortonormeeritud baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. On antud kaks vektorit

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3),\\ \vec{s} &= y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + y_3\,\vec{e}_3 = (y_1, y_2, y_3).\end{aligned}$$

Vektorite skalaarkorrutise arvutame järgmiselt

$$< \vec{r}, \vec{s} >= x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\,y_i.$$

Teoreetiline sissejuhatus

Ruumis on antud ortonormeeritud baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. On antud kaks vektorit

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3),\\ \vec{s} &= y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + y_3\,\vec{e}_3 = (y_1, y_2, y_3).\end{aligned}$$

Vektorite skalaarkorrutise arvutame järgmiselt

$$< \vec{r}, \vec{s} >= x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\,y_i.$$

Vektori pikkus avaldub koordinaatide kaudu järgmiselt

$$|\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Vektorite vahelise nurga koosinuse arvutamiseks kasutame valemit

$$\cos\angle(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Ülesanded

Ülesanne. On antud kaks vektorit $|\vec{r}| = 3, |\vec{s}| = 4, \angle(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{2\pi}{3}$. Arvutada $< 3\vec{r} - 2\vec{s}, \vec{r} + 2\vec{s} >$.

Ülesanded

Ülesanne. On antud kaks vektorit $|\vec{r}| = 3, |\vec{s}| = 4, \angle(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{2\pi}{3}$. Arvutada $< 3\vec{r} - 2\vec{s}, \vec{r} + 2\vec{s} >$.

Lahendus. Kõigepealt kasutame skalaarkorrutise lineaarsust ja sümmeetrilisust. Teisendame

$$\begin{aligned} < 3\vec{r} - 2\vec{s}, \vec{r} + 2\vec{s} > &= 3\,|\vec{r}|^2 - 2 < \vec{s}, \vec{r} > +6 < \vec{r}, \vec{s} > -4\,|\vec{s}|^2 \\ &= 3\,|\vec{r}|^2 + 4 < \vec{r}, \vec{s} > -4\,|\vec{s}|^2. \end{aligned}$$

Leiame

$$< \vec{r}, \vec{s} >= |\vec{r}|\ |\vec{s}|\ \cos\angle(\vec{r}, \vec{s}) = 3 \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = -6.$$

Vastus. -61

Ülesanded

Ülesanne. Tõestada, et kehtib võrdsus $|\vec{r}+\vec{s}|^2+|\vec{r}-\vec{s}|^2=2\left(|\vec{r}|^2+|\vec{s}|^2\right)$. Milline on selle võrdsuse geomeetriline tähendus?

Ülesanded

Ülesanne. Tõestada, et kehtib võrdsus $|\vec{r}+\vec{s}|^2+|\vec{r}-\vec{s}|^2=2\,(|\vec{r}|^2+|\vec{s}|^2)$. Milline on selle võrdsuse geomeetriline tähendus?

Lahendus. Kasutame skalaarkorrutise lineaarsust ja sümmeetrilisust. Leiame

$$|\vec{r}+\vec{s}|^2=<\vec{r}+\vec{s},\vec{r}+\vec{s}>=|\vec{r}|^2+2\,<\vec{r},\vec{s}>+|\vec{s}|^2.$$

Analoogiliselt

$$|\vec{r}-\vec{s}|^2=<\vec{r}-\vec{s},\vec{r}-\vec{s}>=|\vec{r}|^2-2\,<\vec{r},\vec{s}>+|\vec{s}|^2.$$

Nüüd liidame kokku vasak- ja parempooled. Saame

$$|\vec{r}+\vec{s}|^2+|\vec{r}-\vec{s}|^2=2\,(|\vec{r}|^2+|\vec{s}|^2).$$

Vastus. Rööpküliku diagonaalide pikkuste ruutude summa on võrdne külgede pikkuste ruutude summaga.

Ülesanded

Ülesanne Kasutades vektorite skalaarkorrutist, leida tingimus, mille korral vektor $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$.

Ülesanded

Ülesanne Kasutades vektorite skalaarkorrutist, leida tingimus, mille korral vektor $\vec{a}+\vec{b} \perp \vec{a}-\vec{b}$.

Lahendus. Vektorid $\vec{a}+\vec{b}$ ja $\vec{a}-\vec{b}$ on teineteisega risti parajasti siis, kui

$$< \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} >= 0.$$

Kasutades skalaarkorrutise lineaarsust, leiame

$$< \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} >=< \vec{a}, \vec{a} > - < \vec{a}, \vec{b} > + < \vec{b}, \vec{a} > - < \vec{b}, \vec{b} > .$$

Seega

$$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Vastus. Vektorite pikkused peavad olema võrdsed.

Ülesanded

Ülesanne. On antud kolm ühikvektorit $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ ja nad rahuldavad tingimust $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$. Arvutada $< \vec{p}, \vec{q} > + < \vec{q}, \vec{r} > + < \vec{r}, \vec{p} >$.

Ülesanded

Ülesanne. On antud kolm ühikvektorit $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ ja nad rahuldavad tingimust $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$. Arvutada $< \vec{p}, \vec{q} > + < \vec{q}, \vec{r} > + < \vec{r}, \vec{p} >$.

Lahendus. On antud, et kehtib võrdus $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$. Selle võrduse mõlemad pooled skalaarselt korrutame kõigepealt $\vec{p}$, siis $\vec{q}$ ja viimaseks $\vec{r}$. Saame

$$\begin{aligned} < \vec{p}, \vec{p} > + < \vec{q}, \vec{p} > + < \vec{r}, \vec{p} > &= 0, \\ < \vec{p}, \vec{q} > + < \vec{q}, \vec{q} > + < \vec{r}, \vec{q} > &= 0, \\ < \vec{p}, \vec{r} > + < \vec{q}, \vec{r} > + < \vec{r}, \vec{r} > &= 0. \end{aligned}$$

Liidame võrduste vasak- ja parempooled. Saame

$$2 \left(< \vec{p}, \vec{q} > + < \vec{q}, \vec{r} > + < \vec{r}, \vec{p} > \right) + 3 = 0.$$

Seega

$$< \vec{p}, \vec{q} > + < \vec{q}, \vec{r} > + < \vec{r}, \vec{p} > = -\frac{3}{2}.$$

Vastus. $-\frac{3}{2}$

Ülesanded

Ülesanne. Tõestada, et vektor

$$\vec{q} = \vec{r} - \frac{< \vec{r}, \vec{s} >}{|\vec{s}|^2}\vec{s}$$

on risti vektoriga $\vec{s}$.

Ülesanded

Ülesanne. Tõestada, et vektor

$$\vec{q} = \vec{r} - \frac{< \vec{r}, \vec{s} >}{|\vec{s}|^2}\vec{s}$$

on risti vektoriga $\vec{s}$.

Ülesanne. On antud vektorid $\vec{r} = (4, -2, -4), \vec{s} = (6, -3, 2)$. Arvutada

1. $< \vec{r}, \vec{s} >$;
2. $|\vec{r}|, |\vec{s}|$;
3. $< 2\vec{r} - 3\vec{s}, \vec{r} + 2\vec{s} >$.

Ülesanded

Ülesanne. Tõestada, et vektor

$$\vec{q} = \vec{r} - \frac{<\vec{r}, \vec{s}>}{|\vec{s}|^2}\vec{s}$$

on risti vektoriga $\vec{s}$.

Ülesanne. On antud vektorid $\vec{r} = (4, -2, -4), \vec{s} = (6, -3, 2)$. Arvutada

1. $<\vec{r}, \vec{s}>$;
2. $|\vec{r}|, |\vec{s}|$;
3. $< 2\vec{r} - 3\vec{s}, \vec{r} + 2\vec{s} >$.

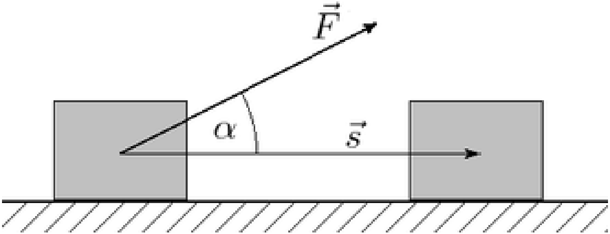
Vastus. 22, 6, 7, -200.

Teoreetiline struktuur. Mehaaniline töö

Kui kehale mõjub jõud ja keha selle jõu mõjul liigub, siis teeb see jõud tööd. Tööd tähistatakse A (saksa keeles *Arbeit*). Kuidas vastavat tööd arvutada? Jõud on vektor $\vec{F}$, mis tähendab, et tal on moodul ehk suurus $|\vec{F}|$ ja suund. Töö võrdub jõu ja jõu mõjul liikuva keha siirdevektori $\vec{s}$ skalaarkorrutisega, st

$$A = < \vec{F}, \vec{s} > .$$

Järelikult, kui punktile P on rakendatud konstantne jõud $\vec{F}$, punkti P liikumine on sirgjooneline, läbitud teepikkus on siirdevektori pikkus $s = |\vec{s}|$, siis jõu poolt tehtud töö on $A = < \vec{F}, \vec{s} >$.



Ülesanded

Ülesanne Arvutada jõu $\vec{F} = (3, -5, 2)$ poolt tehtud töö, kui selle rakenduspunkt P liigub vektori $\vec{s} = (2, -5, -7)$ alguspunktist lõpp-punkti.

Ülesanded

Ülesanne Arvutada jõu $\vec{F} = (3, -5, 2)$ poolt tehtud töö, kui selle rakenduspunkt P liigub vektori $\vec{s} = (2, -5, -7)$ alguspunktist lõpp-punkti.

Vastus. 17

Ülesanded

Ülesanne Arvutada jõu $\vec{F} = (3, -5, 2)$ poolt tehtud töö, kui selle rakenduspunkt P liigub vektori $\vec{s} = (2, -5, -7)$ alguspunktist lõpp-punkti.

Vastus. 17

Ülesanne. Leida millise parameetri t väärtuse korral vektor $\vec{r} = t\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ on risti vektoriga $\vec{s} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - t\,\vec{e}_3$.

Ülesanded

Ülesanne Arvutada jõu $\vec{F} = (3, -5, 2)$ poolt tehtud töö, kui selle rakenduspunkt P liigub vektori $\vec{s} = (2, -5, -7)$ alguspunktist lõpp-punkti.

Vastus. 17

Ülesanne. Leida millise parameetri t väärtuse korral vektor $\vec{r} = t\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ on risti vektoriga $\vec{s} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - t\,\vec{e}_3$.

Vastus. -6

Ülesanded

Ülesanne Arvutada jõu $\vec{F} = (3, -5, 2)$ poolt tehtud töö, kui selle rakenduspunkt P liigub vektori $\vec{s} = (2, -5, -7)$ alguspunktist lõpp-punkti.

Vastus. 17

Ülesanne. Leida millise parameetri t väärtuse korral vektor $\vec{r} = t\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ on risti vektoriga $\vec{s} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - t\,\vec{e}_3$.

Vastus. -6

Ülesanne On antud kolmnurga tipud $A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0), C(3, -2, 1)$. Leida kolmnurga sisenurk tipus B.

Ülesanded

Ülesanne Arvutada jõu $\vec{F} = (3, -5, 2)$ poolt tehtud töö, kui selle rakenduspunkt P liigub vektori $\vec{s} = (2, -5, -7)$ alguspunktist lõpp-punkti.

Vastus. 17

Ülesanne. Leida millise parameetri t väärtuse korral vektor $\vec{r} = t\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ on risti vektoriga $\vec{s} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - t\,\vec{e}_3$.

Vastus. -6

Ülesanne On antud kolmnurga tipud $A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0), C(3, -2, 1)$. Leida kolmnurga sisenurk tipus B.

Vastus. $\frac{\pi}{4}$

Ülesanne. Leida vektor $\vec{r}$, kui ta on risti vektoritega

$$3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3, \quad 18\,\vec{e}_1 - 22\,\vec{e}_2 - 5\,\vec{e}_3$$

ja vektori pikkus on 14. Vektor $\vec{r}$ moodustab y-teljega nürinurga.

Ülesanded

Ülesanne Arvutada jõu $\vec{F} = (3, -5, 2)$ poolt tehtud töö, kui selle rakenduspunkt P liigub vektori $\vec{s} = (2, -5, -7)$ alguspunktist lõpp-punkti.

Vastus. 17

Ülesanne. Leida millise parameetri t väärtuse korral vektor $\vec{r} = t\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ on risti vektoriga $\vec{s} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - t\,\vec{e}_3$.

Vastus. -6

Ülesanne On antud kolmnurga tipud $A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0), C(3, -2, 1)$. Leida kolmnurga sisenurk tipus B.

Vastus. $\frac{\pi}{4}$

Ülesanne. Leida vektor $\vec{r}$, kui ta on risti vektoritega

$$3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3, \quad 18\,\vec{e}_1 - 22\,\vec{e}_2 - 5\,\vec{e}_3$$

ja vektori pikkus on 14. Vektor $\vec{r}$ moodustab y-teljega nürinurga.

Vastus. $\vec{r} = (-4, -6, 12)$

Ülesanded

Ülesanne. On antud kolm vektorit

$$\vec{a} = 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3, \ \ \vec{b} = \vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3, \ \ \vec{c} = 3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 4\,\vec{e}_3.$$

Leida vektor $\vec{x}$, mis rahuldab kolme tingimust

$$< \vec{x}, \vec{a} >= -5, \ \ < \vec{x}, \vec{b} >= -11, \ \ < \vec{x}, \vec{c} >= 20.$$

Ülesanded

Ülesanne. On antud kolm vektorit

$$\vec{a} = 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3, \;\; \vec{b} = \vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3, \;\; \vec{c} = 3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 4\,\vec{e}_3.$$

Leida vektor $\vec{x}$, mis rahuldab kolme tingimust

$$< \vec{x}, \vec{a} >= -5, \;\; < \vec{x}, \vec{b} >= -11, \;\; < \vec{x}, \vec{c} >= 20.$$

Vastus. $\vec{x} = (2, 3, -2)$

Ülesanded

Ülesanne. On antud kolm vektorit

$$\vec{a} = 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3, \quad \vec{b} = \vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3, \quad \vec{c} = 3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 4\,\vec{e}_3.$$

Leida vektor $\vec{x}$, mis rahuldab kolme tingimust

$$< \vec{x}, \vec{a} >= -5, \quad < \vec{x}, \vec{b} >= -11, \quad < \vec{x}, \vec{c} >= 20.$$

Vastus. $\vec{x} = (2, 3, -2)$

Ülesanne Leida vektori $\vec{r} = (5, 2, 5)$ ristprojektsioon vektori $\vec{s} = (2, -1, 2)$ sihile.

Ülesanded

Ülesanne. On antud kolm vektorit

$$\vec{a} = 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3, \quad \vec{b} = \vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3, \quad \vec{c} = 3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 4\,\vec{e}_3.$$

Leida vektor $\vec{x}$, mis rahuldab kolme tingimust

$$< \vec{x}, \vec{a} >= -5, \quad < \vec{x}, \vec{b} >= -11, \quad < \vec{x}, \vec{c} >= 20.$$

Vastus. $\vec{x} = (2, 3, -2)$

Ülesanne Leida vektori $\vec{r} = (5, 2, 5)$ ristprojektsioon vektori $\vec{s} = (2, -1, 2)$ sihile.

Vastus. $\mathrm{pr}_{\vec{s}}\vec{r} = 6$.