

Praktikumi teema "Vektorite liitmine ja korrutamine arvudega"

Analüütiline geomeetria

Tartu Ülikool

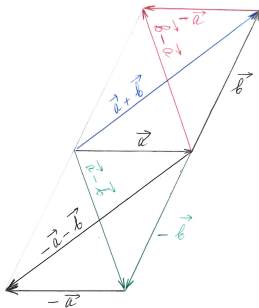
Ülesanne

On antud vektorid \vec{a}, \vec{b} . Näita joonisel vektorid $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $-\vec{a} - \vec{b}$.

Ülesanne

On antud vektorid \vec{a}, \vec{b} . Näita joonisel vektorid $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $-\vec{a} - \vec{b}$.

Lahendus.



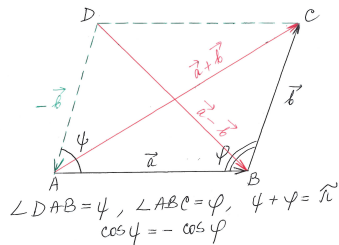
Ülesanne

On antud $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Leida $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ülesanne

On antud $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Leida $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Lahendus.



Kasutame koosinuse valemit. Kolmnurga $\triangle ABD$ korral kehtib

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \|\vec{a}\| |\vec{b}| \cos \psi.$$

Arvestame, et $\cos \psi = -\cos \varphi$. Seega valemi kuju muutub järgmiselt

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \|\vec{a}\| |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (1)$$

Analoogiliselt kolmnurga $\triangle ABC$ korral kehtib

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \|\vec{a}\| |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (2)$$

Nüüd liidame valemite (1) ja (2) parem- ja vasakpooled. Saame

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2).$$

Siit leiame

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2.$$

Kasutame koosinuse valemit. Kolmnurga $\triangle ABD$ korral kehtib

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \|\vec{a}\| |\vec{b}\| \cos \psi.$$

Arvestame, et $\cos \psi = -\cos \varphi$. Seega valemi kuju muutub järgmiselt

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \|\vec{a}\| |\vec{b}\| \cos \varphi. \quad (1)$$

Analoogiliselt kolmnurga $\triangle ABC$ korral kehtib

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \|\vec{a}\| |\vec{b}\| \cos \varphi. \quad (2)$$

Nüüd liidame valemite (1) ja (2) parem- ja vasakpooled. Saame

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2).$$

Siit leiame

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2.$$

Vastus. $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$.

Ülesanne

On antud $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Ülesanne

On antud $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Lahendus. Analoogiliselt eelmise ülesandega. **Vastus.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$.

Ülesanne

On antud $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ülesanne

On antud $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Lahendus. Analoogiliselt eelmise ülesandega. **Vastus.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$.

Ülesanne

On antud $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Lahendus. Vektoritele \vec{a} , \vec{b} ehitatud rööpkülik on tegelikult ristkülik (tehke joonis!). Kasutame Pythagorase teoreemi ja leiame $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$.

Ülesanne

On antud $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ülesanne

On antud $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Lahendus. Kasutame koosinuse teoreemi

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot (-\frac{1}{2}) = 129 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11,36 \end{aligned}$$

Analoogiliselt leiame $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

Ülesanne

On antud $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Lahendus. Kasutame koosinuse teoreemi

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot (-\frac{1}{2}) = 129 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11,36 \end{aligned}$$

Analoogiliselt leiame $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

Ülesanne

On antud kaks vektorit $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ülesanne

On antud $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Lahendus. Kasutame koosinuse teoreemi

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot (-\frac{1}{2}) = 129 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11,36 \end{aligned}$$

Analoogiliselt leiame $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

Ülesanne

On antud kaks vektorit $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Leida $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Vastus. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19} \approx 4,4$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

Ülesanne

Millist tingimust peavad rahuldama vektorid \vec{a}, \vec{b} selleks, et kehtiks

① $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|,$

② $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|,$

③ $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$

Ülesanne

Millist tingimust peavad rahuldama vektorid \vec{a}, \vec{b} selleks, et kehtiks

- 1 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$,
- 2 $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$,
- 3 $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$

Vastus.

- 1 $\vec{a} \perp \vec{b}$, täisnurk
- 2 $0 \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$, teravnurk
- 3 $\frac{\pi}{2} < \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$, nürinurk

Ülesanne

On antud kaks vektorit \vec{a}, \vec{b} . Näita joonisel vektor

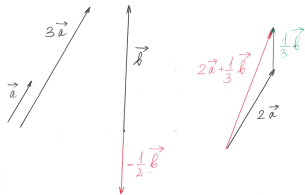
- 1 $3\vec{a}$,
- 2 $-\frac{1}{2}\vec{b}$,
- 3 $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Ülesanne

On antud kaks vektorit \vec{a} , \vec{b} . Näita joonisel vektor

- 1 $3\vec{a}$,
- 2 $-\frac{1}{2}\vec{b}$,
- 3 $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Lahendus. Vektori korrutamise arvuga definitsiooni kohaselt $|3\vec{a}| = |3| |\vec{a}| = 3 |\vec{a}|$. Kuna $3 > 0$, siis vektor $3\vec{a}$ on samasuunaline vektoriga \vec{a} ja selle pikkus on kolm korda suurem.



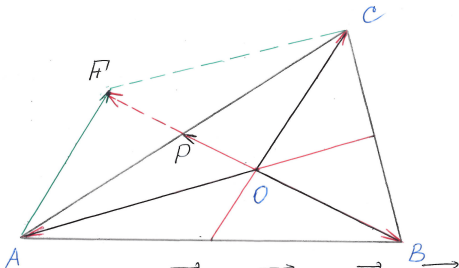
Ülesanne

Punkt O on kolmnurga $\triangle ABC$ raskuskese. Tõestada, et $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

Ülesanne

Punkt O on kolmnurga $\triangle ABC$ raskuskeske. Tõestada, et $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

Kolmnurga raskuskeske asub mediaanide lõikepunktis. Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes 1:2.



$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OH'}, \quad \vec{OH'} = 2\vec{OP}, \quad -2\vec{OP} = \vec{OB}$$

Asendame

$$\vec{OA} + \vec{OC} = -\vec{OB} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{0}$$