

Karen Uhlenbeck, geomeetria ja matemaatiline füüsika

VIKTOR ABRAMOV, PRIIT LÄTT
Tartu Ülikool

1 Sissejuhatus

Norra Teaduste Akadeemia andis 2019. aasta Abeli preemia Karen Uhlenbeck'ile teerajaja töö ja väljapaistvate saavutuste eest kaasaegse matemaatika sellistes tähtsates valdkondades, kus uuritakse geomeetrilisi diferentsiaalvõrrandeid, kalibratsiooniväljateooriaid ja integreeruvaid süsteeme. Antud artikkel on pühendatud Karen Uhlenbeck'i panusele matemaatika valdkonna arengusse, mis ühendab geomeetria, matemaatilist füüsikat ja matemaatilist analüüsi üheks tervikuks. Vastavat matemaatika valdkonda sageli nimetatakse *geomeetriliseks analüüsiks*, mõnikord *globaalseks analüüsiks*. Selles valdkonnas matemaatilise analüüsi ja diferentsiaalvõrrandite teooria meetodeid rakendatakse geomeetriliste ja topoloogiliste probleemide uurimiseks.

Klassikalise diferentsiaalgeomeetria põhiuurimisobjektideks on kõverad ja pinnad. Kaasaegses teoreetilises füüsikas on mitu väljateooriat. Iga väljateooria eesmärk on kirjeldada teatud füüsikalisi nähtusi, näiteks elektromagnetilisi vastasmõjusid. Väljateoorias kasutatakse füüsikalise välja mõistet ja matemaatika seisukohalt füüsikaline väli on real-, kompleks- või vektorväärtustega funktsioon, mille määramispiirkond on neljamõõtmeline Minkowski ruum. Geomeetrilise analüüsi raames uuritakse kõveraid, pindu või välju, mis on mõne geomeetrilise (näiteks pindala), või füüsikalise (näiteks energia) suuruse kriitilised punktid. Näiteks kui geomeetriliseks suuruseks, mida tuleb minimiseerida, on pinna pindala, siis saame *minimaalpindade teooria*. Minimaalpinna kujukas näide on järgmine. Oletame, et kolmemõõtmelises ruumis on antud kinnine joon, kusjuures puuduvad eneselõikamised ja antud kinnine joon ei ole sõlm. Teiste sõnadega antud kinnine joon on kuidagi deformeeritud ringjoon. Ülesanne nüüd seisneb selles, et peame moodustama pinna nii, et, esiteks, etteantud kinnine joon on selle pinna raja, ja, teiseks, pinna pindala on minimaalne. Minimaalpind on matemaatiline abstraktsioon, kuid on huvitav, et sellised pinnad tekivad meid ümbritsevas reaalsuses füüsikaliste seaduste toimet. Näiteks kui teha traadist ringi, painutada seda ja panna seebivahu sisse, siis traadist tehtud kontuurile tõmbab seebikile, mille geomeetiline kuju on minimaalpind. Karen Uhlenbeck'i kõige olulisemate saavutuste hulgas on põhjapanevad

tulemused minimaalpindade teoorias.

Teine geomeetrilise analüüsi valdkond, kuhu Karen Uhlenbeck on silmapaistvalt panustanud, on kalibratsiooniteooriate geomeetria ja Yang-Millsi võrrandite lahendused. Tema tulemused kalibratsiooniteooriate geomeetrias on fundamentaalsed ja kõik edasised uurimised selles valdkonnas tuginevad ühel või teisel määral Karen Uhlenbeck'i töödele. Antud uurimisvaldkond on äärmiselt huvitav ja aktuaalne tänu sellele, et selles realiseeritakse selliste erinevate teadusvaldkondade nagu teoreetiline füüsika, diferentsiaalgeomeetria, algebra, matemaatiline analüüs ja diferentsiaalvõrranditeooria ideede, mõistete ja meetodite süntees.

Kalibratsiooniväljateooriaid (gauge theories) kasutatakse kaasaegses teoreetilises füüsikas vastasmõjude kirjeldamiseks. Kaasaegsed eksperimentaalsed andmed näitavad, et looduses on neli fundamentaalset interaktsiooni. Need on elektromagnetilised, nõrgad, tugevad ja gravitatsioonilised vastasmõjud. Iga interaktsiooni kirjeldab vastav väljateooria, millel on kalibratsiooniväljateooria struktuur. Selle struktuuri eripära on teooria kalibratsioonisümmeetriad, mis moodustavad kalibratsioonirühma. Kalibratsioonisümmeetria tähendab, et kui kalibratsiooniväli on teatud viisil teisendatud (kalibratsiooniteisendused, mis sõltuvad kalibratsioonirühma elementidest), siis füüsikaline konfiguratsioon ei muutu, st väljateooria võrrandid, nende lahendused jäävad samadeks. Teiste sõnadega, kalibratsiooniteisendus ei too teooria jaoks kaasa mingeid füüsikalisi tagajärgi.

Võime öelda, et kalibratsiooniväli on määratud kalibratsiooniteisenduse täpsusega ja kui kalibratsioonirühm on mittekommutatiivne, teeb see kalibratsiooniväljateooria kvantiseerimine üsna keeruliseks. Kalibratsiooniväljateooria mittekommutatiivse kalibratsioonirühmaga kvantiseerimise meetod, mis tugineb Feynman'i integralile (integreerimine toimub lõpmatumõõtmeilises funktsionaalses ruumis), oli väga töötatud L. Faddeevi ja A. Slavnovi töödes [2].

Seega on igal kalibratsiooniväljateoorial oma kalibratsioonirühm. Reeglina on see N -järku kompleksete unitaarsete determinandiga 1 maatrikrite rühm $SU(N)$, näiteks Maxwelli teooria (elektromagnetismiteooria) kalibratsioonirühm on $U(1)$ (kompleksarvud mooduliga 1), Yang-Millsi väljateooria kalibratsioonirühm on $SU(2)$ ning tugevate vastasmõjude teooria kalibratsioonirühm on $SU(3)$. Siinkohal tuleb mainida, et kaasaegse teoreetilise füüsika fundamentaalprobleemiks on ühtse väljateooria konstrueerimise probleem, see tähendab selline väljateooria, mille raames saaks kirjeldada kõiki teadaolevaid vastasmõjusid. Elektromagnetiliste ja nõrkade interaktsioonide ühtse väljateooria oli konstrueeritud ja uuritud Glashow, Weinberg'i ja Salam'i töödes ja vastavat teooriat nimetatakse Glashow-

Weinberg-Salam'i kalibratsiooniväljateooriaks (electroweak theory) ja selle kalibratsioonirühmaks on $SU(2) \times U(1)$. Glashow-Weinberg-Salam'i teooriat on võimalik ühendada tugevate interaktsioonide teooriaga, valides piisavalt suure kalibratsioonirühma (mis sisaldaks $SU(2) \times U(1)$ ja $SU(3)$), näiteks $SU(5)$. Gravitatsiooni võib vaadelda ka kui kalibratsiooniväljateooriat. Kalibratsioonirühm on sel juhul aga lõpmatumõõtmeline funktsionaalse ruumi struktuuriga ja see on probleemide allikas, mida pole veel siiani lahendatud.

Esimene kalibratsiooniväljateooria mittekommutatiivse kalibratsioonirühmaga $SU(2)$ oli pakutud füüsikute C. Yang'i ja R. Mills'i töös [9] ja praegu vastavat väljateooriat nimetatakse Yang-Mills'i väljateooriaks. Yang-Mills'i väljateooria baseerub H. Weyl kalibratsiooniprintsiibil, mida võiks sõnastada järgmiselt: kalibratsiooniteisenduse parameeter sõltub aeg-ruumi punktist või teiste sõnadega vaatlejatel aeg-ruumi erinevates punktides on erinevad kalibratsiooniteisenduse parameetrid. Diferentsiaalgeomeetrias 30. aastate lõpus loodi kihtkondade ja seostuste kihtkondadel teooria, mida aktiivselt uuriti. Rõhutame, et Yang-Millsi väljateooria oli konstrueeritud lähtudes väljateooria printsiipidest ja teoreetilise füüsika probleemide lahendamiseks ning kihtkondade ja seostuste teooria kasvas välja seostuse mõiste üldistamisest ja oli loodud diferentsiaalgeomeetria probleemide lahendamiseks. Seda hämmastavam on see fakt, et need kaks teooriat osutusid põhimõistete matemaatilise kirjelduse seisukohast täpselt samaks! Ainus erinevus oli see, et diferentsiaalgeomeetrias ja teoreetilises füüsikas kasutati samade objektide jaoks erinevaid termineid. Diferentsiaalgeomeetrias kasutati mõisteid seostus ja selle kõverus, samas Yang-Mills'i väljateoorias kasutati termineid kalibratsioonivälja potentsiaal ja selle tugevus. Kuid need olid sisuliselt samad objektid! See avastati eelmise sajandi 60-ndate aastate lõpus ja andis võimsa tõuke kahe teaduse kiireks vastastikuseks rikastamiseks.

Seega selgus, et kihtkondade ja seostuste kihtkondadel teooria on kalibratsiooniväljateooriate matemaatiliseks kirjeldamiseks adekvaatne geomeetriline teooria. Sellega seoses tekib küsimus, mis on seostus ja kuidas selline mõiste diferentsiaalgeomeetrias tekkis. Seostuse mõistet saab seletada *suunatuletise* abil. Funktsiooni tuletis näitab, kui kiiresti muutub funktsioon. Kui funktsioon on määratud kolmemõõtmelises ruumis, siis suunatuletis näitab, kui kiiresti muutub funktsioon teatud suunas. Olgu $\mathbf{E}^3$ kolmemõõtmeline eukleidiline ruum. Kui p on $\mathbf{E}^3$ mingi punkt, siis kõik vektorid alguspunktiga punktis p moodustavad vektorruumi, mida tähistame $T_p\mathbf{E}^3$, ja edaspidi nimetame ruumi $\mathbf{E}^3$ puutujaruumiks punktis p . Olgu kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis $\mathbf{E}^3$ antud punkt p , vektor $\mathbf{v}$ (rakendatud punktist p) ja

punkti p ümbruses $U \subset \mathbf{E}^3$ on määratud lõpmata diferentseeruv funktsioon f . Alati leidub parametrizeeritud kõver $\alpha : I \rightarrow U$, kus $I \subset \mathbb{R}$, mis läbib punkti p , st $\alpha(0) = p$ ja $\mathbf{v}$ on selle kõvera puutujavektor punktis p , st $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, kus $\alpha'(t)$ on kõvera α puutujavektor punktis $\alpha(t)$. Funktsiooni f suunatuletiseks punktis p vektori v suunas nimetatakse arvu

$$(\nabla_v f)_p = \frac{d}{dt}(f(\alpha(t)))|_{t=0}. \quad (1)$$

Kui eukleidilise ruumi $\mathbf{E}^3$ (või selle lahtise alamhulga $U \subset \mathbf{E}^3$) igas punktis p on määratud vektor X_p (siinkohal peame silmas, et vektor X_p on rakendatud punktist p), siis öeldakse, et eukleidilises ruumis on antud vektorväli X ja vektor X_p on selle vektorvälja väärtus punktis p . Vektorväljad saab liita $X + Y$ ja korrutada funktsioonidega fX , need algebralised tehted on defineeritud punktiiviisi. Valemi (1) abil määrame uue funktsiooni $X(f)$ järgmiselt: $X(f)$ on funktsioon, mille väärtus punktis p võrdub funktsiooni f suunatuletise väärtusega punktis p vektori X_p suunas. Seega sellisel viisil defineeritud funktsioon $X(f)$ näitab, kui kiiresti muutub algfunktsioon f ruumi mingi punkti infinitesimaalses ümbruses vektorvälja X suunas.

Järgmine samm on rakendada ülalpool kirjeldatud konstruktsiooni selleks, et mõõta, kuidas üks vektorväli Y muutub teise vektorvälja X poolt määratud suunas. Selleks oletame, et ruumis $\mathbf{E}^3$ on antud ristkoordinaadisüsteem, st on antud kolm ühikvektorit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ja nad on paarikaupa risti. Nüüd suvaline vektorväli X on üheselt määratud kolme funktsiooniga X^1, X^2, X^3 , kus funktsiooni X^i väärtus ruumi punktis p on vektori X_p i -s koordinaat (baasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$). Funktsioone X^1, X^2, X^3 nimetatakse vektorvälja X komponentideks antud ristkoordinaadisüsteemis ja järgnevas alati eeldame, et vektorvälja komponendid on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid. Olgu Y^1, Y^2, Y^3 vektorvälja Y komponendid antud koordinaadisüsteemis. Kasutades funktsiooni suunatuletise mõistet, määrame uue vektorvälja $\nabla_X Y$, mille komponendid on funktsioonid $X(Y^1), X(Y^2), X(Y^3)$. Vektorvälja $\nabla_X Y$ definitsioonist järeldub, et vektorväli $\nabla_X Y$ näitab, kuidas muutuvad vektorvälja Y komponendid (seega vektorväli Y) vektorvälja X poolt määratud suunas. Kujutust ∇ , mis seab kahele vektorväljale X, Y vektorvälja $\nabla_X Y$ nimetatakse *kovariantseks tuletiseks*. Mainime, et kovariantsel tuletisel on järgmine omadus

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z. \quad (2)$$

Sisuliselt kovariantne tuletis on seostus ja ruumi $\mathbf{E}^3$ korral see on eukleidiline seostus. Selleks, et seletada, miks kovariantse tuletise juhul

kasutatakse terminit "seostus" näitame kuidas kovariantse tuletisega assotsieerub *seostuse maatriks*. Oletame, et ruumis $\mathbf{E}^3$ on antud kolm vektorvälja E_1, E_2, E_3 , kusjuures ruumi igas punktis nende poolt määratud vektorid moodustavad ruumi ortonormeeritud baasi (st nad on ühikvektorid ja paarikaupa risti). Tavaliselt kolmikut $\{E_1, E_2, E_3\}$ nimetatakse ruumi $\mathbf{E}^3$ *ristreeperväljaks*. Tõepoolest kolmik E_1, E_2, E_3 määrab ruumi igas punktis ristreeperit, st punkt (alguspunkt) ja kolm baasivektorit. Juhime tähelepanu sellele, et kolm ortonormeeritud vektorit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tekitavad ristreepervälja. Sellisel juhul vektorvälja E_i väärtus ruumi suvalises punktis on $\mathbf{e}_i$. On ilmne, et sellisel juhul ristreeperväli on konstantne ja kovariantse tuletise rakendamine annab triviaalse tulemuse. Kuid see ei ole ainus võimalus ristreepervälja konstrueerimiseks. Kõverjooneline koordinaadisüsteem, kus koordinaatjooned on ruumi igas punktis teine teisega risti, tekitab ruumis ristreepervälja, näiteks sfäärilised koordinaadid. Sellisel juhul vektorvälja E_i väärtus ruumi punktis p on i -nda koordinaatjoone puutujavektor punktis p (vajaduse korral normeeritud). See on vähem triviaalne näide võrreldes konstantse reeperväljaga (tekitatud vektorite $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ poolt), sest sellisel juhul vektorväljad $\{E_1, E_2, E_3\}$ on üldiselt mittekonstantsed, reeper sõltub punktist ja seostuse maatriks on mittetriviaalne. On ilmne, et iga vektorväli X on esitatav kujul

$$X = X^1 E_1 + X^2 E_2 + X^3 E_3, \quad (3)$$

kus X^1, X^2, X^3 on vektorälja X komponendid kõverjoonelistes koordinaatides.

Olgu X mingi vektorväli ruumis $\mathbf{E}^3$. Vaatleme kovariantset tuletist $\nabla_X E_i$, kus $i = 1, 2, 3$. Arvestades ülalpool näidatud kovariantse tuletise geomeetrilist tähendust, teame, et kovariantne tuletis näitab meile, kuidas ristreeper muutub alguspunkti lõpmata väikese nihke vektorvälja X poolt määratud suunas korral. Siinkohal on tähtis see, et ruumi igas punktis reeper on ristreeper (baasivektorid on ortonormeeritud). See tähendab, et reeperi alguspunkti infinitesimaalnihke korral baasivektorid jäävad ühikvektoriteks (pikkus ei muutu) ja nende vastastikune asend (teine teisega risti) ka jääb samaks. Kuid eukleidilises ruumis $\mathbf{E}^3$ tähendab see ainult ühte liikumist ja see on reeperi pööre! Seega kovariantne tuletis peaks näitama infinitesimaalset pööret.

Kuna $\nabla_X E_i$ on vektorväli, kehtib valem (3) ja võime kirjutada

$$\nabla_X E_i = \sum_{j=1}^3 g_i^j E_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

kus g_i^j on funktsioonid. Seega valem (4) seab igale vektorväljale X vastavusse üheselt määratud funktsioonid g_i^j ja valemiga (4) määratud vastavus rahuldab omadust (2). Sellist vastavust kaasaegses diferentsiaalgeomeetrias nimetatakse *esimest järku diferentsiaalvormiks* või *1-vormiks* ja tähistatakse $\omega : X \rightarrow \omega(X)$, kus $\omega(X)$ on funktsioon. Seega 1-vormi ω väärtus vektorvälja X korral on funktsioon $\omega(X)$ ja suvaliste funktsioonide ning vektorväljade korral kehtib omadus

$$\omega(fX + gY) = f\omega(X) + g\omega(Y).$$

Järelikult valemi (4) võime nüüd kirjutada kujul

$$\nabla_X E_i = \sum_{j=1}^3 \omega_i^j(X) E_j. \quad (5)$$

Kolmandat järku ruutmaatriksit $\omega = (\omega_i^j)$, mille elemendid on 1-vormid, nimetatakse *eukleidilise seostuse maatriksiks*. Valemis (5) on vektorväli X suvaline ja põhimõtteliselt võiksime selle valemist ära jätta. See rikub aga kovariantse tuletise struktuuri, milles peaks olema kaks vektorvälja. Valemi (5) parem pool annab vihje selle probleemi lahendamiseks. Kui jätame valemi (5) paremal poolel oleva vektorvälja X ära, saame avaldise $\omega_i = \sum_{j=1}^3 \omega_i^j E_j$, mida saab vaadelda 1-vormina, mille väärtused on vektorväljad. Kasutades kovariantset tuletist defineerime uue operaatori D , mis seab igale vektorväljale Y vastavusse üheselt määratud 1-vormi DY , mille väärtused on vektorväljad, järgmiselt $DY(X) = \nabla_X Y$. Operaatorit D nimetatakse *kovariantseks diferentsiaaliks*. Nüüd võrrandi (5) võime kirjutada kompaktsel ja ilusal kujul

$$DE_i = \sum_{j=1}^3 \omega_i^j E_j. \quad (6)$$

Selle valemi abil saab põhjendada sõna "seostus" kasutamist. Tõepoolest, näeme, et ruumi punkti lõpmata väikse nihke korral muutub puutujaruumi reeper vastavalt valemile (6). Piltlikult öeldes, 1-vormide maatriks ω määrab seost puutujaruumide vahel, kus üheks puutujaruumiks on puutujaruum antud punktis ja teiseks on puutujaruum lõpmata lähedases punktis. Võrrand (6) selgitab seostuse mõistet infinitesimaalse lähenemise seisukohalt. Seda lähenemist laiendatakse kogu ruumile, kasutades vektori *paralleelülekanne piki kõverat*. Oletame, et ruumis on antud kõver, mis ühendab kahte punkti A ja B , ning punktis A on antud mingi vektor $\mathbf{v}$. Oletame, et ruumis on määratud seostus, järelikult meil on kovariantne diferentseerimine. Vektorvälja piki kõverat nimetatakse paralleelvektorväljaks, kui selle kovariantne

tuletis on null. Kovariantse tuletise võrdsus nulliga kirjutatud koordinaatides annab diferentsiaalvõrrandisüsteemi. Kui lisaks paneme algtingimuseks see, et otsitava vektorvälja väärtus punktis A on vektor $\mathbf{v}$, siis leidub diferentsiaalvõrrandisüsteemi lahend ja ta on ainus. Selle lahendi (vektorvälja piki kõverat) väärtus (vektor $\mathbf{w}$) punktis B on vektor $\mathbf{v}$ paralleelselt ülekantud punktist A punkti B . On ilmne, et kujutus, mis seab igale vektorile $\mathbf{v}$ (lahendi olemasolu) vastavusse üheselt määratud (lahendi ainsus) vektori $\mathbf{w}$, on puutujaruumide (punktides A ja B) isomorfism. Muidugi on selge, et puutujaruumide dimensioon ruumi erinevates punktides on üks ja sama ning seetõttu on need isomorfised. Kuid üldjuhul puudub nende vahel kanooniline isomorfism ja vektori paralleelülekanne võimaldab konstrueerida ühe puutujaruumi isomorfse kujutuse teise peale. Seega meie määrame võrrandi (6) abil seost kahe puutujaruumi vahel ja see õigustab termini “seostus” kasutamist.

Kovariantse diferentsiaali D korral kehtib valem

$$d \langle X, Y \rangle = \langle DX, Y \rangle + \langle X, DY \rangle, \quad (7)$$

kus X, Y on vektorväljad, $\langle, \rangle$ on skalaarkorrutis ja d on välisdiferentsiaal (harilikult diferentsiaali üldistus diferentsiaalvormidele). Erijuhul kui $X = E_i, Y = E_j$ saame

$$d \langle E_i, E_j \rangle = \langle DE_i, E_j \rangle + \langle E_i, DE_j \rangle.$$

Kuid $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ ja seega valemi vasakpool on võrdne nulliga. Valemi parempoolel rakendame valemit (6) ja saame $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$. See on tähtis tulemus, mis näitab seost kolmemõõtmelise ruumi pöörete rühmaga. Tuletagem meelde, et kolmemõõtmelise ruumi pööred saab kirjeldada rühma $SO(3)$ abil, kus $SO(3)$ on kolmandat järku determinandiga 1 ortogonaalmaatriksite ($AA^t = I$, I on ühikmaatriks, A^t on transponeeritud maatriks) rühm. Selle rühma Lie algebra $so(3)$ on kolmandat järku kaldsümmeetriliste maatrikstite Lie algebra. Järelikult seostuse maatriksit ω võime vaadelda kui $so(3)$ -väärtustega 1-vormi ja siin me selgelt näeme seost infinitesimaalpööretega kolmemõõtmelises ruumis.

Ülalpool oleme selgitanud seostuste teooria põhimõisteid üsna lihtsal juhul, kui ruumiks on kolmemõõtmeline eukleidiline ruum. Sel juhul määrab seostuse eukleidilise ruumi geomeetria (vektorite skalaarkorrutis) ja eukleidiline seostus on üsna triviaalne, see tähendab, et sellel pole kõverust. Kuid isegi sel juhul saab seostuse maatriksi teha mittetriviaalseks, kui arvutused viiakse läbi kõverjoonelistes koordinaatides ja see on diferentsiaalgeomeetria kursuse üliõpilastele hea harjutusülesanne. Seostuste teooria

on läbinud pika arengutee, seda on aktiivselt uuritud, arengule on võimas tõuge andnud rakendused kalibratsiooniväljateooriates ning praeguseks on see jõudnud kõrgele abstraktsuse ja üldistuse tasemele. Praegu esitatakse seostuste teooriat kaasaegse diferentsiaalgeomeetria selliste mõistete abil nagu *muutkond*, *kihtkond*, *Lie rühm*, *Lie algebra*. Muutkond on ruumi ja pinna mõiste üldistus. Diferentsiaalgeomeetrias uuritakse siledaid muutkondi, kuid teooria esitust tavaliselt alustatakse topoloogilise muutkonda mõiste definitsioonist. n -mõõtmeline topoloogiline muutkond M^n on topoloogiline ruum (Hausdorffi ruum topoloogia loenduva baasiga), mis on lokaalselt homöomorfne ruumiga $\mathbb{R}^n$. Seega topoloogilise muutkonna mis tahes punkti $p \in M^n$ ümbruses $U \subset M^n$ on määratud lokaalne koordinaadisüsteem, see tähendab lokaalne homöomorfism $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ võimaldab määrata igale punktile lokaalsed koordinaadid $\phi(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Paari (U, ϕ) nimetatakse lokaalseks koordinaatkaardiks (või lihtsalt kaardiks) punkti p ümbruses. Juhul kui lokaalsed koordinaadisüsteemid (U, ϕ) , (V, ψ) kattuvad $U \cap V \neq \emptyset$, tekkivad ühisosal üleminekufunktsioonid

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

mis võimaldavad punkti ühed koordinaadid $\phi(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ümber arvutada teisteks $\psi(p) = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ järgmiselt

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) = \phi \circ \psi^{-1}(y^1, y^2, \dots, y^n). \quad (9)$$

Tuleb mainida, et topoloogilisel muutkonnal me ei oska diferentseerida, kuna sisuliselt meil on ainult pidevuse mõiste. Seega pole võimalik rakendada diferentsiaalarvutuse võimsat aparati, millele tuginevad näiteks füüsika tähtsad diferentsiaalvõrrandid.

Topoloogilise muutkonna struktuurist järeldub, et üleminekufunktsioonid (8) on homöomorfismid ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtiste alamhulkade vahel. On ilmne, et kujutus (8) on üheselt määratud n funktsiooniga $f^1, f^2, \dots, f^n$. Valemi (9) nüüd võime kirjutada kujul

$$\begin{aligned} x^1 &= f^1(y^1, y^2, \dots, y^n), \\ x^2 &= f^2(y^1, y^2, \dots, y^n), \\ &\dots, \\ x^n &= f^n(y^1, y^2, \dots, y^n). \end{aligned} \quad (10)$$

Aga nüüd on tegemist reaalkäärtustega n -muutuva funktsioonidega ja selliste funktsioonide korral meie teame, mida tähendab diferentseerimine! Seetõttu nüüd võime nõuda, et oleks täidetud rangem tingimus, see tähendab, et

kõik üleminekufunktsioonid oleksid lõpmata diferentseeruvad (siledad) ja see annab sileda muutkonna kontseptsiooni. Lokaalsete koordinaatkaartide kogum $\{(U, \phi)\}$ koos vastavate siledade üleminekufunktsioonidega määrab muutkonna *siledat struktuuri*. Topoloogilist muutkonda M^n , millel on määratud sile struktuur, nimetatakse *siledaks muutkonnaks*.

Nüüd võime defineerida sileda funktsiooni mõistet. Olgu $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon siledal muutkonnal. Funktsiooni f nimetame siledaks, kui iga lokaalse koordinaatkaardi (U, ϕ) korral funktsioon $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on sile. Antud definitsioon on korrektne selles mõttes, et ta ei sõltu lokaalse kaardi valikust. Kui funktsioon on sile koordinaatides $x^1, x^2, \dots, x^n$, siis ta on sile ka koordinaatides $y^1, y^2, \dots, y^n$, sest muutujate vahetus (10) on sile.

Järgnevas sõna “muutkond” tähendab “sile muutkond”, see tähendab, et muutkond on varustatud sile struktuuriga. Siledade muutkondade *difeomorfismiks* nimetatakse kujutust, mis on bijektiivne, sile ja selle pöördkujutus on ka sile. Kui siledad muutkonnad on difeomorfised, siis diferentsiaalgeomeetrias neid peetakse ekvivalentseteks.

Sügav, fundamentaalne ja väga keeruline küsimus on see, kas topoloogilisel muutkonnal eksisteerib mittedifeomorfseid siledaid struktuure ja kui jah, siis kui palju neid võib olla. Pikka aega arvati, et topoloogilisel muutkonnal on ainult üks sile struktuur. Osutus, et see on õige dimensioonides 1,2,3, see tähendab, et n -mõõtmelisel topoloogilisel muutkonnal, kus $n = 1, 2, 3$, eksisteerib difeomorfismi täpsusega ainult üks sile struktuur. Selle valdkonna järgnenud areng aga näitas, et kõrgemates dimensioonides vastus sellele küsimusele polnud nii lihtne. J. Milnor [4] konstrueeris eksootilise sileda struktuuri seitsmemõõtmelisel sfääril S^7 , hiljem konstrueeriti eksootilised siledad struktuurid ka kõrgemate dimensioonidega sfääridel. Oli üsna loomulik oletada, et tasased ruumid $\mathbb{R}^n$ on rohkem “kuulekad” võrreldes kõverate muutkondadega. Tõepoolest, saab näidata, et kui $n \neq 4$, siis ruumil $\mathbb{R}^n$ on ainult üks sile struktuur. S. Donaldson'i (1986. aasta Fields'i medal) teoreemidest 4-mõõtmeliste muutkondade topoloogiast [1] järeldub, et ruumil $\mathbb{R}^4$ eksisteerivad “valsk” siledad struktuurid ja selliste struktuuride hulga võimsus on isegi mitteloenduv! Huvitav on see, et S. Donaldson'i teoreemid olid saadud Yang-Millsi võrandi lahendite uurimisel ja see on valdkond, mille arengusse Karen Uhlenbeck märkimisväärselt panustas. Toome ühte hämmastavat väidet, mis järeldub S. Donaldson'i teoreemidest. Olgu $\mathbb{R}_f^4$ neljamõõtmeline ruum “valsk” sile struktuuriga. Kehtib [3]

Ruumis $\mathbb{R}_f^4$ eksisteerib kompaktne alamhulk C selline, et selle ei saa ümbritseda siledalt sisestatud kolmemõõtmelise sfääriga.

Tuletame meelde, et kujutust $\phi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}_f^4$ nimetatakse sisestuseks, kui $\phi : S^3 \rightarrow \phi(S^3)$ on homöomorfism, ϕ on sile ja suvalise punkti $p \in S^3$ korral diferentsiaal $d\phi : T_p S^3 \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}_f^4$ on injektiivne ($T_p S^3, T_{\phi(p)} \mathbb{R}_f^4$ on puutujaruumid).

Järgmine mõiste, mida vajame Karen Uhlenbeck'i silmapaistvate tulemuste kirjeldamiseks, on *kihtkond*. Kihtkond on muutkond, millel on täiendav struktuur. Kihtkond koosneb baasmuutkonnast M^n ja sellel määratud kihtide parvest. Kui kihiks on vektorruum, siis kihtkonda nimetatakse *vektorkihtkonnaks* (mainime, et kihtide dimensioonid erinevates punktides on võrdsed). Kui kihiks on Lie rühm (näiteks $SU(N)$), siis kihtkonda nimetatakse *peakihtkonnaks*. Seega võimaldab kihtkonna mõiste kinnitada kihi muutkonna igale punktile, olgu see siis vektorruum või maatriksrühm. Füüsika seisukohalt annab see täiendavaid vabadusastmeid ja võimaldab kirjeldada osakese sisemist ruumi, näiteks isotoopset spinni. Olgu E vektorkihtkond, M^n selle baasmuutkond, E_p kihtkonna kiht punktis $p \in M^n$ (m -mõõtmeline vektorruum) ja $q \in E_p$ kihi mingi punkt. Kujutust $\pi : E \rightarrow M^n$, kus $\pi(q) = p$, nimetatakse kihtkonna projektsiooniks baasmuutkonnale. Seega vektorkihtkond on kolmik ja seda sageli tähistatakse järgmiselt (E, π, M^n) . Antud juhul vektorkihtkonna dimensioon on $n + m$. Lihtsaim viis vektorkihtkonna konstrueerimiseks on moodustada otsekorrutise $M^n \times \mathbb{R}^m$, sellist vektorkihtkonda nimetatakse *triviaalseks vektorkihtkonnaks*. Üldiselt vektorkihtkond on mittetriviaalsel viisil "väänatud" otsekorrutis ja seda ei saa esitada ülalpool näidatud otsekorrutisena, kuid kihtkonna definitsioonis nõutakse, et see oleks alati võimalik lokaalselt ja seda nimetatakse kihtkonna lokaalse trivialiseerimise nõudeks. Järelikult baasmuutkonna suvalise punkti $p \in M^n$ korral leudub selle ümbrus $U \subset M^n$ selline, et $\pi^{-1}(U) \subset E$ on difeomorfne otsekorrutisega $U \times \mathbb{R}^m$.

Kihtkondade teoorias kasutatakse mõistet *kihtkonna lõige*. See on sile kujutus, mis seab baasmuutkonna igale punktile $p \in M^n$ vastavusse üheselt määratud kihi E_p punkti, see tähendab, et lõige on kujutus $s : M^n \rightarrow E$, mis rahuldab tingimust $\pi \circ s = \text{id}_{M^n}$, kus id_{M^n} on baasmuutkonna samasusteisendus. Kihtkonna lõike mõiste on väga kasulik, mitmeid kaasaegse diferentsiaalgeomeetria mõisteid, näiteks vektorvälja, diferentsiaalvormi jt, saab ühtselt käsitleda vastava kihtkonna lõikena.

Vektorkihtkonna kujukas näide on muutkonna puutujakihtkond. Muutkonna M^n igas punktis p on määratud puutujaruum $T_p M^n$, puutujaruumide (ühisosata) ühend $\cup_{p \in M^n} T_p M^n$ on vektorkihtkond. Üldiselt see on mittetriviaalne vektorkihtkond. Näiteks, kui muutkonnaks on 2-mõõtmeline sfäär S^2 , siis selle puutujakihtkond on mittetriviaalne, see tähendab, et ei ole

võimalik ta samastada otsekorrutisena $S^2 \times \mathbb{R}^2$. Tõepoolest, kui see oleks võimalik, siis leiduks sfääril kaks siledat puutujavektorvälja X, Y nii, et sfääri igas punktis oleksid nende väärtused lineaarselt sõltumatud puutujavektorid. Need vektorid moodustaksid puutujatasandi baasi ja iga puutujavektor oleks samastatav $\mathbb{R}^2$ vektoriga koordinaatide abil. Kuid Poincaré teoreem vektorvälja iseärasastest punktidest on takistuseks selliste vektorväljade olemasolule. Poincaré teoreem väidab

Kui siledal kompaktsel (ilma rajata) muutkonnal on antud sile vektorväli (puutujakihtkonna lõige), siis selle vektorvälja singulaarsete punktide indeksi-te summa on võrdne muutkonna Euleri karakteristikuga.

Nüüd arvestame, et sfääri Euleri karakteristik on 2, järelikult suvalise puutujavektorvälja X korral leidub sfääril selle singulaarne punkt (vastasel juhul Euleri karakteristik oleks 0), see tähendab, punkt, kus puutujavektorvälja X väärtus on nullvektor. Kuid sellises punktis vektorväljade X, Y väärtused ei moodusta puutujatasandi baasi.

Peakihtkonna mõiste on abstraktsem ja vähem visuaalne kui vektorkihtkond. Peakihtkonna mõiste tugineb Lie rühma G toime muutkonnal mõistele. Antud artiklis piisab eeldusest, et Lie rühm on Lie maatriksrühm, see tähendab G on kompleksete $N \times N$ -ruutmaatriksite ruumi alammuutkond ja rühma tehe on maatrikskorrumine. Rühm G toimib paremalt muutkonnal P (paremtoime), kui on määratud sile kujutus

$$R : (p, g) \in P \times G \mapsto R_g(p) = p \cdot g \in P,$$

mis rahuldab

$$p \cdot e = p, \quad (p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 g_2), \quad (11)$$

kus e on rühma ühikelement. Rühm toimib vabalt, kui $p \cdot g = p$ järeldub, et $g = e$. Rühma toime orbiidiks G_p muutkonna punktis p nimetatakse punktihulka $\{q \in P : q = p \cdot g, g \in G\}$. Orbiitide hulka tähistame $M = P/G$. Esiteks oletame, et orbiitide hulgal M saab määrata sileda muutkonna struktuuri ja kujutus $\pi : P \rightarrow M$, mis seab P igale punktile p vastavusse punkti p läbiva orbiidi, on sile kujutus. Teiseks oletame, et suvalise punkti $x \in M$ korral leidub selle lahtine ümbrus U nii, et $\pi^{-1}(U)$ on difeomorfne otsekorrutisega $U \times G$ (lokaalse trivialiseerimise nõue). Siis muutkonda P nimetatakse peakihtkonnaks ja tähistatakse $P(M, G)$. Rühma G nimetatakse selle peakihtkonna struktuurirühmaks ja muutkonda M nimetatakse peakihtkonna baasmuutkonnaks. Peakihtkonna kiht, mis läbib punkti p , on rühma toime orbiit G_p .

Peakihtkonna kõige tuntum näide on järgmine. Olgu M^n sile muutkond, $T_x M^n$ selle puutujaruum punktis x ja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ puutujaruumi $T_x M^n$ baas. Moodustame reeperi $R_x = \{x; e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (alguspunkt+baas). Kõikvõimalikute reeperite punktis x hulka tähistame $\mathfrak{R}_x$ ja moodustame ühendi $\mathfrak{R} = \cup_{x \in M^n} \mathfrak{R}_x$. Maatriksrühma $GL(n)$ toimet hulgal $\mathfrak{R}$ määrame valemiga $R_x \cdot A = R_x' = \{x; e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, kus $A = (A_j^i)$ on n -järku regulaarne ruutmatriks ja

$$e'_i = \sum_j A_j^i e_j.$$

See tähendab, et rühma toime defineerimisel maatriksit A kasutame baasi-teisenduse maatriksina. Saab näidata, et $\mathfrak{R}$ on peakihtkond, rühm $GL(n)$ on struktuurirühm ja M^n on selle peakihtkonna baasmuutkond. Peakihtkonda $\mathfrak{R}$ nimetatakse *reeperkihtkonnaks*. Kui M^n on Riemanni muutkond (igas puutujaruumis on määratud eukleidiline meetrika), siis kihiks $\mathfrak{R}_x$ võib valida ortonormeeritud reeperite hulka. Sellisel juhul peakihtkonna struktuurirühmaks on maatriksrühm $O(n)$ (ortogonaalsete maatriksite rühm). Kui muutkond M^n on orienteeritav, siis kihiks võib valida ühe ja sama orientatsiooniga ortonormeeritud reeperite hulka ja sellisel juhul reeperkihtkonna struktuurirühmaks on $SO(n)$.

Kui on antud peakihtkond $P(M, G)$, siis muutkonnal M , kui baasmuutkonnal, saab konstrueerida vektorkihtkonda E . Sellisel juhul vektorkihtkonda E nimetatakse peakihtkonna $P(M, G)$ *assotsieeritud vektorkihtkonnaks* ja selle konstrueerimine tugineb struktuurirühma G *esitusele* $\rho: G \rightarrow GL(V)$, kus V on vektorruum (esituse ruum) ja $GL(V)$ on selle vektorruumi pööratavate lineaarteisenduste rühm. Assotsieeritud vektorkihtkonna E konstrueerimiseks moodustame otsekorrutise $P \times V$ ja määrame rühma G paremtoimet valemiga $(p, v) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g)^{-1}v)$. Saab näidata, et selle paremtoime orbiidid $P \times V/G$ on vektorkihtkond baasmuutkonnaga M ja kihiga V .

Kihtkondade teooria raames saab sõnastada seostuse mõistele kõige üldisema lähenemise. Selleks vaatleme peakihtkonda $P(M, G)$. Igale Lie rühmale vastab tema Lie algebra ja see on tähtis struktuur selle Lie rühma uurimisel. Lie rühma G Lie algebra $\mathfrak{g}$ on sarnane pinna puutujatasandiga, see tähendab, et see on Lie rühma lineaarne aproksimatsioon, millel rühma tehe indutseerib Lie algebra tehet, mida nimetatakse Lie suluks. Lie algebra element $h \in \mathfrak{g}$ tekitab rühma G üheparameetrilist alamrühma $\exp(th)$ (maatriksrühma korral see on maatriksi h eksponent). Kuna rühm G toimib paremalt peakihtkonnal P üheparameetriline rühm $\exp(th)$ tekitab

peakihtkonna P igas punktis p puutujavektorit H_p järgmiselt

$$H_p = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(th))|_{t=0}.$$

Seega peakihtkonnal P tekib vektorväli H , mida nimetatakse fundamentaalvektorväljaks ja tegelikult see on kihi puutujavektorvälji. *Seostuseks peakihtkonnal* nimetatakse Lie algebra väärtustega ($\mathfrak{g}$ -väärtusega) 1-vormi ω , mis rahuldab kahte tingimust

S1) $\omega(H) = h$ suvalise fundamentaalvektorvälja korral;

S2) $\omega(dR_g X_p) = g^{-1}\omega(X_p)g$, kus X on suvaline vektorväli peakihtkonnal P ja dR_g on paremtoime $R_g : p \rightarrow p \cdot g$ diferentsiaal.

Olgu $p \in P$ peakihtkonna mingi punkt ja $x = \pi(p) \in M$ selle projektsioon baasmuutkonnale. Peakihtkonna definitsiooni lokaalse trivialiseerimise tingimusest järeldub, et peakihtkonna suvalise punkti p korral leidub tema projektsiooni x ümbrus $U \subset M$ ja lokaalne lõige $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ sellised, et $\pi^{-1}(U)$ on difeomorfne otsekorrutisega $U \times G$, kus difeomorfismi määratakse valemiga $p \rightarrow (x, g)$ ning $p = s(x) \cdot g$. Nüüd kasutades lokaalset lõiget s võime seostuse vormi ω "langetada" peakihtkonnalt baasmuutkonnale ja saame lokaalse 1-vormi s^* lahtisel hulgal $U \subset M$. Selle lokaalse vormi võime kirjutada lokaalsetes koordinaatides järgmiselt

$$s^*(\omega) = A_\mu(x) dx^\mu, \quad (12)$$

kus $A_\mu(x)$ on $\mathfrak{g}$ -väärtustega funktsioonid (μ on baasmuutkonna M lokaalsete koordinaatide indeks, see tähendab $\mu = 1, 2, \dots, \dim M$), mida geomeetrias nimetatakse *seostuse koefitsientideks* ja füüsikas *kalibratsioonivälja potentsiaalideks*. Valemis (12) meie kasutame Einsteini kokulepet, see tähendab, et korduva indeksi (üks kord ta on ülaindeks ja teine kord on alaindeks) järgi summeeritakse. Kui lokaalsete lõigete määramispiirkonnad lõikuvad ja ühisosal $s'(x) = s(x) \cdot g(x)$, $g(x) \in G$, siis kasutades seostuse vormi definitsiooni saab näidata, et ühisosal ühed potentsiaalid avalduvad teiste kaudu järgmiselt:

$$A_\mu^g(x) = g^{-1}(x)A_\mu(x)g + g^{-1}(x)\partial_\mu g(x). \quad (13)$$

Valemit (13) nimetatakse kalibratsioonivälja potentsiaalide *kalibratsiooniteisenduseks*. Siinkohal tuleb märkida rabavat fakti, et geomeetrias järeldub teisendus (13) seostuse vormi struktuurist, samas kui füüsikas saadi sama

teisendus täiesti erinevatest kaalutlustest (kalibratsioonivälja mõju funktsionaali invariantisus). Mainime, et kui peakihtkonna struktuurirühm G on $SU(2)$ (2. järku kompleksete unitaarsete determinandiga maatriksite rühm), siis selle rühma Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ on kompleksete anti-Hermite'i jäljega null 2. järku ruutmaatriksite Lie algebra (üle reaalarvude korpuse), see tähendab

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A = -\bar{A}^T, \text{Tr } A = 0\},$$

kus $M_2(\mathbb{C})$ on teist järku kompleksete ruutmaatriksite vektorruum. Algebra on kolmemõõtmeline, kui vaatleme ta vektorruumina üle reaalarvude korpuse. Imaginaarühikuga korrutatud Pauli maatriksid $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$, kus

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

moodustavad Lie algebra baasi (füüsikas neid nimetatakse algebra generaatoriteks). Seega lokaalselt seostuse vormi võime kirjutada kujul

$$s^*(\omega) = A_\mu^\alpha(x) dx^\mu \sigma_\alpha. \quad (14)$$

Seostuse tähtsaks karakteristikuks on selle kõveruse 2-vorm. Kõveruse 2-vorm avaldub järgmiselt

$$F_\omega = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (15)$$

kus $F_{\mu\nu}(x) \in \mathfrak{su}(2)$, $F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x)$, $\wedge$ on vormide väliskorrutis ja

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} + [A_\mu(x), A_\nu(x)],$$

ja viimane liige selles valemis on maatriksite kommutaator. Füüsikas kõveruse 2-vormi F_ω sageli nimetatakse kalibratsioonivälja tugevuseks. Kui kalibratsioonivälja potentsiaalid teisenevad valemi (13) järgi, siis kõveruse 2-vormi kordajad $F_{\mu\nu}(x)$ teisenevad järgmiselt

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F_{\mu\nu}^g(x) = g^{-1}(x) F_{\mu\nu}(x) g(x), \quad (16)$$

kus $g(x) \in SU(2)$.

Siiaaani baasmuutkond M oli lihtsalt lõplikumõõtmeline sile muutkond, kuid Yang-Millsi väljateooria konstrueerimiseks, see tähendab füüsika jaoks, sellest on vähe ja meie peame varustama baasmuutkonda Riemanni meetrikaga g . Riemanni meetrika määrab muutkonna M igas punktis puutujavektorite skalaarkorrutist. Muutkonda, millel on antud Riemanni meetrika,

nimetatakse Riemanni muutkonnaks. Muutkonna lokaalsetes koordinaatides meetrikat kirjutatakse positiivselt määratud ruutvormi kujul

$$g = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x).$$

Kui selles valemis koordinaatide diferentsiaale interpreteerime lõpmata väikese puutujavektori koordinaatidena, siis valem tõepoolest määrab puutujavektori pikkuse ruutu. Maatriksi $g = (g_{\mu\nu})$ pöördmaatriksit tähistame $g^{-1} = (g^{\mu\nu})$.

Seega järgnevas eeldame, et

M1) peakihtkonna $P(M, G)$ baasmuutkond M on Riemanni muutkond meetrikaga g ja $G = \text{SU}(2)$,

M2) baasmuutkond M on kompaktne (sellisel juhul meie ei pea integreerimise pärast muretsema, mis teeks käsitluse keerulisemaks).

Riemanni meetrika teeb muutkonna struktuuri rikkamaks ja võimaldab varustada diferentsiaalvormide ruumi (funktsionaalne ruum) normiga. Kõigepealt kasutades Riemanni meetrikat defineerime $*$ -operatorit, mida nimetatakse ka Hodge'i operaatoriks. Kui θ on k -vorm

$$\theta = \frac{1}{k!} \theta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k},$$

siis $(n - k)$ -vormi $*\theta$ defineeritakse valemiga

$$*\theta = \frac{1}{(n - k)!} (*\theta)_{\mu_{k+1} \mu_{k+2} \dots \mu_n} dx^{\mu_{k+1}} \wedge dx^{\mu_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}, \quad (17)$$

kus

$$(*\theta)_{\mu_{k+1} \mu_{k+2} \dots \mu_n} = \frac{1}{k!} \sqrt{\det g} \theta^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \mu_{k+1} \mu_{k+2} \dots \mu_n},$$

kus

$$\theta^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \dots g^{\mu_k \nu_k} \theta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k},$$

ja $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \mu_{k+1} \mu_{k+2} \dots \mu_n}$ on täielikult kaldsümmeetriline tensor. On ilmne, et valem (17) on rakendatav ka juhul, kui θ on $\mathfrak{su}(2)$ -väärtustega vorm. Kasutades Hodge'i operaatorit defineerime $\mathfrak{su}(2)$ -väärtustega vormide skalaarkorrutise ja normi. Olgu θ, ρ k -vormid. Defineerime funktsioonid $\langle \theta, \rho \rangle$ ja $|\theta|^2$ valemitega

$$\text{Tr}(\theta \wedge *\rho) = \langle \theta, \rho \rangle dV, \quad |\theta|^2 = \langle \theta, \theta \rangle, \quad (18)$$

kus dV on muutkonna M ruumala element

$$dV = \sqrt{\det g} \, dx^1 dx^2 \dots dx^n.$$

Mainime, et üldisemas situatsioonis, kus G on kompaktne poollihne Lie rühm, jälje asemel kasutatakse Killing'i vormi. Mainime veel, et Hodge'i operatooril on järgmine omadus

$$*(*\theta) = \text{sign}(\det g)(-1)^{k(n-k)}\theta. \quad (19)$$

Nüüd defineerime vormide skalaarkorrutist valemiga

$$(\theta, \rho) = \int_M \text{Tr}(\theta \wedge *\rho). \quad (20)$$

Kasutades valemit (20), defineerime k -vormi θ normi valemiga $\|\theta\|^2 = (\theta, \theta)$.

Väljateooria võrrandeid tuletatakse rakendades selle teooria mõju funktsionaalile variatsioonarvutuse meetodeid. Kalibratsiooniväljateooria mõju funktsionaal $\mathbf{S}(A)$

A1) on kalibratsioonivälja potentsiaalide $A = (A_\mu(x))$ funktsionaal,

A2) funktsionaali väärtus on reaalarv,

A3) on invariantne kalibratsiooniteisenduste (13) suhtes.

On lihtne veenduda, et funktsionaal

$$\mathbf{S}(A) = \lambda^{-1} \|F_\omega\|^2 = \lambda^{-1} \int_M \text{Tr}(F_\omega \wedge *F_\omega) = \lambda^{-1} \int_M \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) dV, \quad (21)$$

kus λ on teooria füüsikaliste parameetritega määratud konstant, rahuldab ülalpool loetletuid tingimusi. Funktsionaali $\mathbf{S}(A)$ nimetatakse Yang-Millsi teooria mõju funktsiooniks. Rakendades variatsioonarvutust ja vähima mõju printsiipi $\delta\mathbf{S}(A) = 0$, leiame Euler-Lagrange'i võrrandi

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad (22)$$

kus operaatorit $\nabla_\tau F_{\mu\nu} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} + [A_\tau, F_{\mu\nu}]$ nimetatakse kovariantseks tuletiseks. Võrrandit (22) nimetatakse Yang-Millsi võrrandiks. Yang-Millsi võrrandi võime kirjutada Hodge'i operaatori abil järgmiselt

$$D^* F_\omega = 0, \quad (23)$$

kus $D^* = - * D *$ on kovariantse diferentsiaali $D = d + [\omega, \cdot]$ kaasoperaator. Kõveruse 2-vorm rahuldab Bianchi samasust $DF_\omega = 0$. Siit kohe järeldub, et kui kõveruse vorm rahuldab tingimust $*F_\omega = \pm F_\omega$, siis ta on Yang-Millsi võrrandi lahend. Tõepoolest kehtib

$$D^*F_\omega = - * D(*F_\omega) = - * D(\pm F_\omega) = \mp * DF_\omega = 0.$$

Kui kõveruse vorm rahuldab tingimust $*F_\omega = F_\omega$ ($*F_\omega = -F_\omega$), siis vastavat seostust nimetatakse eneseduaalseks (anti-eneseduaalseks) seostuseks. Füüsikas Yang-Millsi võrrandi selliseid lahendeid nimetatakse instantonideks. Saab näidata, et instantonid on Yang-Millsi mõju funktsionaali absoluutsed miinimumid.

Milles seisneb kalibratsiooniväljateooriate omapärasus? Kalibratsiooniväljateooriate omapärasus tekib seoses teooria invariantisusega kalibratsiooniteisenduste suhtes (vt A3). Kui toimub kalibratsiooniteisendus (13,16), siis kalibratsioonivälja potentsiaalid $A \rightarrow A^g$ ja tugevus $F \rightarrow F^g$, kus g on kalibratsiooniteisenduste rühma element, muutuvad, kuid mõju funktsionaali invariantisuse tõttu sellel pole teooria jaoks füüsilisi tagajärgi. Teisisõnu, katselisi mõõtmisi tegev vaatleja ei märka seda muutust kuidagi. Järelikult kalibratsioonivälja on määratud kalibratsiooniteisenduse täpsusega ehk kalibratsiooniväljad A ja A^g on samaväärsed. Matemaatiliselt see tähendab, et meie peame uurima mitte kõikvõimalikute (siledade) peakihtkonna $P(M, G)$ seostuste ruumi $\mathcal{A}$, vaid faktorruumi $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}/\mathcal{G}$, kus $\mathcal{G}$ on kalibratsiooniteisenduste rühm, mis toimib seostuste ruumis kalibratsiooniteisenduste abil

$$\omega \in \mathcal{A} \rightarrow g \cdot \omega = g^{-1}\omega g + g^{-1}dg \in \mathcal{A}, \quad g \in \mathcal{G}.$$

Mainime, et kõikvõimalikud siledad seostused $\mathcal{A}$ moodustavad afinse ruumi ja kalibratsiooniteisenduste rühma saab defineerida globaalselt, sellisel juhul $\mathcal{G}$ on peakihtkonna $P(M, G)$ kõikvõimalikud siledad automorfismid (rühma tehe on automorfismide kompositsioon). Lokaalselt kalibratsiooniteisenduste rühma element g (peakihtkonna automorfism) määrab kujutust $g : x \in U \subset M \rightarrow g(x) \in G$. Juhime tähelepanu sellele, et $\mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ on funktsionaalsed (lõpmatumõõtmelised) ruumid, millidel saab määrata Banachi muutkonna struktuuri (kasutades valemiga (20) defineeritud normi), kusjuures $\mathcal{A}$ on peakihtkond, mille baasmuutkonnaks on kalibratsiooniekvivalentsete seostuste Banachi muutkond $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ ja struktuurirühmaks on kalibratsiooniteisenduste rühm $\mathcal{G}$.

Kalibratsiooniekvivalentsete instantonide ruumi tähistame $\mathcal{M}$. Seega $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}_0$. Ruumi $\mathcal{M}$ nimetatakse instantonide moodulite ruumiks (moduli

space of instantons). Hämmostav on see, et kui peakihtkond $P(M, G)$ rahudlab teatuid topoloogilisi tingimusi, siis instantonide moodulite ruum $\mathcal{M}$ on mittetühi ja temal saab määrata lõplikumõõtmeline sile muutkonna struktuuri, mille dimensiooni saab leida peakihtkonna topoloogiliste invariantide (Euler'i karakteristik ja Chern'i arvud) abil. S. Donaldsoni sügavad ja võimsad tulemused 4-mõõtmeliste siledade muutkondade klassifitseerimisel olid saadud kalibratsiooniekvivalentsete instantonide ruumi uurimisel.

Seostuse vormi ω poolt tekitatud kalibratsiooniekvivalentsete seostuste klassi tähistame $[\omega]$. Siis $[\omega] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$ ja $[\omega] = \{g \cdot \omega : g \in \mathcal{G}\}$. Kujutus $\varpi : \omega \in \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$, kus $\varpi(\omega) = [\omega]$ on peakihtkonna $\mathcal{A}$ projektsioon. Yang-Millsi väljateooriaga seotud arvutustes, näiteks kvantiseerimisel Feynmanni integraali abil, on raske kasutada ekvivalentsiklassi $[\omega]$ ja füüsikud eelistavad kasutada selle klassi esindajat. See tähendab, et meil peab olema leitud või konstrueeritud kujutus, mis seab igale klassile $[\omega]$ üheselt määratud seostuse sellest ekvivalentsiklassist. Vastavat kujutust $\mathfrak{s} : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$, mis peab rahuldama $\varpi \circ \mathfrak{s} = \text{id}$, on loomulik vaadelda peakihtkonna $\mathcal{A}$ lõigena. Yang-Millsi väljateoorias kujutust $\mathfrak{s}$ nimetatakse kalibratsioonitingimuseks. Kõige kasutatavad kalibratsioonitingimused on järgmised:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} &= 0, \quad (\text{Lorentzi kalibratsioonitingimus}), \\ \frac{\partial A_k}{\partial x^k} &= 0, \quad (\text{Coulomb'i kalibratsioonitingimus}), \\ A_0 &= 0, \quad (\text{Hamiltoni kalibratsioonitingimus}). \end{aligned}$$

Artiklis [5] Karen Uhlenbeck uurib Coulomb'i kalibratsioonitingimust juhul, kui $P(M, G)$ on peakihtkond, kus $M = B^n$ on n -mõõtmeline kera, $G \subset \text{SO}(l)$ on kompaktne Lie rühm. Kõigepealt defineerime seostuste Sobolevi ruumi $\mathcal{A}_1^p$. Selleks kasutame seostuste ruumi $\mathcal{A}$ afiinse ruumi struktuuri. Fikseerime ühe seostuse $\omega_0 \in \mathcal{A}$. Siis suvaline seostus ω on esitatav kujul $\omega = \omega_0 + \eta$, kus η on $\mathfrak{g}$ -väärtustega 1-vorm ($\mathfrak{g}$ on Lie rühma G Lie algebra), mis teiseneb nii, nagu kõveruse 2-vorm (16). Seega η on $\text{Ad } P$ -väärtustega 1-vorm ($\text{Ad } P = P \times \mathfrak{g}/\text{Ad } G$ on assotsieeritud vektorkihtkond, mille kiht on $\mathfrak{g}$ ja rühma G esituseks kasutame tema adjungeeritud esitust) ja võime rakendada ülalpool defineeritud normi $|\eta| = \langle \eta, \eta \rangle$. Nüüd Sobolevi ruumi $\mathcal{A}_1^p$ normi defineeritakse valemiga

$$\|\omega\|_{\mathcal{A}_1^p} = \|\eta\|_{\mathcal{A}_1^p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_M |D^\alpha \eta|^p dV \right)^{1/p}.$$

Karen Uhlenbecki põhitulemus, mis on tõestatud artiklis [5], võime sõnastada järgmiselt. Olgu $n/2 \leq p \leq n$. Leiduvad konstantsed arvud $k = k(n) >$

$0, c = c(n)$ sellised, et iga seostus $\omega \in \mathcal{A}_1^p$ on kalibratsiooniekvivalentne seostusega $d + \eta$ (kovariantne diferentsiaal assotsieeritud kihtkonnas), kus η rahuldab Coulomb'i kalibratsioonitingimust, η on risti kera kohavektoriga sfääri $S^{n-1} = \partial B^n$ igas punktis ja

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{n/2,1} &\leq c(n) \left(\int_{B^n} |F_\omega|^{n/2} dV \right)^{2/n}, \\ \|\omega\|_{p,1} &\leq c(n) \left(\int_{B^n} |F_\omega|^{p/2} dV \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Artiklis [6] Karen Uhlenbeck uurib lõpliku energiaga Yang-Millsi võrrandi lahendeid. Lõpliku energiaga tähendab, et Yang-Millsi võrrandi lahend F_ω rahuldab tingimust $\|F_\omega\| < \infty$. Karen Uhlenbeck tõestab, et lõpliku energiaga Yang-Millsi võrrandi lahendi singulaarsused saab eemaldada kalibratsiooniteisendusega, kui kalibratsioonirühm G on kompaktne. Seega, kui F_ω on Yang-Millsi võrrandi lahend neljamõõtmelisel "läbitorgatud" keral $M = B^4 \setminus 0$, mis rahuldab $\|F_\omega\| < \infty$ (integreeruva ruuduga kõveruse 2-vorm), siis lahendit F_ω saab siledalt laiendada kogu kerale valides kihtkonna lokaalset struktuuri. Antud tulemuse tähtsus seisneb selles, et temas järeldub, et kui (lõpliku energiaga) Yang-Millsi võrrandi lahend F_ω on määratud neljamõõtmelisel ruumil $\mathbb{R}^4$, siis vastavat seostust ω saab laiendada selle ruumi konformsele kompaktifikatsioonile S^4 , kus S^4 on neljamõõtmeline ühiksfäär. Tulemuse tõestus tugineb Coulomb'i kalibratsioonitingimuse konstrueerimisele lõpliku energiaga lahendite juhul.

Teadustegevust Yang-Millsi võrrandi lahendite uurimisel eelmise sajandi 80-ndate aastate lõpul suuresti stimuleeris probleem, kas Yang-Millsi võrrandil on selliseid lahendeid, mis pole eneseduaalsed (või anti-eneseduaalsed), kui baasmuutkonnaks on ühiksfäär S^4 ? Vastus oli antud artiklis [7], kus L. M. Sibner, R. J. Sibner ja K. Uhlenbeck andsid vastuse ülalpool esitatud küsimusele, kasutades variatsioonarvutuse meetodeid. Hämmastav on antud juhul see, et vastus oli positiivne ja see on teatud mõttes üllatav, sest eelnevad uurimised pigem viisid mõttele, et sellised lahendid ei eksisteeri. L. M. Sibner, R. J. Sibner ja K. Uhlenbeck vaatlesid neljamõõtmelist sfääri S^4 , millel toimib S^1 , S^1 -ekvivariantset peakihtkonda P (baasmuutkond on sfäär S^4) ja S^1 -invariantseid seostuseid peakihtkonnal P . S^1 toime püsipunktid sfääril S^4 moodustavad kahemõõtmelise sfääri S^2 . Variatsioonarvutuse meetodite rakendamisel tekkib probleem nii nimetatud "mullitavate punktidega (bubbling points)", aga S^1 -invariantsuse tõttu kõik sellised punktid asuvad kahemõõtmelisel sfääril S^2 ja dimensionaalne redutseerimine võimaldab probleemi taandada nii nimetatud "monopolidele" (magnetlaeng) kolmemõõtmelisel ruumil.

Kui seostus ruumis $\mathbb{R}^4$ on invariantne fikseeritud suunas paralleellükete suhtes, siis seostus on esitatav kujul (ω, ϕ) , kus ω on seostus kalemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$ ja ϕ on assotsieeritud vektorkihtkonna $\text{ad } P$ (kiht on Lie algebra $\mathfrak{g}$ ja esitus on Lie algebra adjungeeritud esitus) lõige, mida nimetatakse Higgs'i väljaks. Yang-Millsi funktsioonali kuju sellise seostuse korral on järgmine

$$\mathbf{S}(\omega, \phi) = \int_{\mathbb{R}^3} (|F_\omega|^2 + |\nabla_\omega \phi|^2).$$

Lisaks nõutakse, et oleks täidetud asümptootiline tingimus, see tähendab, et funktsiooni $|\phi|$ piirväärtus, kui ruumi punkt läheb lõpmatusse, oleks 1. C. Taubes [8] töötas välja võimsat variatsiooniteooriat selliste seostuste jaoks ja näitas, et eksisteerivad funktsionaali $\mathbf{S}(\omega, \phi)$ kriitilised punktid, mis ei ole miinimumpunktid. Need kriitilised punktid tekitavad seostuseid neljamõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^4$, kuid nende seostuste energia ei ole lõplik, see tähendab kõveruse normi ruudu integraal üle kogu ruumi $\mathbb{R}^4$ ei koonu. Kuid osutus, et C. Taubes'i meetodit saab rakendada ka siis, kui on määratud S^1 toime. Sellisel juhul S^1 toime faktorrüümi $S^4 \setminus S^2$ saab samastada kolmemõõtmelise hüperboolse ruumiga H^3 ja S^1 -invariantsed seostused vastavad paaridele (ω, ϕ) hüperboolses ruumis H^3 . Teoorias esineb tähtis parameeter L . Ühelt poolt see on S^1 toime peakihtkonna P kihtidel kaal ja teiselt poolt hüperboolse ruumi kõverust K saab avaldada selle parameetri kaudu järgmiselt $K = -L^{-2}$. L. M. Sibneri, R. J. Sibneri ja K. Uhlenbecki idee seisnes selles, et teha parameetri L väga suureks. Sellisel juhul hüperboolse ruumi H^3 kõverus K muutub väga väikeseks ja hüperboolne ruum hakkab lähenema tasasele ruumile $\mathbb{R}^3$. Siis nad näitasid, et C. Taubes'i meetod, mis töötab ruumis $\mathbb{R}^3$, saab rakendada ka sellises situatsioonis ja sellega nad leidsid Yang-Millsi võrrandi lahendid neljamõõtmelisel sfääril, kusjuures need lahendid ei ole Yang-Millsi funktsionaali miinimumpunktid.

Kirjandus

1. S. Donaldson, *The geometry of 4-manifolds*, In AM Gleason (ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkley 1986), vol. 1, 43–54.
2. L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction To Quantum Theory*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1980.
3. D. S. Freed and Karen K. Uhlenbeck, *Instantons and Four-Manifolds*, Springer-Verlag, 1984.

4. J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. Math. **64** (1956), 399–405.
5. K. Uhlenbeck, *Connections with L^p Bounds on Curvature*, Commun. Math. Phys. **83** (1982), 31 – 42.
6. K. Uhlenbeck, *Removable singularities in Yang-Mills fields*, Commun. Math. Phys. **83** (1982), 11 – 29.
7. L.M. Sibner, R.J. Sibner, K. Uhlenbeck, *Solutions to Yang-Mills equations that are not self-dual*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), no. 22, 8610–8613.
8. C. Taubes, *The existence of a nonminimal solution to the $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs equations on $\mathbb{R}^3$* , Comm. Math. Phys. **86** (1982), 257 – 298.
9. C.N. Yang and R. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Physical Review **96** (1954), 191–195.