

Aritmeetika II

HTOS.02.491

Loengukonspekt

Koostajad: Anu Palu
Evelyn Leetma

Tartu 2008

Sisukord

1	Naturaalarvude hulga laiendamine murdarvudega	3
2	Tehted harilike murdudega	9
3	Negatiivsed arvud	15
4	Reaalarvud	18
5	Arvutamine ligikaudsete arvudega	22
6	Osa leidmine arvust. Arvu leidmine tema antud osa ja osamäära järgi	28
7	Protsentiarvutus	32
8	Rahandusküsimusi koolimatemaatikas	41
8.1	Kauba hinna kujunemine	41
8.2	Palgad	43
8.3	Laen ja intress	43
8.4	Laenu kustutamine	46

kvartalis tehtav konstantne tagasimakse

$$y = \frac{12\,000 \cdot 0,015 \cdot 1,015^8}{(1,015^8 - 1)} = 1603,01 \text{ (kr)}$$

Laenukustutustabel oleks järgmine:

Võlg	Intress	Kustutus	Kokku
12 000,00	180,00	1423,01	1603,01
10 576,99	158,65	1444,36	1603,01
9132,63	136,99	1466,02	1603,01
7666,61	115,00	1488,01	1603,01
6178,60	92,68	1510,33	1603,01
4668,27	70,02	1532,99	1603,01
3135,29	47,03	1555,98	1603,01
1579,31	23,69	1579,31	1603,00
Kokku:	824,07	12 000,00	12824,07

Ülesanded

- Koosta laenu kustutustabel, kui on antud laenu suurus, lihtintressimäär aastas, tagasimakse sagedus ja laenu tähtaeg.

12 000 kr	6%	1 a	5 a
4500 kr	8%	6 k	2 a
5000 kr	10%	3 k	18 k
1000 kr	4%	4 k	1 a
- Õppelaenu suurusega 125 000 krooni tasutakse 10 aasta vältel iga 3 kuu tagant lihtintressimääraga 5% aastas. Kui suur on 5. tagasimakse, viimane tagasimakse?
- Teodor Taluste ostis traktori, mille hind on 18 000 kr. Sellest hinnast maksis ta ära 10 000 kr, kuid ülejäänud summa jäi võlgu. Sellist võlgu ostmist nimetatakse *järelmaksuga ostmiseks*, kusjuures võlga tuleb vaadata kui laenu, mille müüja annab ostjale. Teodor kohustus võla tasuma 4 aasta vältel võrdsetes osades iga 6 kuu tagant lihtintressimääraga 8% aastas. Arvuta,
 - kui suur on igas tagasimakses olev kustutussumma;
 - kui suur on 5. tagasimakses olev intress;
 - mitu krooni ja mitu protsenti on järelmaksuga ostetud traktor kallim kohe kinni makstud traktorist.
- Kasutades mõnda tabelarvutusprogrammi koosta laenu kustutustabel 125 000 krooni suuruse õppelaenu tagastamiseks 10 aasta jooksul intressimääraga 5% aastas nii fikseeritud põhiosaga graafiku kui annuiteetgraafiku korral. Makseid teostatakse kord kolme kuu tagant. Kui suur on intresside erinevus põhiosaga graafiku ja annuiteetgraafiku korral? Kes ja kui palju võidaks, kui maksed toimuksid iga kuu?

protsentides laenukapitali summast teatava ajavahemiku kohta. Üldreeglina on selleks ajavahemikuks ehk intressi arvestamise perioodiks üks aasta. Intressi suurust määrav protsent kannab **intressimäära** nimetust. Kui kapital on teatava intressimääraga välja laenatud, siis öeldakse, et kapital kannab intresse.

Kui iga-aastase või muu perioodi intressi arvutamise aluseks on üks ja seesama summa, siis see kapital kannab **lihtintresse**. Kui aga aluseks võetakse kapital koos eelmise perioodi intressiga, siis kapital kannab **liitintresse**. Sel puhul intress ise kannab ka intressi.

Näide. Rahasumma 10 000 krooni laenatakse välja 3 aastaks lihtintressimääraga 5% aastas. Leiame, kui suure summa saab võlausaldaja intressidena, kui võlg tagastatakse tervikuna tähtaja lõpul.

Ühe aasta intress on $0,05 \cdot 10\,000 = 500$ krooni. Igal järgneval aastal on intressi aluseks seesama 10 000 krooni. Kolme aasta intress on $3 \cdot 500 = 1500$ krooni. Kokku saav võlausaldaja tagasi $10\,000 + 1500 = 11\,500$ krooni.

Üldiselt, kui laenusumma on k krooni (algkapital), intressimäär $p\%$ ja tähtaeg t aastat, siis tagastatav summa (lõppkapital) on lihtintresside korral

$$K = k + \overbrace{\frac{kp}{100} + \frac{kp}{100} + \cdots + \frac{kp}{100}}^{t \text{ liidetavat}} = k + \frac{kpt}{100}.$$

ehk

$$K = k \left(1 + \frac{pt}{100} \right). \quad (8.1)$$

Kui intressi arvutatakse lisaks kapitalile ka eelmisel perioodil teenitud intresside pealt, on tegemist liitintressiga. Olgu laenusumma k krooni, intressimäär $p\%$ ja tähtaeg t aastat. Pärast ühe aasta möödumist kasvab kapital summani $k \left(1 + \frac{p}{100} \right)$. Kahe aasta möödumisel on algkapital kasvanud summani

$$k \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right) = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

Pärast t aasta möödumist on lõppkapital

$$K = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t. \quad (8.2)$$

Näide. Kui hoiustatud algkapital on 10 000 krooni, intressimäär 5% ja hoiustamisaeg 6 aastat, siis liitintressi kandes on lõppkapital

$$K = 10\,000 \left(1 + \frac{5}{100} \right)^6 = 10\,000 \cdot 1,05^6 = 13\,400,95 \text{ (kr)}.$$

Lihtintresse kandes oleks samadel andmetel lõppkapital

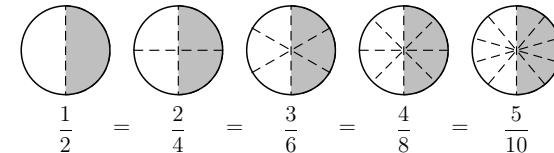
$$K = 10\,000 \left(1 + \frac{5 \cdot 6}{100} \right) = 10\,000 \cdot 1,3 = 13\,000 \text{ (kr)}.$$

Hariliku murru põhiomadus.

Kahte harilikku murdu $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ nimetatakse võrdseiks, kui $ad = bc$. Siit tuleneb hariliku murru põhiomadus: murru väärtus ei muutu, kui murru lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga, st.

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}, \text{ kui } k \neq 0.$$

Näide.



Murru lugeja ja nimetaja korrutamist ühe ja sama nullist erineva arvuga nimetatakse **murru laiendamiseks**. Arvu, millega lugejat ja nimetajat korrutatakse, nimetatakse laiendajaks. Murdude laiendamist kasutatakse murdude ühenimeliseks teisendamisel, st. ühise nimetaja leidmisel. Antud murdude ühiseks nimetajaks võetakse tavaliselt nende nimetajate vähim ühiskordne.

Ülesanne. Teisenda murrud $\frac{7}{24}$, $\frac{9}{40}$ ja $\frac{5}{36}$ ühenimelisteks.

Murru lugeja ja nimetaja jagamist ühe ja sama nullist erineva arvuga nimetatakse **murru taandamiseks**. Kasulik on taandada lugeja ja nimetaja nende suurima ühisteguriga.

Ülesanne. Taanda murrud $\frac{12}{20}$ ja $\frac{420}{1800}$.

Murdu, mille lugeja ja nimetaja on ühistegurita arvud, nimetatakse **taandumatuks murruks**. Kui aga murru lugejal ja nimetajal leidub ühiseid tegureid, kõneldakse **taanduvast murrust**.

Harilike murdude võrdlemine.

1. Ühenimelistest murdudest on suurem see, mille lugeja on suurem.

$$\frac{3}{5} \dots \frac{2}{5}, \text{ sest}$$

2. Võrdsete lugejatega erinimelistest murdudest on suurem see, mille nimetaja on väiksem.

$$\frac{2}{3} \dots \frac{2}{4}, \text{ sest}$$

3. Mittevõrdsete lugejatega erinimelistest murdude võrdlemiseks tuleb murrud teisendada kas ühenimelisteks või siis võrdsete lugejatega murdudeks ning kasutada vastavat tunnust.

$$\frac{6}{7} \dots \frac{2}{3}, \text{ sest}$$

$$\frac{2}{3} \dots \frac{5}{9}, \text{ sest}$$

4. Selleks, et võrrelda murde $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$, leiame korrutised ad ja bc . Kui

1) $ad > bc$, siis $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$,

2) $ad < bc$, siis $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$,

3) $ad = bc$, siis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$$\frac{7}{11} \dots \frac{5}{8}, \text{ sest}$$

5. Selleks, et võrrelda murde $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$, võime need murrud jagada. Kui

1) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} > 1$, siis $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$,

2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} < 1$, siis $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$,

3) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = 1$, siis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$$\frac{9}{13} \dots \frac{3}{4}, \text{ sest}$$

Harilikud murrud, nende vastand arvud (negatiivsed murdarvud) ja arv 0 kokku moodustavad ratsionaalarvude hulga $\mathbb{Q}$. Seega iga ratsionaalarv on esitatav mingi kahe täisarvu a ja $b \neq 0$ jagatisena $\frac{a}{b}$. Teiselt poolt, iga ratsionaalarv on esitatav lõpliku või lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

8.2. Palgad

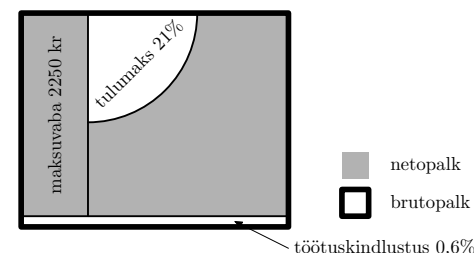
Kui inimene teeb tööd ja saab selle eest palka, siis ta müüb oma tööjõudu kui kaupa. **Brutopalk** on palk, mida töötajale arvestatakse vastavalt tehtud töö hulgale ja kvaliteedile. Brutopalgast arvestatakse kindla eeskirja järgi maha tulumaks. Järele jääb töötajale faktiliselt väljamakstav **netopalk**.

2008. a. tegutsetakse Eestis järgmisel viisil. Üksikisiku brutopalgast arvatakse maha 0,6% töötuskindlustuse tasu. Kohustusliku kogumispensioniga liitunud arvutatakse brutopalgast maha ka 2% pensionifondi sissemaks.

Ülejäänud tasust arvutatakse kuu tulumaks alljärgnevalt:

- 1) maksustamisele kuuluvast summast arvatakse maha maksuvaba summana 2250 kr,
- 2) ülejäänud summast võetakse tulumaks 21%.

Sellest järelejäänud raha koos maksuvaba 2250 krooniga moodustab netopalka.



Ülesanded

1. Arvuta isiku tulumaks, kui ta brutopalk on a) 4600 kr, b) 8370 kr, c) 10750 kr.
2. Arvuta netopalk, kui brutopalk on a) 27200 kr, b) 1500 kr, c) 4850 kr.
3. Arvuta töötaja brutopalk, kui netopalk on a) 7110 kr, b) 3800 kr, c) 44850 kr.
4. Leia töötaja bruto- ja netopalk, kui tulumaks on a) 500 kr, b) 850 kr, c) 2000 kr.

8.3. Laen ja intress

Laen ehk **krediit** on võlg võetud raha või muu vara, mille laenu saaja (võlgnik) peab kokkulepitud tingimustel ja tähtajal laenu andjale (võlausaldajale) tagastama.

Intress ehk kasvik on tasu (hüvitis) laenatud raha või muu vara (kapitali) kasutamise eest. Võlgnik peab laenu tagastamisel maksma võlausaldajale hüvitusena teatava summa, mis ongi laenu intress ehk kasvik.

Kui üksikisik (hoiustaja) annab oma raha panka, siis hoiustaja on sisuliselt võlausaldaja ja pank on võlgnik. Pank maksab hoiustajale intresse. Intressi suurus väljendatakse

6. klassi ülesanded (Avita 2002)

337. Kooli matemaatikaolümpiaadil osales 120 õpilast. Nendest 20% pääses edasi linnaolümpiaadile ning seal osalenutest 12,5% tuli auhinnalistele kohtadele. Mitut selle kooli õpilast autasustati linnaolümpiaadil?
340. 4320 krooni maksnud televiisori hinda alandati 10% võrra ning mõne nädala möödudes veel 10% võrra. Arvuta televiisori lõpphind.
355. Pärast hinnaalandust maksis keedukann 255 kr., mis on 85% esialgsest hinnast. Kui palju maksis keedukann enne hinnaalandust?
356. Katlakivi eemaldaja hinda alandati 25% võrra ja nüüd maksab see 21,30 kr. Kui palju maksis katlakivi eemaldaja enne hinnaalandust?
359. Leila kulutas 50% oma rahast viltpliatsite ostmiseks ja ülejäänud rahast veel $\frac{3}{5}$ märkmiku ostmiseks. Pärast oste oli tal alles veel 12 krooni. Kui palju raha oli Leilal poodi minnes?
360. Esimesel päeval anti laost välja 25% seal olnud kartulitest, teisel päeval 30% ülejäägist. Kui palju oli algul laos kartuleid, kui esimesel päeval anti 2 ts kartuleid rohkem kui teisel päeval?
387. Tädi Maali viis turule mune: ühes kastis oli 40 muna, teises kastis 60 muna. Esimeses kastis oli purunenud 2 muna, teises 8 muna.
1) Mitu protsenti munadest oli purunenud esimeses kastis?
2) Mitu protsenti munadest oli purunenud teises kastis?
3) Mitu protsenti kõikidest munadest oli purunenud?
389. Seente marineerimisel lisati 500 g veele 18 g äädikhapet. Mitmeprotsendiline segu saadi?
397. Pesumasina alghind oli 4295 kr. ja hind pärast hinnaalandust 3999 kr. Arvuta
1) Mitme protsendi võrra oli esialgne hind kõrgem uuest hinnast?
2) Mitme protsendi võrra oli uus hind madalam esialgsest hinnast?
3) Mitu protsenti moodustab esialgne hind uuest hinnast?
4) Mitu protsenti moodustab uus hind esialgsest hinnast?
416. 1996. a andmetel oli maailmas olulisimaks puuviljaks tõusnud apelsin, mille maailmatoodang oli 59,6 miljonit tonni. Banaanide maailmatoodang oli 55,8 miljonit tonni ja õunte maailmatoodang 53,7 miljonit tonni. Teada on ka, et tsitrusviljade toodang ületas õunte toodangu ligikaudu 1,7 korda.
1) Mitme protsendi võrra ületas apelsinitoodang õunatoodangut?
2) Mitme protsendi võrra ületas banaanitoodang õunatoodangut?
3) Kui palju toodeti 1996. a tsitrusvilju?
422. Ühes liitris vees lahustatakse 40 g soola. Mitmeprotsendiline soolalahus tekib?
423. Mitu grammi puhast äädikhapet sisaldab 0,3-liitrine pudel 30%-list söögiäädikat? (Ühe liitri äädika mass on ligikaudu 1 kg.)
424. Mitu grammi soola on vaja vees lahustada, et saada 2 liitrit 3%-list soolalahust?

Tehed harilike murdudega

Harilike murdude liitmine.

Ühenimeliste murdude liitmisel liidetakse nende murdude lugejad, nimetaja jääb endiseks.

$$\frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4+1}{7} = \frac{5}{7}$$

Erinimeliste murdude liitmiseks

- 1) teisendame murrud ühenimelisteks;
- 2) liidame murdude lugejad, nimetaja jääb endiseks.

$$\frac{3^3}{8} + \frac{2^8}{3} = \frac{9}{24} + \frac{16}{24} = \frac{9+16}{24} = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}$$

$$\frac{13^3}{20} + \frac{5^5}{12} = \frac{39}{60} + \frac{25}{60} = \frac{39+25}{60} = \frac{64}{60} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$$

Segaarvude liitmiseks

- 1) liidame täisosad;
- 2) liidame murdosad;
- 3) täisosade summale liidame murdosade summa.

$$3\frac{1}{8} + 5\frac{5}{8} = (3+5) + \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{8}\right) = 8 + \frac{1+5}{8} = 8\frac{6}{8} = 8\frac{3}{4}$$

$$3\frac{3}{4} + 2\frac{5}{6} = (3+2) + \left(\frac{9}{12} + \frac{10}{12}\right) = 5 + \frac{9+10}{12} = 5\frac{19}{12} = 6\frac{7}{12}$$

Võimaluse korral tuleb tehte tulemus taandada, liigmurru puhul tuleks eraldada selle täisosa.

Harilike murdude lahutamine.

Ühenimeliste murdude lahutamisel lahutatakse nende murdude lugejad, nimetaja jääb endiseks.

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4-1}{7} = \frac{3}{7}$$

Erinimeliste murdude lahutamiseks

1) teisendame murrud ühenimelisteks;

2) lahutame murdude lugejad, nimetaja jääb endiseks.

$$\frac{1^4}{3} - \frac{1^3}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3^3}{10} - \frac{1^5}{6} = \frac{9}{30} - \frac{5}{30} = \frac{9-5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

Täisarvust murru lahutamiseks tuleb

1) täisosast eraldada üks üheline ja teisendada see murruks,

mille nimetaja on võrdne vähendaja nimetajaga;

2) täisosa jätta muutmata, murdosast lahutada murdosa.

$$3 - \frac{1}{6} = 2 + 1 - \frac{1}{6} = 2 + \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = 2 + \frac{6-1}{6} = 2\frac{5}{6}$$

Segaarvust segaarvu lahutamine.

$$5\frac{3}{4} - 3\frac{1}{3} = (5-3) + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = 2 + \frac{9-4}{12} = 2\frac{5}{12}$$

$$8\frac{1}{5} - 3\frac{7}{10} = (8-3) + \left(\frac{2}{10} - \frac{7}{10}\right) = 5 + \frac{2-7}{10} =$$
$$\left[= 4 + 1 + \frac{2-7}{10} = 4 + \frac{10}{10} + \frac{2-7}{10} = 4 + \frac{10+2-7}{10} = \right]$$
$$= 4 + \frac{12-7}{10} = 4\frac{5}{10} = 4\frac{1}{2}$$

Hariliku murru korrutamine naturaalarvuga.

Hariliku murru korrutamisel naturaalarvuga korrutame selle arvuga murru lugejat, murru nimetaja aga jääb endiseks. Võimaluse korral taandame ja esitame tulemuse segaarvuna.

$$20 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 20 \cdot 5}{8_2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$$

Segaarvu korrutamiseks naturaalarvuga võime toimida kahel viisil:

1. Teisendame segaarvu liigmurruks ja seejärel korrutame seda naturaalarvuga.

$$2 \cdot 3\frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{13}{4} = \frac{2 \cdot 13}{4_2} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$$

236. Raamatu kaanehind oli 40 kr. Raamat pandi müügile 15% võrra kõrgema kaanehinna, kuid mõne aja möödudes tuli seda hinda alandada 20% võrra. Milline on nüüd raamatu hind ja mitme protsendi võrra on see madalam kaanehinna?

237. Palgast kulus toidule 30%, korteriüüriks ja kommunaalteenustele 16% ning riiete 20%. Kui palju jäi raha üle, kui korterile ja kommunaalteenustele kulus 80 kr. vähem kui riiete?

238. Esimesel päeval müüdi 20% kangast ja teisel päeval 32% samast kangast. Mitme protsendi võrra oli teise päeva müük suurem esimese päeva müügist ja kui palju kangast jäi kolmandaks päevaks, kui teisel päeval müüdi 7,2 m kangast rohkem kui esimesel päeval?

239. Laost anti esimesel päeval 15% kartulitest ja teisel päeval 20% ülejäägist. Kui palju kartuleid oli algul laos, kui teisel päeval anti kartuleid 6 tonni võrra rohkem välja kui esimesel päeval? Kui palju kartuleid jäi kolmandaks päevaks?

240. Töölisel kulub 75% kuupalgast ja ülejäänud raha koguneb säästudena. Mitme protsendi võrra vähenevad säästud, kui kulutused suurenevad 12% võrra?

241. Maret kavatses oma taskurahast 80% kulutada maiustustele ja ülejäänud eest osta raamatuid. Ta otsustas maiustustele kuluvat summat vähendada 60% võrra. Mitme protsendi võrra võiks ta sel juhul suurendada raamatute ostmiseks ettenähtud summat?

242. Tööline vähendas ülesande täitmiseks kuluvat aega 8 tunnilt 6 tunnile. Mitme protsendi võrra vähenes tal ülesande täitmiseks kuluv aeg ja mitme protsendi võrra tõusis tööviljakus?

243. Esimesel matkapäeval läbiti 25% kogu teest ja teisel päeval 40% ülejäänud osast. Mitu protsenti teest jäi veel käia ja mitme protsendi võrra läbiti teisel päeval rohkem kui esimesel?

244. Esimesel päeval müüdi 20% kangast ja teisel päeval 30% võrra rohkem kui esimesel päeval. Kui palju oli kokku kangast, kui üle jäi 8 meetri võrra rohkem kui oli müüdud kahel esimesel päeval kokku?

245. Tooraine hind tõusis 16% võrra. Mitme protsendi võrra peab tehas toorainet kokku hoidma, et ta kulutused toorainele ei suureneks ja et ta saaks anda sama palju toodangut kui varem?

Kahe arvu a ja b jagatise korral on kolm võimalust:

1. Kui $a : b > 1$, siis $a > b$.

Näiteks $12 : 5 = 2,4 > 1$.

Jagatis 2,4 näitab, mitu korda on 12 suurem kui 5.

2. Kui $a : b = 1$, siis $a = b$.

3. Kui $a : b < 1$, siis $a < b$.

Näiteks $6 : 8 = 0,75 < 1$.

Nüüd näitab jagatis, kui suure osa moodustab arv 6 arvust 8.

Arv 6 moodustab arvust 8 0,75 osa ehk $\frac{3}{4}$ osa ehk 75%.

Selleks, et teada saada, mitu protsenti moodustab üks arv teisest, jagame esimese arvu teisega ja avaldame tulemuse protsentides.

$$(\text{mida võrdleme}) : (\text{millega võrdleme}) \cdot 100\% = \frac{\text{mida võrdleme}}{\text{millega võrdleme}} \cdot 100\%$$

Näide. Klassis on 25 õpilast, nendest 6 õpilast õpivad väga hästi. Mitu protsenti õpilastest õpivad väga hästi?

$$\frac{6}{25} = 6 : 25 = 0,24 = 24\% \text{ (taskuarvutil)} \quad \text{või} \quad \frac{6 \cdot 100\%}{25} = \frac{6 \cdot 4\%}{1} = 24\% \text{ (kirjalikult)}$$

Suuruste muutumist väljendatakse tavaliselt protsentides

$$\text{Muutumine \% -des} = \frac{\text{kui palju muutus}}{\text{millega võrreldes muutus}} \cdot 100\%$$

NB! Oluline on jälgida, mille suhtes muutumist vaadeldakse.

Näide. Karude arv Eesti metsades vähenes jahihooaja lõpuks 600-lt 570-le. Arvuta muutus protsentides.

I lahendus	II lahendus
Leiame mitme võrra vähenes karude arv	Leiame mitu protsenti moodustab 570 600-st
$600 - 570 = 30$.	
Arvutame, mitu protsenti moodustab see karude esialgsest arvukusest	$570 : 600 = 0,95 = 95\%$.
$30 : 600 = 0,05 = 5\%$.	Arvutame, mitme protsendi võrra arvukus vähenes
	$100\% - 95\% = 5\%$.

Vastus. Karude arvukus vähenes jahihooajaga 5%.

Ülesanded ¹

1. Eralda täisosa ja taanda

$$\frac{7}{3}; \frac{11}{9}; \frac{24}{5}; \frac{26}{8}; \frac{34}{11}; \frac{102}{10}; \frac{45}{9}; \frac{66}{13}$$

2. Teisenda segaarvud liigmurdudeks

$$2\frac{1}{3}; 3\frac{4}{5}; 10\frac{2}{7}; 4\frac{5}{9}; 11\frac{3}{4}; 8\frac{1}{6}; 15\frac{1}{2}; 100\frac{2}{3}; 3\frac{2}{9}; 101\frac{5}{8}$$

3. Kirjuta kahe murru vahele märk =, < või >.

$$1) \quad \frac{3}{2} \quad \dots \quad \frac{18}{12}$$

$$\frac{2}{7} \quad \dots \quad \frac{10}{35}$$

$$\frac{2}{3} \quad \dots \quad \frac{14}{21}$$

$$\frac{75}{100} \quad \dots \quad \frac{3}{4}$$

$$2) \quad \frac{1}{6} \quad \dots \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{6} \quad \dots \quad \frac{15}{18}$$

$$\frac{1}{4} \quad \dots \quad \frac{5}{20}$$

$$\frac{90}{130} \quad \dots \quad \frac{9}{13}$$

$$3) \quad \frac{2}{30} \quad \dots \quad \frac{4}{45}$$

$$\frac{3}{11} \quad \dots \quad \frac{15}{30}$$

$$\frac{35}{42} \quad \dots \quad \frac{5}{7}$$

$$\frac{150}{3} \quad \dots \quad \frac{1500}{300}$$

4. Taanda murrud

$$\frac{14}{16}; \frac{40}{56}; \frac{81}{90}; \frac{27}{51}; \frac{6}{42}; \frac{30}{39}; \frac{35}{95}; \frac{19}{57}; \frac{24}{32}; \frac{62}{72}$$

5. Taanda murrud ja eralda seejärel täisosa.

$$\frac{52}{26}; \frac{90}{27}; \frac{28}{21}; \frac{45}{32}; \frac{72}{60}$$

6. Kirjuta murruna ja, kui võimalik, taanda.

- 1) Missuguse osa moodustab 10 min, 15 min, 40 min, 85 min ühest tunnist?

- 2) Kui suure osa ühest kilogrammist moodustab 100 g, 300 g, 750 g, 125 g?

- 3) Missuguse osa ühest meetrist moodustab 10 cm, 250 mm, 45 dm, 2 km?

7. Teisenda ühenimelisteks murrud

$$\frac{3}{4} \text{ ja } \frac{7}{6}; \quad \frac{1}{12} \text{ ja } \frac{3}{4}; \quad \frac{7}{24} \text{ ja } \frac{5}{36}; \quad \frac{1}{18} \text{ ja } \frac{2}{27}; \quad \frac{6}{12} \text{ ja } \frac{30}{60}$$

8. Arvuta.

$$1) \quad \left(\frac{1}{3} + 0,4\right) \cdot \frac{5}{11}$$

$$3) \quad 4 \cdot \left(\frac{3}{5} - 0,25\right)$$

$$5) \quad 4,6 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{13} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{7}{10}\right)$$

$$2) \quad \left(1,5 - \frac{6}{7}\right) : \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{4}\right)$$

$$4) \quad \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{6} + 0,5\right)$$

$$6) \quad 3\frac{3}{4} \cdot \left(4\frac{1}{5} - 3\frac{1}{6}\right) + 8,8 \cdot \frac{5}{4}$$

9. Arno ja Teele elavad teineteisest $4\frac{1}{2}$ km kaugusel. Nad väljusid kodust ühel ajal teineteisele vastu: Arno jalgrattal kiirusega $10\frac{1}{2}$ km/h ja Teele jalgsi kiirusega 3 km/h. Missuguse aja pärast nad kohtusid? Tee joonis ja arvuta.

¹K. Kaasik, N. Cibulskait, M. Strickiene, Matemaatika 6. klassile, Avita, 2002.

10. Meelisel kulus jalgrattaga 24 km läbimiseks $2\frac{2}{3}$ tundi. Kui palju aega kulub tal sama kiirusega 30 km läbimiseks?

11. Ühest linnast teise sõiduks kulub jalgratturil $3\frac{3}{5}$ tundi. Missuguse osa sellest vahe-
maast läbib ta 1 tunniga; 2 tunniga; 3 tunniga?

12. Taisi jaotas ristküliku 8 võrdseks osaks. Kõigepealt värvis ta $\frac{1}{2}$ sellest ristkülikust, seejärel veel $\frac{1}{4}$ ristkülikust ja veidi hiljem veel $\frac{1}{8}$ osa. Kas värvitud sai kogu ristkülik? Kui ei, siis kui suur osa ristkülikust jäi värvimata?

13. Teisenda harilikuks murruks, võimalusel taanda.

1) 0,1; 0,4; 0,9; 0,25; 0,02; 0,35; 0,65; 0,005; 0,125;

2) 0,(1); 0,(45); 0,(936); 0,2(5); 0,32(54); 0,00(5).

14. Teisenda kümnendmurdudeks

1) $\frac{1}{27}$ ja $\frac{1}{32}$; 2) $\frac{1}{9}, \frac{1}{99}, \frac{1}{999}, \dots, \frac{1}{11}, \frac{1}{111}, \frac{1}{1111}, \dots$ 3) $1\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{4}{25}, 13\frac{3}{20}, \frac{1}{7}$.

15. Erki sammu pikkus on $\frac{53}{100}$ m, tema ema sammu pikkus $\frac{16}{25}$, aga isal $\frac{37}{50}$ m. Kõik nad tegid 50 sammu.

1) Kui pika vahemaa igatüks läbis?

2) Võrdle isa ja Erki läbitud vahemaa pikkusi.

3) Võrdle ema ja isa läbitud vahemaa pikkusi.

4) Kui kaugel on Erki ja isa teineteisest, kui nad alustasid ühest ja samast punktist ühes suunas?

5) Kui kaugel on isa ja ema teineteisest, kui nad alustasid samast punktist, kuid vastupidistes suundades?

16. Tartust Elvasse on 27 kilomeetrit. Tartust väljus jalgrattur ja sõitis keskmise kiirusega $14\frac{1}{2}$ km/h. Kui kaugel Elvast on ta $1\frac{1}{2}$ tunni pärast?

17. Sügisel maksis 1 kg õunu $6\frac{1}{5}$ krooni. Talvel tõusis õunte hind $1\frac{1}{5}$ korda.

1) Kui palju maksis talvel 1 kg õunu; 4,5 kg õunu?

2) Kui palju saame tagasi 50 kroonist, kui ostame 4 kg õunu suvel; talvel?

18*. Arvuta korrutis $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$.

19*. Arvuta summa $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$.

Näide. Mäealuse talu põllumaast on 40% kartulipõld.

Ülejäänud maast $\frac{2}{3}$ on kapsapõllu all ning 9 hektaril kasvatatakse porgandeid. Kui suur on talu kogu põllumaa?

I lahendus

Kogu põllumaast moodustab kapsa ja porgandipõld

$$100\% - 40\% = 60\%.$$

Kogu põllumaast on kapsapõllu all

$$\frac{2}{3} \cdot 60\% = 40\%.$$

Kogu põllumaast on kartuli- ja kapsapõllu all

$$40\% + 40\% = 80\%.$$

Porgandipõld moodustab kogu põllumaast

$$100\% - 80\% = 20\%.$$

Kuna 20% põllumaast on 9 ha ja $20\% = \frac{1}{5}$, siis talu kogu põllumaa suurus on

$$9 \text{ ha} : \frac{1}{5} = 45 \text{ ha}.$$

Vastus. Talul on põllumaad 45 ha.

II lahendus

Ülejäänud maast on porgandite all

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Kuna $\frac{1}{3}$ on 9 ha, siis porgandite ja kapsaste all on

$$9 \text{ ha} : \frac{1}{3} = 27 \text{ ha}.$$

Kogu põllumaast on porgandite ja kapsaste all

$$100\% - 40\% = 60\%.$$

Kuna 60% põllumaast on 27 ha ja $60\% = 0,6$, siis kogu põllumaa suurus on

$$27 \text{ ha} : 0,6 = 45 \text{ ha}.$$

Protsentarvutus

Mõningaid osasid tervikust nimetatakse ka teisiti: $\frac{1}{2}$ osa on pool, $\frac{1}{4}$ osa on veerand, $\frac{1}{100}$ osa on üks protsent (1%).

$$\frac{1}{100} \text{ osa} = 0,01 \text{ osa} = 1\%; \quad \frac{100}{100} \text{ osa} = 1 \text{ tervik} = 100\%$$

Protsendid kujutavad endast vaid murdude erilist kirjutusviisi. Seega iga murruliste andmetega osa, terviku või osamäära leidmise ülesannet saab esitada ning lahendada protsentides ja vastupidi.

Protsendid	Harilik murd	Taandatud murd	Kümnnendmurd
1%	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	0,01
2%	$\frac{2}{100}$	$\frac{1}{50}$	0,02
5%	$\frac{5}{100}$	$\frac{1}{20}$	0,05
10%	$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{10}$	0,1
20%	$\frac{20}{100}$	$\frac{1}{5}$	0,2
25%	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$	0,25
$33\frac{1}{3}\%$	$\frac{33\frac{1}{3}}{100} = \frac{100}{300}$	$\frac{1}{3}$	0,(3)
50%	$\frac{50}{100}$	$\frac{1}{2}$	0,5
75%	$\frac{75}{100}$	$\frac{3}{4}$	0,75
100%	$\frac{100}{100}$	1	1
120%	$\frac{120}{100}$	$\frac{6}{5}$	1,2

Arvu a **astendamiseks** naturaalarvuga n nimetatakse korrutise

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tegurit}}$$

leidmist. Arvu a nimetatakse **astendatavaks** ehk **astme aluseks** ning arvu n **astendajaks** ehk **astmenäitajaks**. Astendamisel kehtivad järgmised omadused:

1. Positiivse arvu aste on alati positiivne. Negatiivse arvu aste on positiivne, kui astendaja on paarisarv, ja negatiivne, kui astendaja on paaritu arv.
2. Iga arv astmes 1 on võrdne selle arvu endaga. Iga nullist erinev arv astmes 0 on võrdne arvuga 1.

Ülesanded

1. Arvuta arvude -21 ja 7

- a) summa; b) vahe; c) korrutis; d) jagatis;
e) vastand arvude vahe vastand arv.

2. Arvuta.

- 1) $2 - 4 - 5$ 4) $2(-4 - 5)$ 7) $-15 : 5 \cdot 3$
2) $2 - 4(-5)$ 5) $2(-4) - 5$ 8) $-15 : (-5) \cdot 3$
3) $2 - (4 - 5)$ 6) $2(-4) \cdot (-5)$ 9) $-15 : (5 \cdot 3)$

3. Leia arvude $\frac{5}{6}$ ja $-\frac{1}{3}$ pöördarvude summa ja vastand arvude vahe jagatis.

4. Leia arvude 4 ja -6 summa pöördarvu ja pöördarvude summa vahe.

5. Arvuta arvude -9 ja -12

- a) absoluutväärtuste vahe; b) vahe absoluutväärtus;
c) absoluutväärtuste summa; d) summa absoluutväärtus.

6. Arvuta.

- 1) $2 - (-5) \cdot 4 + (-20) : 4 \cdot (-5)$ 3) $[25 \cdot (-5) + 75] : (-10) - (-4) \cdot (-20)$
2) $-6 + (-5) - (-7) \cdot 2 - (-8) : (-2)$ 4) $15 \cdot (-3) - (-5) - 160 : [(-2) \cdot 8 + (-4)]$

7*. Arvuta.

- 1) $\left| \left| \frac{|-2| - |3|}{2 \cdot |-4 + 5|} - \frac{1 - |-4|}{|5 \cdot (-3)|} \right| \right|$ 2) $\left| \frac{2 - |-4|}{|-4 \cdot 3|} - \left| \frac{|-5| - |4|}{3 \cdot |-5 + 3|} \right| \right|$

8*. Arvuta.

- 1) $(-1)^4 + (-1)^3 + 1 - (-1)^2 - 1^5 - 1^6$ 2) $(-1)^5 - (-2)^4 - (-3)^3 + (-4)^2$

Reaalarvud

Igapäevase elu vajadusi rahuldavad täielikult ratsionaalarvud. Algul piisas ka matemaatiku tarbeks nendest arvudest. Alles hiljem selgus, et mitte kõikidel võrranditel ei ole lahendeid ratsionaalarvude hulgas (näiteks $x^2 = 2$). Osutus, et ka lõikude pikkuste mõõtmiseks ei piisa alati ratsionaalarvudest. (Näiteks ühikruudu diagonaali pikkust ei väljenda ükski ratsionaalarv.) Ka ringjoone pikkuse ja diameetri suhe ei ole võrdne ühegi ratsionaalarvuga. Vajalikke uusi arve hakati nimetama **irratsioonaalrvudeks**.

Iga irratsioonaalrv on esitatav mitteperioodilise lõpmatu kümnendmurruna ja vastupidi. Ratsionaalarvud ja irratsioonaalrvud koos moodustavad **reaalarvude hulga** $\mathbb{R}$, mis on kinnine nelja aritmeetika põhitehte suhtes.

Reaalarvu astendamine ja juurimine.

Reaalarvu a **aste** a^n , kus n on ühest suurem naturaalarv, on defineeritud võrdusega

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tegurit}}.$$

Arvu a nimetatakse **astendatavaks** ehk **astme aluseks**, arvu n **astendajaks** ehk **astmenäitajaks** ning arvu a^n **astmeks**.

Näiteks $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $(-0,1)^4 = (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) = 0,0001$.

Kui reaalarvude a ja b korral kehtib võrdus $a^n = b$, siis öeldakse, et arv a on võrdne n -**astme juurega** arvust b ja märgitakse kujul

$$a = \sqrt[n]{b}.$$

Arvu b nimetatakse **juuritavaks**, arvu a **juureks**, naturaalarvu n **juurijaks**. Vaadeldavat astendamise pöördtehet nimetatakse **juurimiseks**. Vastavalt juure definitsioonile saame, et

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$$

Seega $\sqrt[3]{8} = 2$, sest $2^3 = 8$ ja $\sqrt[3]{-8} = -2$, sest $(-2)^3 = -8$. Kuid juurel $\sqrt[4]{-16}$ ei ole väärtust reaalarvude hulgas, sest astme omaduste põhjal ei leidu reaalarvu, mille neljas aste oleks negatiivne. Järelikult, negatiivse reaalarvu b korral ei ole juurel $\sqrt[2k]{b}$ reaalarvulist väärtust.

7. Kauplus müüs esimesel päeval $\frac{2}{5}$ olemasolevast riidest, teisel päeval $\frac{7}{12}$ sellest, mis ta müüs esimesel päeval, kolmandal päeval aga kogu ülejäänud riide. Kui palju riiet müüs kauplus, kui teisel päeval müüdi 192 m vähem riiet kui kolmandal päeval?

4. klassi ülesanded (Avita 1998)

830. Konkursi esimeses voorus osales 200 õpilast, teises aga 2 korda vähem. Kolmandasse vooru pääses $\frac{2}{5}$ teise vooru osavõtjatest. Mitu õpilast osales kolmandas voorus?
837. Kui Pirje oli kooliteel läbinud 500 m, oli tal käidud $\frac{1}{3}$ teest. Kui pikk on Pirje tee kodust kooli?
838. Peetril oli läbitud juba $\frac{1}{4}$ distantist, s.o 750 meetrit. Kui pikka maad jooksis Peeter?
841. Priit kogus endale jalgratta ostuks raha. Tal oli juba olemas $\frac{5}{6}$ vajalikust rahasummast. Kui kalli ratta ta kavatses osta, kui tal oli 2000 kr.?
843. Ema tasus kassasse 282 krooni, mis oli $\frac{3}{4}$ tal kaasas olnud rahast. Kui palju oli emal raha kaasas?
844. Juulis müüs bensiinijaam 200 000 l bensiini, veebruaris aga $\frac{3}{8}$ sellest kogusest. Mitu liitrit bensiini müüdi veebruaris?
1015. Kalahalli toodi 3000 kg elusat karpkala. Lõunaks oli müüdud $\frac{1}{2}$ kaladest, pärast lõunat müüdi $\frac{1}{3}$ enne lõunat müümata jäänud kaladest. Kui palju kala jäi sel päeval müümata?
1017. Arbuusi eest maksis tütarlaps 8 kr. ja veel pool arbuusi hinnast. Mitu krooni maksis arbuus?
1018. Söökla mööbel maksis 40 000 kr. Sellest summast $\frac{1}{5}$ tuli tasuda toolide eest, $\frac{1}{2}$ ülejäänud summast kappide eest ja sellest üle jäänud raha laudade eest. Kui palju maksid laudad
1096. Saekaatrisse toodi 900 palki. $\frac{1}{10}$ -st nendest palkidest lõigati igast 7 lauda ning $\frac{1}{9}$ -st igaiühel 6 lauda. Mitu lauda on juba lõigatud?
1097. Ateljeesse oli toodud 100 kangarulli, igas 120 m riiet kuubede õmblemiseks. Ühele kuuele kulub 2 m riiet. $\frac{9}{10}$ riidest on juba kulutatud. Mitu kuube saab veel õmmelda alles jäänud riidest?
1098. Vanaisa valmistas 40 luuda ja müüs neid hinnaga 9 krooni tükk. Esimesel päeval müüs ta nendest turul $\frac{2}{5}$. Kui palju raha lootis ta veel müümata luudadest saada?
1099. Koolile osteti 30 matemaatikaõpikut, hiljem veel $\frac{2}{5}$ sellest kogusest. Kõikide nende raamatute eest maksti 2940 kr. Kui palju maksti teisel korral ostetud õpikute eest
1101. Kooli raamatukogu tellis aasta jooksul juurde 1260 raamatut. $\frac{5}{9}$ neist olid õpikud, ülejäänud raamatutest $\frac{5}{7}$ oli ilukirjandus. Mitu ilukirjanduslikku raamatut telliti?

Osa leidmine arvust. Arvu leidmine tema antud osa ja osamäära järgi

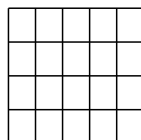
1. Leiame $\frac{3}{4}$ arvust 16.

Kahe tehaga (4. klass)

$\frac{1}{4}$ arvust 16 on

$\frac{3}{4}$ arvust 16 on

2. Leiame $\frac{3}{5}$ arvust $\frac{3}{4}$.



Murruga määratud osa leidmiseks arvust tuleb see arv korrutada antud murruga.

Murdu, mis näitab, kui suur osa tervikust leida tuleb, nimetatakse **osamääraks**. Kui osamäär on väiksem kui 1, siis on leitud arv väiksem antud arvust; kui osamäär on suurem kui 1, siis on leitud arv suurem antud arvust.

3. Poole kogu tehase toodangust moodustavad arvutid, millest $\frac{2}{5}$ on sülearvutid. Missuguse osa tehase toodangust moodustavad sülearvutid?

- 2) $6 - [(-3) + (-7)] - [(-1) - (-5) - (-8)]$
- 3) $10 - \{12 - [(-9) + (-1)]\}$
- 4) $(-4) - (-2) - \{(-5) - [(-7) + (-3) - (-8)]\}$
- 5) $[(-1,2) + (-7,2) - (-0,21)] + (+10) - (+11,9)$
- 6) $(-15,6) + [(-11,4) - (+3,14)] - (-8,44)$
- 7) $\left(-1\frac{4}{15}\right) + \left(+3\frac{3}{5}\right) - \left[\left(-\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{13}{30}\right)\right]$
- 8) $\left(-11\frac{7}{24}\right) - \left(+1\frac{5}{16}\right) - \left[\left(+7\frac{1}{3}\right) - \left(+7\frac{23}{24}\right)\right]$
- 9) $\left(-5\frac{7}{18}\right) + \left(-1\frac{7}{9}\right) - \left[\left(-3\frac{5}{6}\right) - \left(+3\frac{1}{6}\right)\right]$

6. Arvuta.

- 1) $\frac{57,24 \cdot 3,55 + 430,728}{2,7 \cdot 1,88 - 1,336} + \frac{127,18 \cdot 4,35 + 14,067}{18 + 2,1492 : 3,582}$
- 2) $\frac{(4,561 + 5,439) \cdot 0,1}{(7,01 - 5,01) : 0,5} - \frac{(4,45 - 2,2) : 0,3}{(0,823 + 0,177) \cdot 30}$
- 3) $\frac{6\frac{7}{9} + 0,5 - 0,45(3)}{0,7 + 0,54(6) + 0,02} : 3\frac{10}{11}$
- 4) $\frac{5\frac{3}{9} - 3\frac{3}{4}}{15,8(3) : 10} + 5,3 - \frac{3\frac{3}{4}}{1,58(3)}$
- 5) $\frac{\frac{1}{9} + 0,2 + 0,333 \dots + 0,4}{0,0(2) + 0,0(1) + 0,0(3) + 0,0(4)}$

7. Aseta järgnevate ülesannete vastustes koma õigele kohale.

- | | | | |
|--------------------------------|-----|---|-----|
| 1) $2,96 \cdot 7,5 =$ | 222 | 5) $4,3 \cdot 73,5 \cdot 0,124 \approx$ | 392 |
| 2) $0,015 \cdot 3,5 =$ | 525 | 6) $26 \cdot 0,071 \cdot 4,6 \approx$ | 849 |
| 3) $12,7 \cdot 8,9 \approx$ | 113 | 7) $7,78 \cdot 14,5 \cdot 0,00191 \approx$ | 216 |
| 4) $0,397 \cdot 0,953 \approx$ | 378 | 8) $46 \cdot 67 \cdot 0,6 \cdot 17,2 \approx$ | 318 |

8. Arvuta.

- | | | |
|--------------------------------|------------------------|--------------------------------|
| 1) $0,562 \cdot 100\,000$ | 5) $3,45 : 1000$ | 9) $2\,400\,000 \cdot 0,00001$ |
| 2) $4,626 \cdot 100$ | 6) $4,5 : 10\,000$ | 10) $3 : 0,001$ |
| 3) $26,738 \cdot 10\,000\,000$ | 7) $3,56 \cdot 0,001$ | 11) $0,32 : 0,01$ |
| 4) $45 : 1\,000\,000$ | 8) $3400 \cdot 0,0001$ | 12) $0,003 : 0,0001$ |

Arvutamine ligikaudsete arvudega

Sageli on tarvis arve ümardada. Kõik ümardamisel saadud arvud on ligikaudsed. Ka mõõtmisel saadud arvud on ligikaudsed. Seepärast tuleb mitmesuguste ülesannete lahendamisel tegeleda ligikaudsete arvudega.

Näide. Toa pikkus on 3,2 m ja laius 4,4 m. Arvuta põranda pindala.

Tüüpiliselt leitakse korrutis $3,2 \cdot 4,4 = 14,08$ ja antakse vastus $14,08 \text{ m}^2$. Tegelikult, isegi vastus $14,1 \text{ m}^2$ oleks antud juhul liiast. Miks?

Teame, et toa mõõtmed on mõõdetud $10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ täpsusega. Muudame antud täpsuse piires algandmeid. Oletades, et toa mõõtmed on 3,15 m ja 4,35 m, oleks pindala $3,15 \cdot 4,35 = 13,7025 \text{ m}^2$. Kui oletada, et toa mõõtmed on 3,24 m ja 4,44 m, saaksime pindalaks $3,24 \cdot 4,44 = 14,3856 \text{ m}^2$. Niisiis tuleks ülesande vastus anda kahe tüvenumbriga ehk 14 m^2 .

Andes vastuse kujul $14,1 \text{ m}^2$, peaksid lähteandmed olema antud sentimeetri täpsusega (3,20 m ja 4,40 m), vastuse $14,08 \text{ m}^2$ korral koguni millimeetri täpsusega (3,200 m ja 4,400 m).

Kümnendmurru ümardamine. Hariliku murru kümnendlähend.

Arvutamisel asendatakse sageli harilikud murrud kümnendmurdudega. Kui harilik murd avaldub lõpmatu kümnendmurruna, siis asendades selle lõpliku kümnendmurruga, saame murru, mis on esialgsega võrdne vaid ligikaudselt. Saadud murdu nimetatakse hariliku murru kümnendlähendiks. Hariliku murru asendamine kümnendlähendiga toimub vastava kümnendmurru ümardamise teel.

Kümnendmurru ümardamisel jäetakse murdosa lõpust teatud hulk numbreid ära. Kui esimene ärajäetav number on 5 või viiest suurem number, siis suurendatakse lähendi viimast numbrit ühe võrra; kui esimene ärajäetav number on väiksem kui 5, jäetakse lähendi viimane number muutmata.

Ümardatavad murdosa numbrid jäetakse ära. Ümardatavad täisosa numbrid asendatakse nullidega.

Näited.

$26,457 \approx 26,5$ (ümardatud kümnendikeni; viga ei ületa 0,05);
 $0,2875 \approx 0,29$ (ümardatud sajandikeni; viga ei ületa 0,005);

Ülesanded

1. Ümarda arvud sajandikeni ja kümnendikeni.

- | | | | |
|----------|------------|-----------|-------------|
| 1) 1,052 | 3) 105,004 | 5) 1,999 | 7) 109,9445 |
| 2) 2,171 | 4) 13,045 | 6) 17,945 | 8) 0,001 |

2. Ümarda arvud ühelisteni, kümnelisteni ja sajalisteni.

- | | | | |
|-----------|---------|------------|-----------|
| 1) 199,5 | 3) 13,4 | 5) 145,945 | 7) 42,5 |
| 2) 232,42 | 4) 2,05 | 6) 3,0 | 8) 299,55 |

3. Arvuta avaldise $x + y - z$ väärtuse lähend ning selle absoluutse ja relatiivse vea ülemmäärad, kui

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1) $x = 32,72(\pm 0,03)$ | 2) $x = 0,87(\pm 0,03)$ |
| $y = 19,3(\pm 0,6)$ | $y = 1,32(\pm 0,04)$ |
| $z = 15,1(\pm 0,2)$ | $z = 3,47(\pm 0,02)$ |

4. Arvuta andmetekohase täpsusega

- | | |
|---|--|
| 1) $3,46 - 0,678$
$5020 + 42,3$
$0,05 - 0,002$
$2,000 + 13,85 + 0,047 - 0,361$ | 3) $30,8 \cdot 4,20$
$10089 \cdot 483$
$0,8 \cdot 1,56 \cdot 10^9$
$(4,32 + 1,7) \cdot 3$ |
| 2) $13,85 + 0,047 - 0,367$
$430 - 58,4 - 21,0$
$0,66 \cdot 2,3$
$30,8 \cdot 4,2$ | 4) $142 \cdot 1,15 + 260$
$50,12 \cdot (134,6 - 129,7)$
$(1,23 + 0,471)^2$
$5,83 : 47,8 + 24 : 5,2$ |

5. Keha ruumala on $13,6 \text{ cm}^3$ ja tihedus $7,8 \text{ g/cm}^3$. Arvuta keha mass.

6. Auto sõidab keskmise kiirusega $75,6 \text{ km/h}$. Kui pika tee läbib ta 3,2 tunniga?

7. Risttahukakujulise alumiiniumitüki mõõtmed on 4,9 cm, 1,2 cm ja 1,6 cm. Arvuta mass, kui alumiiniumi tihedus on 2700 kg/m^3 .

8. Auto läbis 1,2 tunniga 78,5 km. Arvuta auto keskmine kiirus.

lähendi jagatist. Relatiivse ehk suhtelise vea ülemmäära tähistatakse kreeka tähega δ . Relatiivne viga antakse harilikult protsentides, ümardades vea ülemmäära alati liiga, tavaliselt protsendi kümnendikeni.

Näide. Mari ostetud singikoguse suhtelise vea ülemmäär on $\delta = \frac{100}{250} \cdot 100\% = 40\%$, kuid mullakoguse suhtelise vea ülemmäär vaid $\delta = \frac{0,1}{15} \cdot 100\% = 0,7\%$.

Arvu õiged numbrid.

Ligikaudse arvu numbrit nimetatakse õigeks numbriks, kui arvu absoluutse vea ülemmäär ei ületa selle numbriga kirjutatud järgu üht ühikut.

Näide 1. Arvus $2,37(\pm 0,01)$ on kõik numbrid õiged, sest absoluutse vea ülemmäär ei ületa selle arvu ühegi järgu ühikut.

Näide 2. Arvus $0,853(\pm 0,012)$ on õiged üheliste number 0 ja kümnendike number 8. Sajandike number 5 ei ole enam õige, sest absoluutse vea ülemmäär $0,012$ on suurem kui sajandiku järguühik $0,01$.

Arvu tüvenumbrid ja standardkuju.

Kui ligikaudse arvu vea ülemmäära ei märgita, siis kirjutatakse arv nii, et selle kõik numbrid oleksid õiged, välja arvatud täisarvu lõpunullid, mis asendavad ümardamisel kõrvaldatud numbreid.

Selle reegli kohaselt kirjutatud arvu õiged numbrid, välja arvatud kümnendmurru alguses olevad nullid, moodustavad arvu tüve ja neid numbreid nimetatakse **arvu tüvenumbriteks**.

Selleks, et hinnata nullidega lõppeva täisarvu vea ülemmäära, trükitakse õpekirjanduses mõnikord arvu tüvesse mittekuuluvad nullid väiksemas kirjas. Käsitsi kirjutades tõmmatakse sellistele nullidele joon alla.

Näited.

Arv	Arvu tüvenumbrid
15,6	1-5-6
0,08	8
0,2070	2-0-7-0
234	2-3-4
10200	1-0-2-0
1700	1-7
$3,70 \cdot 10^3$	3-7-0

Nullidega lõppeva ligikaudse täisarvu kirjutamisel kasutatakse ka arvu 10 astmeid. Arv kirjutatakse sel juhul kahe teguri korrutisena nii, et esimeseks teguriks on arvu tüvi ja teiseks teguriks sobiv kümne aste. Arvu tüves tuleb kirjutada koma nii, et saadud arv oleks ühe ja kümne vahel. Nii kirjutatud arve nimetatakse **standardkujulisteks**

ligikaudseteks arvudeks.

Näited.

1) $4200 = 4,2 \cdot 10^3$ 2) $580\,000 = 5,80 \cdot 10^5$ 3) $36\,000 = 3,6 \cdot 10^4$

Vea edasikandumine liitmisel ja lahutamisel.

Ligikaudsete arvude summa absoluutse vea ülemmäär võrdub liidetavate absoluutsete vigade ülemmäärade summaga.

Näide. Kui $x = 3,67(\pm 0,03)$ ja $y = 11,5(\pm 0,2)$, siis $x + y = 15,17(\pm 0,23)$.

Ligikaudsete arvude vahe absoluutse vea ülemmäär võrdub vähendatava ja vähendaja absoluutsete vigade ülemmäärade summaga.

Näide. Kui $x = 39,32(\pm 0,04)$ ja $y = 12,15(\pm 0,02)$, siis $x - y = 27,17(\pm 0,06)$.

Kui avaldises esinevad ainult liitmis- ja lahutamistehted, siis sellise avaldise väärtuse absoluutse vea ülemmäär võrdub kõigi andmete absoluutsete vigade summaga.

Praktilisel arvutamisel juhendatakse enamasti järgmisest reeglist:

Ligikaudsete arvude summa ja vahe tuleb ümardada nii, et selle viimane tüvenumber oleks samas järgus kui ta on kõige väiksema täpsusega lähteandmetes.

Näited.

23,467	2700
15,42	375
+ 2,3	+ 4600
41,187 $\approx$ 41,2	7675 $\approx$ 7700

Kui lähteandmed on erineva täpsusega, siis võib suurema täpsusega andmeid enne arutamist ümardada. Et vältida sellest tingitud võimalikke lisavigu, siis jäetakse eelneval ümardamisel üks **varunumber**, mis lõpptulemusest kustutatakse ümardamise teel.

Näide. Arvuta avaldise $8,267 + 0,91 - 0,00784$ väärtus arvestades andmete täpsust.

Kõige väiksema täpsusega on arv $0,91$, seega vastuse viimaseks tüvenumbriks peab jääma sajandike number. Ümardame $0,00784$ jättes varunumbrina alles tuhandikud $0,00784 \approx 0,008$. Arvutame avaldise väärtuse

$$8,267 + 0,91 - 0,008 = 9,177 - 0,008 = 9,169 \approx 9,17$$

Kui andmete seas esineb täpseid arve, siis vastuse ümardamisel neid arvesse ei võeta.

Vea edasikandumine korrutamisel ja jagamisel.

Ligikaudsete arvude korrutises ja jagatises tuleb säilitada nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on vähima tüvenumbrite arvuga lähteandmetes.

Näited.

1) $22620 \cdot 14 = 316680 \approx 320000$

2) $0,8 \cdot 142,3 = 113,84 \approx 100$

3) $37 : 400 = 0,0925 \approx 0,093$

Kui andmete seas on täpseid arve, siis vastuses säilitatavate tüvenumbrite määramisel neid arvesse ei võeta.

Kui lähteandmete tüvenumbrite arvud on erinevad, siis võib suurema täpsusega andmeid enne arvutamist ümardada, säilitades siiski ühe varunumbri. Viimane koos sellele järgnevate numbritega kustutatakse ümardamise teel.

Näited.

1) $4,2 \cdot 1,763 \approx 4,2 \cdot 1,76 = 7,392 \approx 7,4$

2) $4,6894 : 2,3 \approx 4,69 : 2,3 \approx 2,0$

Varunumbrit kasutame ka mitme tehtega ülesannetes. Vahepealsete tehete tulemuses tuleb säilitada üks number rohkem (varunumber), kui reegli kohaselt on vaja säilitada vastava tehete tulemuses.

Kirjalikul arvutamisel märgitakse varunumbrid ära allakriipsutamiseega. Varunumbrid säilitatakse kuni lõpptulemuse saamiseni. Lõpptulemusest tuleb varunumbrid ja neist madalamad järgud kustutada ümardamise teel.

Näide. Mõõtmisel saadi risttahuka pikkuseks 12,7 cm, laiuseks 5,6 cm ja kõrguseks 7,0 cm. Arvuta risttahuka täispindala ja ruumala.

Risttahuka põhja pindala on $12,7 \cdot 5,6 = 71,12 \approx 71,1 \text{ cm}^2$.

Risttahuka kahe põhja pindala on $2 \cdot 71,1 = 142,1 \approx 142 \text{ cm}^2$.

Risttahuka põhja ümbermõõt on $2 \cdot (5,6 + 12,7) = 2 \cdot 18,3 = 36,6 \text{ cm}$.

Risttahuka külgpindala on $36,6 \cdot 7,0 = 256,2 \approx 256 \text{ cm}^2$.

Risttahuka täispindala on $142 + 256 = 398 \approx 400 = 4,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$.

Risttahuka ruumala on $71,1 \cdot 7,0 = 497,7 \approx 500 = 5,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$.

Vastus. Risttahuka täispindala on $4,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$ ning ruumala $5,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$.

$528,37 \approx 500$ (ümardatud sajalisteni; viga ei ületa 50);

$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,66 \dots \approx 0,7$ (ümardatud täpsusega 0,1);

$\frac{41}{110} = 41 : 110 = 0,37272 \dots \approx 0,37$ (ümardatud täpsusega 0,01).

Absoluutse vea ülemmäär.

Arvu **lähendiks** nimetatakse täpse arvu ligikaudset väärtust. Lähendi **absoluutseks veaks** nimetatakse täpse arvu ja tema lähendi vahe absoluutväärtust.

Näide. Kui täpne arv on $x = 3,459$ ja tema lähend $a = 3,5$, siis selle lähendi viga on $|x - a| = |3,459 - 3,5| = |-0,041| = 0,041$.

On võimalik otsustada, kui suur saab ülimalt olla saadud lähendi absoluutne viga ehk kui suur on selle lähendi absoluutse vea ülemmäär. Ligikaudse arvu absoluutse vea ülemmäär kirjutatakse arvu järele sulgudesse kahe märgi, plussi ja miinusega.

Näide. Toa põranda pikkuse mõõtmisel saadi ligikaudne arv 4,36 m. Arvestades mõõtmistingimusi (mõõtmisvahendit, põranda ja äärelüüstu siledust, mõõtja kogemusi jne.) hindame ligikaudse arvu absoluutse vea ülemmääraks 2 cm ehk 0,02 m. Kui põranda pikkus on x meetrit, siis kirjutame, et $x = 4,36(\pm 0,02)$. Põranda pikkus on mõõdetud täpsusega 0,02 m ehk täpsusega 2 cm. See tähendab, et põranda pikkus meetrites ei saa olla väiksem kui $4,36 - 0,02 = 4,34$ ega suurem kui $4,36 + 0,02 = 4,38$.

Arve 4,34 ja 4,38 nimetatakse arvu x **alamtõkkeks** ja **ülemtõkkeks**. Arv x asetseb oma alamtõkke ja ülemtõkke vahel (äärmisel juhul võib olla ka ühega neist võrdne). Lühidalt $4,34 \leq x \leq 4,38$.

Absoluutse vea ülemmäära ümardamisel tehakse seda alati liiaga ja nii, et tema kõige madalam järk oleks sama, mis lähendi järk.

Näide. Kui $x = 3,72(\pm 0,0345)$, siis absoluutse vea ülemmäära ümardamisel saame $x = 3,72(\pm 0,04)$.

Alamtõke ümardatakse alati puuduga ja ülemtõke liiaga.

Näide. Esialgselt antud tõkked on $5,14 \leq x \leq 5,18$, siis ümardamisel saame $5,1 \leq x \leq 5,2$.

Relatiivse ehk suhtelise vea ülemmäär.

Näide. Mari ostis poest 250(± 100) grammi sinki ja 15($\pm 0,1$) kilogrammi lillmulda. Mõlemad ostud sooritas ta 100 grammi täpsusega. Kui müüja kogemata 250 grammi singi asemel Marile 150 grammi kaalus ja ikkagi veerand kilo singi raha küsis, häirib see Marit ilmselgelt enam kui 100 grammi lillemullaga pettasaamine.

Ligikaudsete arvude võrdlemiseks suuruse poolest ei piisa ainuüksi absoluutse vea ülemmäära teadmisest. On veel vaja teada iga ühiku kohta tehtud viga. Selleks kasutame lähendi absoluutse vea ülemmäära ja lähendi jagatist.

Lähendi **relatiivseks ehk suhteliseks veaks** nimetatakse lähendi absoluutse vea ja

Positiivsete reaalarvude $a > 0$ korral võib defineerida ka astme mõiste suvalise ratsionaalarvulise astendajaga $\frac{p}{q}$. Kui $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{N}$, siis arvu a aste astendajaga $\frac{p}{q}$ defineeritakse valemiga

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

$$\text{Näiteks } 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}; \quad 8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{4}.$$

Samal ajal, vastavalt nõudele $a > 0$, ei oma mõtet aste $(-8)^{\frac{3}{4}}$, sest ei leidu reaalarvu, mille neljas aste oleks võrdne arvuga $(-8)^3 = -512$, st negatiivne.

Ülesanded

1. Arvuta peast.

- | | | |
|--------------|-------------------------------------|---|
| 1) -2^4 | 9) $25^2 - 5^2$ | 15) $5^3 \cdot 2^3$ |
| 2) $(-3)^3$ | 10) $21^2 - 1^2$ | 16) $25^3 \cdot 4^3$ |
| 3) $(-1)^2$ | 11) $13^2 - 12^2 + 11^2$ | 17) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ |
| 4) $(-15)^2$ | 12) $(2^2)^3$ | 18) $4^{\frac{1}{2}}$ |
| 5) -12^2 | 13) $\frac{(-2)^{17}}{(-2)^{15}}$ | 19) $27^{\frac{1}{3}}$ |
| 6) -4^3 | 14) $\frac{(-5)^{103}}{(-5)^{100}}$ | 20) $16^{\frac{1}{4}}$ |
| 7) $(-7)^0$ | | 21) $3^2 \cdot 9^{\frac{1}{2}}$ |
| 8) 0^0 | | |

2. Arvuta.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1) $-(-3)^2 - 3^2 - 1^4$ | 4) $-1^5 \cdot (-2)^4 \cdot (-3)^3$ |
| 2) $-\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ | 5) $-2^2 + (-6)^2 \cdot 2^0$ |
| 3) $-1 - (-1)^2 - 1^2 + (-1)^3 - 1^3$ | 6) $2^4 \cdot 3^2 + (-3^3) - (-2)^4$ |

3. Arvuta.

- | | | | |
|--------------------|--------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $\sqrt[4]{81}$ | 3) $\sqrt{(-2)^2}$ | 5) $\sqrt[4]{(-3)^4}$ | 7) $\sqrt[3]{(-2)^6}$ |
| 2) $\sqrt[3]{-64}$ | 4) $\sqrt{3^4}$ | 6) $\sqrt{144}$ | 8) $(\sqrt[12]{-1})^2$ |

4. Arvuta.

- | | | | |
|---------------------|--------------------------|-------------------------|------------------------|
| 1) $\log_{10} 1000$ | 3) $\log_3 27$ | 5) $\log_5 \frac{1}{5}$ | 7) $\log_{10} 0,00001$ |
| 2) $\log_2 64$ | 4) $\log_4 \frac{1}{16}$ | 6) $\log_4 2$ | 8) $\log_7 7$ |

5. Arvuta.

- 1) $(-16) + (-7) - (-7) - (+10) - (+4) + (+4)$

4. Jaota arv 210 neljaks osaks nii, et esimene osa moodustaks 0,4 kogu arvust, teine osa $\frac{1}{4}$ esimesest osast ja kolmas osa $\frac{3}{5}$ järelejäänud osast.

5. Leia arv, millest $\frac{3}{4}$ on 15.

Kahe tehete (4. klass)

Ühe tehete (6. klass)

$\frac{1}{4}$ otsitavast arvust on

Otsitav arv on

Selleks, et leida arvu tema murruga väljendatud osa järgi, tuleb see osa jagada antud murruga.

6. Kolm õpilaste gruppi puhastasid liuvälja. Esimene grupp puhastas $\frac{7}{12}$ kogu liuväljast, teine grupp $\frac{2}{3}$ ülejäänud osast ja kolmas grupp viimased 250 m². Arvuta liuvälja pindala.

7. 6a, 6b ja 6c klassi õpilased võtsid osa matemaatika olümpiaadist. $\frac{3}{8}$ osavõtjatest olid 6a klassist. 6b klassi osavõtjate arv moodustas $\frac{2}{3}$ 6a klassi osavõtjate arvust ja 6c klassis võttis osa 9 õpilast. Mitu kuuendate klasside õpilast võttis osa matemaatika olümpiaadist?

Ülesanded

- Linna matemaatikaolümpiaadi esimesest voorust osavõtjate arvust $\frac{2}{5}$ osal lubati osa võtta olümpiaadi teisest voorust, teisest voorust osavõtnute arvust aga $\frac{3}{8}$ osale anti preemiaid. Mitu inimest võttis osa esimesest voorust, kui preemiasaajaid oli 21 inimest?
- Tähesõidust osavõtjad läbisid esimesel päeval $\frac{3}{11}$ kogu teest, teisel päeval $\frac{7}{20}$ ülejäänud teest, kolmandal päeval $\frac{5}{13}$ uuest jäägist, neljandal päeval aga ülejäänud 320 km. Kui pikk oli tähesõidu tee?
- Esimesel päeval läbis auto $\frac{3}{8}$ kogu teest, teisel päeval $\frac{15}{17}$ sellest, mis ta läbis esimesel päeval ja kolmandal päeval ülejäänud 200 km. Kui suur oli bensiini kulu, kui 100 km tee kohta kulutab auto 8 l bensiini?
- Korteris on 3 tuba. Esimese toa pindala on $\frac{13}{36}$ kogu korteri pindalast ja on $24\frac{3}{8}$ m². Teise toa pindala on $8\frac{1}{8}$ m² suurem kui kolmanda toa pindala. Kolmandas toas tehakse uut põrandat. Kui palju läheb selle remondi jaoks $6\frac{1}{4}$ m pikkusi ja $\frac{1}{2}$ m laiusi laudu?
- Turist läbis esimesel päeval $\frac{10}{31}$ kogu teest, teisel päeval $\frac{9}{10}$ sellest, mis ta läbis esimesel päeval, kolmandal päeval aga ülejäänud teeosa, kusjuures ta kolmandal päeval läbis 12 km rohkem kui teisel päeval. Mitu kilomeetrit läbis turist igal päeval?
- Poiss luges alguses läbi $\frac{4}{15}$ kogu raamatust, siis veel $\frac{4}{9}$ jäägist, peale seda ta arvutas, et on lugenud 25 lehekülge rohkem, kui järele jäänud. Mitu lehekülge on raamatus?

Paarisarvulise juuriija $n = 2k$ korral tekib juure leidmisel ka positiivsest arvust üks iseärasus. Lähtudes ülalantud juure definitsioonist, oleks näiteks juurel $\sqrt{9}$ kaks erinevat väärtust 3 ja -3 , sest nii $3^2 = 9$ kui ka $(-3)^2 = 9$. Et juurimistehe paarisarvulise juuriija korral oleks samuti üheselt defineeritud, võetakse kasutusele aritmeetilise juure mõiste. **Aritmeetiliseks n -astme juureks** mittenegatiivsest reaalarvust $b \geq 0$ nimetatakse mittenegatiivset reaalarvu $a \geq 0$, mille korral $a^n = b$. Järelikult muutub juurimine üheks tehteks, kui paarisarvulise juuriija korral vaadelda vaid aritmeetilist juurt, paaritu arvulise juuriija korral aga lähtuda juure üldisest definitsioonist. Seega

$$\sqrt[n]{a^{2k}} = |a|.$$

Näited.

- 1) $\sqrt{4} = 2$, 2) $\sqrt[3]{a^3} = a$, 3) $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, 4) $\sqrt[3]{-0,001} = -0,1$; 5) $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$;
6) $\sqrt[2k]{(b)^{2k}} = |b|$, 7) $\sqrt[2k+1]{(c)^{2k+1}} = c$.

Logaritm.

Astendamisel on lisaks juurimisele veel teinegi pöördtehe – logaritmine. Kui reaalarvude a ja b korral kehtib võrdus $a^n = b$, siis öeldakse, et arv n on arvu b **logaritm** alusel a ja kirjutatakse

$$n = \log_a b.$$

Arvu a nimetatakse **logaritmi aluseks** ja arvu b **logaritmitavaks**. Logaritmi aluseks võib olla suvaline arv $a \neq 1$. Kui alus $a = 10$, siis nimetatakse vastavat logaritmi **küm-nendlogaritmiks** ja tähistatakse sümboliga $\log b$. Kui aluseks on arv $e = 2,71828 \dots$, siis nimetatakse vastavat logaritmi **naturaallogaritmiks** ja tähistatakse sümboliga $\ln b$.

Astme mõiste üldistamine.

Reaalarvu a aste a^n on seni defineeritud vaid ühest suurema naturaalarvulise astendaja n korral. Järgnevad definitsioonid võimaldavad lisaks eelnevale arvutada mistahes reaalarvu a ($a \neq 0$) astet ka mistahes täisarvulise astendaja $p \in \mathbb{Z}$ korral, kui $p \in \{1; 0; -1; -2; \dots\}$.

1. Kui $p = 1$, siis $a^1 = a$. (Mistahes arv astmel 1 on võrdne selle arvu endaga.)

$$\text{Näiteks } (-2)^1 = -2; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Kui $p = 0$, siis $a^0 = 1$. (Mistahes arv $a \neq 0$ astmel 0 on võrdne ühega.)

$$\text{Näiteks } 5^0 = 1; \quad [0, (5)]^0 = 1.$$

3. Kui täisarv $p < 0$, siis $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$.

$$\text{Näiteks } 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}; \quad (-3)^{-1} = \frac{1}{(-3)^1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2};$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^{-4} = (-10)^4 = 10^4 = 10\,000.$$

Rõhutagem veelkord, et arvu 0 astet 0^0 ei defineerita.

Täisarvude järjestamine.

Kahest täisarvust loetakse suuremaks see, mille kujutis asetseb arvteljel teisega võrreldes positiivses suunas. Näiteks $-2 > -5$ ehk $-5 < -2$; $-5 < 0$ ja $-3 < 2$. Seega

- 1) iga positiivne arv on suurem igast negatiivsest arvust;
- 2) iga positiivne arv on suurem kui 0 ja iga negatiivne arv on väiksem kui 0;
- 3) kahest negatiivsest arvust on suurem see, mille absoluutväärtus on väiksem (mille kujutis on nullpunktile lähemal).

Tehted täisarvudega.

Kahe samamärgilise täisarvu summa on liidetavatega samamärgiline täisarv, mille absoluutväärtus võrdub liidetavate absoluutväärtuste summaga.

Kui $a > 0$ ja $b > 0$, siis $-a + (-b) = -(a + b)$.

Kahe erimärgilise ja erineva absoluutväärtusega täisarvu summal on suurema absoluutväärtusega liidetava märk ja summa absoluutväärtus võrdub liidetavate absoluutväärtuste vahega.

Kui $a > 0$ ja $b > 0$, siis $a > b$ korral $a + (-b) = a - b$,
 $a < b$ korral $a + (-b) = -(b - a)$.

Kahe vastandaru summa on null.

$$a + (-a) = 0$$

Et lahutada arvust a arv b , tuleb arvuga a liita arvu b vastandaru.

$$a - b = a + (-b)$$

Mitmetehtelistes ülesannetes

- 1) asendame iga lahutamistehte vastandaru liitmisega;
- 2) jätame saadud summas ära kõik sulud koos nende ees olevate liitmismärkidega;
- 3) saadud summas loeme esinevad märgid liidetavate märkideks.

Näide.

$$\begin{aligned} & (-2) + (-3) - (-7) - (+6) + (+4) - (+3) = \\ & = (-2) + (-3) + (+7) + (-6) + (+4) + (-3) = \\ & = -2 - 3 + 7 - 6 + 4 - 3 = -3 \end{aligned}$$

Täisarvude korrutamise ja jagamise korral korral kehtivad järgmised omadused:

1. Kahe samamärgilise arvu korrutis (jagatis) on positiivne arv, mille absoluutväärtus võrdub nende arvude absoluutväärtuste korrutisega (jagatisega).
2. Kahe erimärgilise arvu korrutis (jagatis) on negatiivne arv, mille absoluutväärtus võrdub nende arvude absoluutväärtuste korrutisega (jagatisega).
3. Kahe arvu korrutis (jagatis) on null, kui vähemalt üks tegur on null. Nulli jagamisel mistahes nullist erineva arvuga on jagatis võrdne nulliga. Nulliga jagamine ei ole võimalik.

Selleks, et leida protsente antud arvust, tuleb

- 1) avaldada protsendid hariliku murruna või kümnendmurruna;
- 2) korrutada saadud murd antud arvuga.

Näide. Leiame 10% arvust 6,2.

Selleks teisendame 10% kümnendmurruks ja arvutame $0,1 \cdot 6,2 = 0,62$.

Näide. Leiame 10% arvust $\frac{7}{8}$.

Selleks teisendame 10% harilikuks murruks ja arvutame $\frac{1}{10} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{80}$.

Selleks, et leida arvu (tervikut) tema protsentidega väljendatud osa järgi, tuleb

- 1) avaldada protsendid hariliku murruna või kümnendmurruna;
- 2) jagada antud osa saadud murruga.

Näide. Leiame arvu, millest 9% on 8,1.

Otsitav arv on $8,1 : 0,09 = 810 : 9 = 90$.

Taskuarvutiga arvutamisel avaldatakse protsendid tavaliselt kümnendmurruna, kirjalikul arvutamisel hariliku murruna ning peast arvutamisel lahendatakse ülesanne kahe tehtega.

Ülesanne. Leiame 15% 300-st

Peast	Kümnendmurruna	Hariliku murruna
-------	----------------	------------------

Ülesanne. Leiame arvu, millest 18% on 36

Peast	Kümnendmurruna	Hariliku murruna
-------	----------------	------------------

Näide. Kui palju maksab 30 000 kroonine arvuti pärast 15%list allahindlust?

I lahendus

1) Mitu krooni alandati hinda?
 $15\% \cdot 30\,000\text{-st on } 0,15 \cdot 30\,000 = 4500 \text{ (kr)}$

2) Kui palju maksab arvuti pärast allahindlust?
 $30\,000 - 4500 = 25\,500 \text{ (kr)}$

II lahendus

1) Mitu protsenti moodustab uus hind vanast hinnast?
 $100\% - 15\% = 85\%$

2) Kui palju maksab arvuti pärast allahindlust?
 $0,85 \cdot 30\,000 = 25\,500 \text{ (kr)}$

Vastus. Pärast allahindlust maksab arvuti 25 500 krooni.

Näide. Uuest aastast tõuseb Kaire palk 10%. Kui suur on tema palk uuel aastal, kui praegune palk on 5600 krooni?

I lahendus

1) Mitme krooni võrra tõuseb palk?
 $10\% \cdot 5600\text{-st on } 0,1 \cdot 5600 = 560 \text{ (kr)}$

2) Kui suur on palk pärast palgatõusu?
 $5600 + 560 = 6160 \text{ (kr)}$

II lahendus

1) Mitu protsenti moodustab uus palk vanast palgast?
 $100\% + 10\% = 110\%$

2) Kui suur on palk pärast palgatõusu?
 $1,1 \cdot 5600 = 6160 \text{ (kr)}$

Vastus. Uuel aastal on Kaire palk 6160 krooni.

Näide. Liha kaotab keetmisel 35% oma massist. Kui palju tuleb võtta toorest liha, et saada 2,6 kg keedetud liha?

Antud on 2,6 kg keedetud liha, mis on osa toorest lihast (tervikust). Terviku leidmiseks tuleb kõigepealt leida osale vastav protsent.

Mitu protsenti moodustab keedetud liha toorest lihast?

$$100\% - 35\% = 65\%$$

Kui palju tuleb võtta toorest liha?

$$65\% \text{ on } 2,6. \text{ Tervik on } 2,6 : 0,65 = 260 : 65 = 4 \text{ (kg)}$$

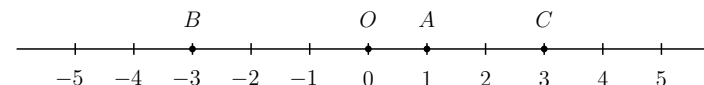
Vastus. Et saada 2,6 kg keedetud liha, tuleb võtta 4 kg toorest liha.

Negatiivsed arvud

Mitmeid suurusi mõõdetakse teatavast kohast alates kahes vastassuunas (näiteks kõrgus merepinnast, temperatuur). Selleks lepitakse kokku koht, millest alates mõlemas suunas mõõtma hakatakse (kõrguste ja sügavuste mõõtmise korral merepind, temperatuuri korral jää sulamistemperatuur). Ühes suunas mõõdetavaid suurusi tähistatakse arvudega, mille ette on kirjutatud plussmärk, teises suunas mõõdetavaid suurusi arvudega, mille ette on kirjutatud miinusmärk (sooja- ja külmakraadid, varandus ja võlg). Miinusmärgiga arvud on negatiivsed arvud, plussmärgiga arvud on positiivsed arvud. Arv 0 ei ole positiivne ega negatiivne.

Naturaalarvu a **vastandaruks** $-a$ nimetatakse arvu, mille summa antud arvuga a on võrdne nulliga. Seega $a + (-a) = 0$. Hulka, mis koosneb naturaalarvudest $1, 2, 3, \dots$, nende vastandaruudest $-1, -2, -3, \dots$ ja arvust 0, nimetatakse **täisarvude hulgaks** ja tähistatakse sümboliga $\mathbb{Z}$. Hulk $\mathbb{Z}$ on kinnine liitmise lahutamise ja korrutamise suhtes. Jagamine ei ole täisarvude hulgal alati teostatav.

Täisarvude kujutamiseks arvteljel joonestame sirge ja märgime sellel punkti O , mis on arvtelje nullpunktiks. Punktist O vasakule ja paremale kanname võrdse pikkusega ühiklõike. Punktist O paremale jääval kiirel näitame noolega positiivse suuna ning sellel kujutame positiivseid arve. Punktist O vasakule jääb aga negatiivne suund ja sellel kujutame negatiivseid arve. Iga jaotuspunkti juurde kirjutame nullist paremale liikudes positiivsed arvud $1, 2, 3, \dots$, nullpunktist vasakule liikudes aga negatiivsed arvud $-1, -2, -3, \dots$.

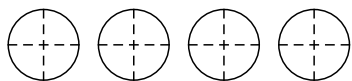


Punkti koordinaadiks arvteljel nimetatakse arvu, mida arvtelje punkt kujutab. Koordinaate märgitakse järgmiselt: $A(1)$; $O(0)$; $B(-3)$; $C(3)$ jne. Vastandaruude kujutised asetsevad arvteljel sümmeetriliselt nullpunkti suhtes.

Arvu absoluutväärtus.

Arvu absoluutväärtus on seda arvu arvteljel kujutava punkti kaugus nullpunktist. Arvu a absoluutväärtust tähistatakse sümboliga $|a|$. Nulli või positiivse arvu absoluutväärtus on arv ise: kui $a \geq 0$, siis $|a| = a$. Negatiivse arvu absoluutväärtus on arvu vastandaru: kui $a < 0$, siis $|a| = -a$.

Jagamistehet võib vaadelda kui mahutamist: Mitu veerandit on 4 ringis?



$$4 \cdot 4 = 16$$

$$4 : \frac{1}{4} = 16$$

Naturaalarvu jagamisel murruga $\frac{1}{n}$ korrutame seda pöördarvuga n .

$$14 : \frac{1}{3} = 14 \cdot 3 = 42$$

Hariliku murru jagamine hariliku murruga.

Selleks, et jagada harilikku murdu hariliku murruga, tuleb jagatav korrutada jagaja pöördarvuga.

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2 \cdot \cancel{6}^2}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Segaarvude jagamisel teisendame esmalt segaarvud liigmurdudeks ning seejärel jagame.

$$4\frac{2}{3} : 1\frac{3}{4} = \frac{14}{3} : \frac{7}{4} = \frac{14}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{\cancel{14}^2 \cdot 4}{3 \cdot \cancel{7}_1} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$8 : 1\frac{3}{5} = 8 : \frac{8}{5} = 8 \cdot \frac{5}{8} = \frac{\cancel{8}^1 \cdot 5}{\cancel{8}_1} = 5$$

Ülesanded

- Leida 72% arvust $\frac{(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}) : 2\frac{2}{3}}{0,04}$.
- Mitu protsenti moodustab arv $2\frac{9}{20}$ arvust $\left(\frac{0,012}{5} + \frac{0,04104}{5,4}\right) \cdot 4560 - 42\frac{1}{3}$?
- Leida arv, millest 25% on $100^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{10^5} + 16^{0,25} \cdot 8^0 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} + 0,04^{-\frac{1}{2}}$.
- Mitme protsendi võrra on arv 30 suurem arvust $0,125^{-\frac{1}{3}} - 0,81^{-\frac{1}{2}} + 0,027^{-\frac{2}{3}}$?
- Pärast kuivamist jäi 20 kg seebist järele 18 kg seepi. Mitu protsenti vähenes seebi mass?
- Kui palju leiba saab 8 kg rukkijahust, kui leiva valmistamisel on massi juurdekasv 45%?
- Kaup koos veoga läks maksma 394 krooni ja 20 senti, kusjuures veokulud moodustasid 8% kauba hinnast. Kui palju maksis kaup ilma veokuludeta?
- Esimeses trükis maksis raamat 50 krooni, teises trükis oli sama raamat 40% odavam kui esimeses ja kolmandas trükis 40% kallim kui teises. Kui palju maksab raamatu kolmas trükk?
- Kaupluses müüdi esimesel päeval 15% saabunud kaubast ja teisel päeval 20% ülejäägist. Mitu protsenti sellest kaubast jäi veel müüa?
- Kui arvust lahutada kõigepealt 10% temast endast, siis 25% saadud jäägist ja seejärel veel 20% viimasest jäägist, jääb järele 27. Leida see arv.
- Esimene arv on teisest 30% võrra suurem. Mitme protsendi võrra on teine arv esimesest väiksem?
- Mitme protsendi võrra suureneb murd, kui nimetajat vähendada $k\%$ võrra ($0 < k < 100$)?
- Värsked seemned sisaldavad 90% vett, kuivatatud seemned aga 12%. Kui palju kuivatatud seemni saab 22 kg värsketest seentest?
- Mitmeprotsendiline väävelhappelahus saadakse, kui 2 kg vett valatakse 8 kg 70-protsendilisele väävelhappele?
- Kui palju vett on vaja välja aurutada 800 grammist 10-protsendilisest soolalahusest, et saada 16-protsendiline soolalahus?
- Kütusefirma ostis 24 000 liitrit bensiini ning vedas selle oma tanklasse. Veokulud moodustasid 10% ostuhinnast. Müünud ära kogu bensiini hinnaga 6 krooni ja 60 senti liiter, sai firma 20% kasumit. Leida ühe liitri bensiini ostuhind.
- Summast 10 000 krooni toob üks osa igal aastal tulu 300 krooni ja teine osa vastavalt 240 krooni tulu. Teiselt osalt saadakse tulu 1% rohkem kui esimeselt. Mitu protsenti tulu toob kumbki osa aastas?
- Särgi hinda alandati $a\%$ võrra ja siis veel kord $a\%$ võrra. Leida a , kui kokkuvõttes alanes särgi hind 36%.
- Kui palju vaske on vaja lisada 810 g kullale prooviga 900, et saada kulda prooviga 750?

20. Tööpäeva lühendati kaheksalt tunnilt seitsmele. Mitu protsenti tuleb tõsta tööviljakust, et samade tööhinnete juures tõuseks palk 5%?

Aavo Lind

Ülesanded süvendatud tööks matemaatikas. I osa. Tln. 1995

192. Kassast anti välja esmalt $\frac{3}{11}$ kogu olemasolevast rahast, siis $\frac{1}{4}$ ülejäänud rahast, siis $\frac{2}{7}$ uuest ülejäägist ja lõpuks veel $\frac{7}{9}$ kolmandast jäägist. Pärast seda jäi kassasse veel 660 kr. Kui suur summa oli kassas esialgu?
195. Üks tehas täidaks tellimuse 6 kuuga, teine 4 kuuga. Mitme kuuga täidaksid sama tellimuse tehased koos töötades?
196. Sooja vee kraani kaudu täituks vann teatud kõrguseni $12\frac{1}{2}$ minutiga, külma vee kraani kaudu sama kõrguseni 10 minutiga. Mõlemad kraanid avatakse korraga $2\frac{1}{2}$ minutiks ja suletakse siis sooja vee kraan. Missuguse aja vältel täitub nüüd vann külma vee kraani kaudu sama kõrguseni?
200. Auto sõitis esimesel tunnil $\frac{2}{7}$ kahe linna vahelisest teest, teisel tunnil $\frac{7}{13}$ ülejäänud teest ja kolmandal tunnil viimased 90 km. Leia linnadevaheline kaugus.
214. Tõnu suvine teenistus oli 1800 kr. Sellest kulutas ta 25% arvuti ostmiseks ja 7,5% muudeks koolitarveteks. Kui palju raha jäi tal üle?
215. Nisuteradest saab 80% jahu. Saia küpsetamisel suureneb mass kasutatud jahuga võrreldes 35%. Kui palju saia saab 80 kg teradest?
216. Maatüki pindala on 0,4 ha. Sellest on 20% ehituste all. Ülejäänud pinnast on 65% puuviljaia all. Kui suur on puuviljaaed?
217. Päevalilleseemneist saab 70% puhastatud teri. Teradest saab omakorda 36% õli. Kui palju vajatakse seemneid, et saada 0,84 ts õli?
218. Kahe arbuusi mass on 6,23 kg. Leia kummagi arbuusi mass, kui ühe mass on 75% teise massist.
219. Riis sisaldab 75% tärklist aga oder 60%. Kui palju on vaja võtta riisi, et saada sama palju tärklist, kui 15 kg odrast?
227. Ehitusele toodi esimesel päeval 28% vajalikust materjalist ja teisel päeval 25% ülejäänud osast. Mitu protsenti materjalist jäi veel tuua?
228. Kasukas maksis 4000 kr. Esimesel ümberhindlusel alandati selle hinda 8% võrra, teisel ümberhindlusel veel 10% võrra. Kui palju maksis kasukas pärast teist ümberhindlust?
229. Arbuusi hind oli 24 kr kilogramm. Mõne aja pärast alanes see 15% võrra ja varsti veel 20% võrra. Milline on nüüd arbuusi hind?
232. Kummal juhul alaneb eseme hind rohkem, kas siis, kui algul alandatakse hinda 10% võrra ja siis veel 20% võrra, või siis, kui algul alandatakse hinda 20% võrra ja siis 10% võrra?

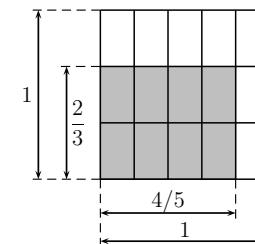
2. Korrutame naturaalarvuga eraldi segaarvu täisosa ja murdosa.

$$2 \cdot 3\frac{1}{4} = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{4}\right) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 6 + \frac{2 \cdot 1}{4} = 6\frac{1}{2}$$

Hariliku murru korrutamine hariliku murruga.

Kahe hariliku murru korrutis võrdub murruga, mille lugejaks on antud murdude lugejate korrutis ja nimetajaks nimetajate korrutis.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$



Segaarvude korrutamiseks

1) teisendame segaarvud liigmurdudeks;

2) korrutame murrud.

$$2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2\cancel{8} \cdot 5}{3 \cdot \cancel{4}_1} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Murdude korrutamisel jäävad kehtima

korrutamise vahetuvusseadus (kommutatiivsus) $a \cdot b = b \cdot a$,

korrutamise ühenduvusseadus (assotsiatiivsus) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

korrutamise jaotuvusseadus (distributiivsus) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Pöördarvu leidmine.

Vahetades murrus $\frac{a}{b}$ lugeja ja nimetaja, saame esialgse murru pöördarvu $\frac{b}{a}$.

Näiteks murru $\frac{3}{4}$ pöördarv on $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, naturaalarvu $6 = \frac{6}{1}$ pöördarv on $\frac{1}{6}$, segaarvu $4\frac{1}{5} = \frac{21}{5}$ pöördarv on $\frac{5}{21}$.

Murru jagamine naturaalarvuga. Naturaalarvu jagamine murruga, mille lugeja on 1.

Murru jagamiseks naturaalarvuga korrutame murru naturaalarvu pöördarvuga või, kui võimalik, jagame murru lugeja naturaalarvuga.

$$\frac{1}{3} : 7 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 7} = \frac{1}{21}$$

$$\frac{4}{7} : 2 = \frac{4 : 2}{7} = \frac{2}{7}$$

Puhtperioodilise lõpmatu kümnendmurru murdosa teiseneb harilikuks murruks, mille lugejaks on kümnendmurru periood, nimetajaks aga arv, mis on kirjutatud nii mitme 9-ga, kui mitu kohta on perioodis.

Ülesanne. Teisenda kümnendmurrud $0,_{(18)}$; $2,_{(6)}$ ja $3,_{(123)}$ harilikeks murdudeks.

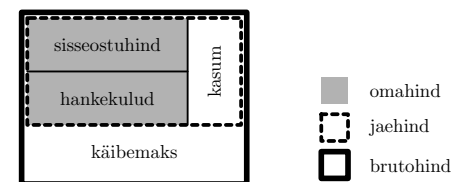
Segaperioodilise lõpmatu kümnendmurru murdosa teiseneb harilikuks murruks, mille lugeja leidmiseks tuleb arvust, mis seisab murdosa alguses pärast koma kuni teise perioodini, lahutada arv, mis seisab kohe pärast koma kuni esimese perioodini; nimetajasse tuleb kirjutada arv, mis algab nii mitme 9-ga, kui mitu numbrit on perioodis, ja lõpeb nii mitme 0-ga, kui mitu numbrit seisab pärast koma esimese perioodi ees.

Ülesanne. Teisenda kümnendmurrud $0,3_{(18)}$; $2,3_{(6)}$ ja $0,11_{(3)}$ harilikeks murdudeks.

Rahandusküsimusi koolimatemaatikas

8.1. Kauba hinna kujunemine

Kauba hinna aluseks on kaubatootja määratud müügihind, mis kaupluse jaoks on **sisseostuhind**. Sellele tuleb lisada hankekulud, mis tekivad kauplusel näiteks kauba transportimisel, ruumide üürimisel, kütte ja elektri eest maksmisel, ametnikele palgade maksmisel jm. Hankekulud võivad olla näiteks 35% sisseostuhinnast. Nii kujuneb kaupluse **omahind**. Omahinnale lisatakse kaupluse kasum (näiteks 15%) ja nii saadakse kauba **jaehind**. Viimasele pannakse veel juurde käibemaks (Eestis 18%²) ja saadakse kauba lõpphind ehk **brutohind**. Brutohinna maksabki kinni kauba ostja.³



Ülesanded

1. Kauba sisseostuhind on 230 kr, kaupluse kasum 13% ja hankekulud 25%. Arvuta müügihind.
2. Kauplus müüb kaupa hinnaga 550 kr. Kui suur on kaupluse sisseostuhind, kui kasum on 15% ja hankekulud 20%?
3. Juurviljakaupluse omanik Peeter Porgand ostis talumehelt 3 tonni kartuleid hinnaga 2 kr kilogramm. Kartulite kauplusse toomiseks 25 km kauguselt talust üüris ta auto. Vedu maksis 4 kr/km pluss 65 kr ühe tunni seisu eest. Mõlemalt summalt tuli maksta ka 18% käibemaksu. Muudeks hankekuludeks arvestab Peeter Porgand 20% sisseostuhinnast. Kasumit soovib ärimees saada 25% omahinnast. Milliseks kujuneb kartuli brutohind, kui see sisaldab ka käibemaksu?

²Käibemaksu makstakse lisandunud väärtuselt, sisseostuhinna ja väljamüügihinna vahelt.

³A. Telgmaa, Rahandusküsimusi koolimatemaatikas, Avita, 1997.

4. Linnamees Lennart Linnaste ostis Peeter Porgandi kauplusest 100 kg kartuleid (vt ülesanne 3), millest 5% osutus kõlbmatuks. Kui palju maksis Lennart toidukõlbliku kartuli kilogrammi eest? Kas linnamehel oleks tasunud sõita oma autoga talumehe juurest kartuleid tooma, kui arvestada, et ta oleks siis ostanud 100 kg ainult toidu-kõlblikku kartulit ja et auto bensiinikulu on 8 l/100 km hinnaga 15 kr/l?
5. Ostetakse paar saapaid brutohinnaga 2500 kr.
 - 1) Milline on saabaste jaehind?
 - 2) Kui suur on kaupluses saapapaari omahind ja sisseostuhind, kui kasum on 15% ja hankekulud 25%?
 - 3) Mitu krooni saab kauplus iga saapapaari müügist kasumit?
6. Firma kuulutab ajalehes, et ta müüb üht ja sama marki autopahatlit Super järgmiste hindadega: purk 0,6 kg – 79 kr, purk 1,0 kg – 92 kr, purk 2,0 kg – 167 kr. Teatatakse ka, et kõik hinnad sisaldavad käibemaksu.
 - 1) Millised oleksid pahatli hinnad ilma käibemaksuta?
 - 2) Kui palju maksaks iga purk pahatlit siis, kui hind oleks võrdeline purgi massiga, kuid 1 kg hind on endine?
 - 3) Kui palju maksaks iga purk pahatlit siis, kui hind oleks võrdeline purgi massiga, kuid 3 purgi koguhind oleks endine?
 - 4) Mitu protsenti hoiab ostja raha kokku, kui ta ostab kahe 1,0 kilogrammise purgi asemel 2,0 kg kaaluva purgi?
 - 5) Mitu protsenti kaotab 0,6 kg kaaluva purgi ostja, võrreldes punktis 2) arvutatud hinnaga?
7. Auto bensiinikulu on 10 l/100 km. Paagis on bensiin hinnaga 16,10 kr/l. Sama hinnaga müüakse bensiini ka koduasulas. 25 km kaugusel naaberasulas aga on bensiini hind 15,40 kr/l. Kui suure bensiinikoguse järele tasub naaberasulasse sõita
 - 1) eeldusel, et paaki bensiini ei lisata;
 - 2) eeldusel, et sinna sõites saab paak parasjagu tühjaks?
8. Kauba hinda tõsteti 15%, mille tulemusel ostmine vähenes 10%. Mitu protsenti muutus tarbija väljaminek selle kauba ostmisel?

	Kauba hind (kr/üh)	Tarbimine (üh)	Väljaminek (kr)
Lähteseis	a	b	ab
Muutus ($\pm\%$)	+15%	-10%	$x\%$
Lõppseis	$1,15a$	$0,9b$	$0,9 \cdot 1,15ab$
9. Kaubaartikli hinda tõsteti 15%. Mitu protsenti tuleb selle kauba tarbimist vähendada, et rahalised väljaminekud ei muutuks?
10. Teatri pileti hind tõusis 10%, mille tulemusel külastajate arv vähenes 8%. Mitu protsenti muutus (suurenes, vähenes) piletimüügist laekuv rahasumma?

Lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks nimetatakse kümnendmurdu, mille murdosas mingi number või numbrite rühm kordub. Korduvat numbrite rühma nimetatakse perioodiks. Kui periood algab vahetult pärast koma, siis nimetatakse kümnendmurdu puhtperioodiliseks, vastasel korral aga segaperioodiliseks.

Näiteks $0,(3) = 0,333\dots$ ja $42,(789) = 42,789789789\dots$ on lõpmatud puhtperioodilised kümnendmurrud vastavalt perioodidega 3 ja 789. Murd $3,42(15) = 3,42151515\dots$ on aga segaperioodiline kümnendmurd perioodiga 15.

Kui korduvat numbrite rühma lõpmatu kümnendmuru murdosas ei leidu, kõneldakse ka **mitteperioodilisest kümnendmurrust**.

Näiteks $\pi = 3,1415926535897932384626433832795\dots$ on mitteperioodiline kümnendmurd.

Iga lõplikku kümnendmurdu võib vaadelda lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

Näiteks $2,35 = 2,350000\dots = 2,35(0)$.

Hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks jagame murru lugeja nimetajaga. Kui taandumatu hariliku murru nimetaja tegurite hulgas esinevad algarvudest ainult 2 ja 5, siis teiseneb harilik murd lõplikuks kümnendmurruks. Kui taandumatu hariliku murru nimetajas esineb tegurina mistahes algarve peale 2 ja 5, teiseneb harilik murd lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks.

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4 \text{ (lõplik kümnendmurd)}$$

$$\frac{2}{15} = 2 : 15 = 0,1333\dots = 0,1(3) \text{ (lõpmatu perioodiline kümnendmurd)}$$

$$\frac{2}{7} = 2 : 7 = 0,(285714) \text{ (lõpmatu perioodiline kümnendmurd)}$$

Lõpliku kümnendmuru murdosa teisendamisel harilikuks murruks kirjutame lugejaks kümnendmuru murdosa ja nimetajaks arvu 1 nii mitme nulliga, kui mitu kümnendkohta on kümnendmurrus. Võimaluse korral taandame.

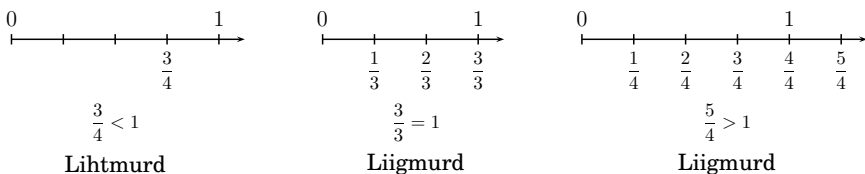
Ülesanne. Teisenda kümnendmurrud 0,75; 2,6 ja 3,0004 harilikeks murdudeks.

Iga naturaalarv on esitatav hariliku murruna.

Näiteks $6 = \frac{6}{1}$, $4 = \frac{8}{2}$, $7 = \frac{21}{3}$, $7 = \frac{49}{7}$.

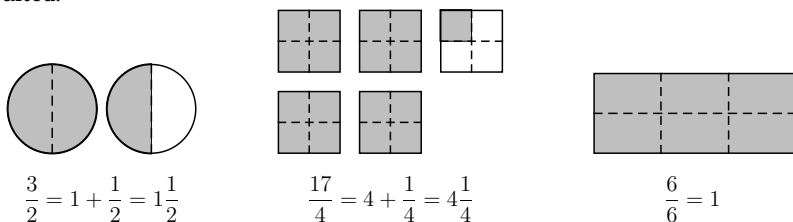
Murdu, mille lugeja on väiksem nimetajast ($a < b$), nimetatakse **lihtmurruks**.

Murdu, mille lugeja ei ole väiksem nimetajast ($a \geq b$) nimetatakse **liigmurruks**.



Iga liigmurdu saab vaadelda naturaalarvu ja lihtmuru summana. Selline summa kirjutatakse tavaliselt ilma plussmärgita. Saadud arvu nimetatakse **segaarvuks**. Segaarv koosneb täisosast ja murdosast.

Näited.

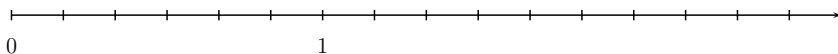


Iga segaarv on esitatav liigmurruna ja vastupidi.

Ülesanne. Teisenda murd $\frac{47}{4}$ segaarvuks.

Ülesanne. Teisenda segaarv $5\frac{2}{3}$ liigmurruks.

Ülesanne. Kanna arvkiirele murrud $1\frac{5}{6}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$.



Näeme, et liitintresse kandev kapital kasvab kiiremini, kui lihtintresse kandev kapital.

Kui laenu tähtaeg ei väljendu täisaastates, siis tekib vajadus arvutada intresse ka kuude või päevade järgi. Kuu intressimäära saamiseks jagatakse aasta intressimäär arvuga 12 ja päeva intressimäära saamiseks arvuga 360. (Rahanduses loetakse kuu pikkuseks tavaliselt 30 päeva ja aasta pikkuseks 360 päeva.)

Ülesanded

- Karla laenas Hugole 500 krooni 7 kuuks. Lihtintressimäär on 8%. Kui suure summa saab Karla tähtaja lõpul võlgnikult tagasi?
- Laenuleping sõlmiti 5000 krooni peale 14. detsembril 2003. a. tähtajaga 25.06.2007 ja lihtintressimääraga 6%. Kui suure summa peab võlgnik tähtajaks tagastama?
- Avalda valemist (8.1) a) algkapital k , b) intressimäär p , c) aeg t .
- Mitu aastat peab olema hoiul 10 000 krooni, et see kasvaks 12 000 kroonini, kui lihtintressimäär on 8%?
- Kui suur peab olema lihtintressimäär, et 5000 krooni kasvaks 3,5 aastaga 6000 kroonini?
- Avalda valemist (8.2) a) algkapital k , b) intressimäär p , c) aeg t .
- Korteri eest maksti 600 000 krooni. Kui suure summa eest saab selle korteri 10 aasta pärast maha müüa, kui selle hind tõuseb igal aastal 5%, võrreldes eelmise aasta hinnaga?
- Linnas on 80 700 elanikku. Kui suureks võib prognoosida selle linna elanike arvu 25 aasta pärast, kui linna elanike üldiive (loomulik iive koos sisserändega) on 8% aastas?
- Perre sünnib poeg. Isa lubab suure rõõmuga teha pojale 20. sünnipäevaks 100 000-kroonise kingituse. Kui suur algkapital tuleb hoiustada intressimääraga 8% eeldusel, et sellele vahepeal juurdemakseid ei tehta?
- Jüri tahab hoiustada 50 000 krooni nii, et see kasvaks 5 aastaga 70 000 kroonini. Misuguse intressimääraga pank tuleks valida?
- Kauba hind kahekordistus 5 aastaga. Mitu protsenti tõusis kauba hind igal aastal võrreldes eelmise aastaga?
- Kui pika aja vältel kauba hind kahekordistub, kui iga-aastane hinnatõus on 8%?
- Kui pika aja vältel hoius kümnekordistub, kui intressimäär on 10% aastas?

8.4. Laenu kustutamine

Laenu tagasimaksmine võlausaldajale on laenu kustutamine. Enamasti toimub laenu kustutamine osade kaupa kindlate ajavahemike tagant tehtavate tagasimaksetena. Iga tagasimakse sisaldab konstantse kustutussumma ja vajalikud intressid.

Näide. Paul Pöldur laenas oma naabrile 2 aastaks 12 000 krooni lihtintressimääraga 6% aastas. Kokkuleppe kohaselt tuleb laen tagasi maksta võrdsetes osades koos intressidega iga 3 kuu tagant. Kui suur peaks olema igakordne tagasimakse?

Tagasimakseid tuleb teha 8 korda. Igakordne kustutussumma on $12\,000 : 8 = 1500$ (kr). Igakordsele kustutussummale tuleb lisada ainult need intressid, mida veel maksmata laen kannaks tähtaja lõpuni. Kolme kuu intressimäär on $6\% : 4 = 1,5\% = 0,015$.

I tagasimakse $1500 + 0,015 \cdot 12\,000 = 1500 + 180 = 1680$ (kr), jääk $12\,000 - 1500 = 10\,500$ (kr).

II tagasimakse $1500 + 0,015 \cdot 10\,500 = 1500 + 157,5 = 1657,5$ (kr), jääk $10\,500 - 1500 = 9000$ (kr).

III tagasimakse $1500 + 0,015 \cdot 9000 = 1500 + 135 = 1635$ (kr), jääk $9000 - 1500 = 7500$ (kr). jne.

Tulemusena saame laenukustutustabeli:

Võlg	Intress	Kustutus	Kokku
12 000	180,00	1500	1680,00
10 500	157,50	1500	1657,50
9000	135,00	1500	1635,00
7500	112,50	1500	1612,50
6000	90,00	1500	1590,00
4500	67,50	1500	1567,50
3000	45,00	1500	1545,00
1500	22,50	1500	1522,50
Kokku:	810,00	12 000	12810,00

Ülaltoodud laenugraafiku korral kustutussumma on igal maksel konstantne, intressid vähenevad, seega ka kogumakse iga maksekorraga väheneb. Sellist laenugraafikut nimetatakse **fikseeritud põhiosaga laenugraafikuks**. Enamasti koostavad pangad kliendile **annuiteetgraafiku**, mille korral kogumakse on konstantne. Konstantse tagasimakse suuruse saab arvutada valemiga

$$y = \frac{Y(q-1)q^t}{q^t - 1},$$

kus Y on laenu suurus, tagasimaksed toimuvad võrdsete perioodide järel t perioodi vältel (seega t korda) intressimääraga $p\%$ perioodi kohta, $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Näide. Kui naaber sooviks 12 000 krooni suurust laenu tagasi maksta annuiteetgraafiku alusel, oleks eelmise näite andmetel ühe perioodi intress $6\% : 4 = 1,5\%$ ning igas

Naturaalarvude hulga laiendamine murdarvudega

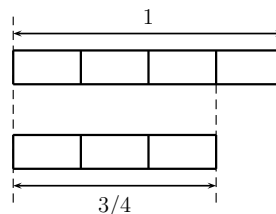
Esimesed teated murdarvude kasutamise kohta pärinevad praeguse Pakistani ja Lääne-India aladelt, Induse jõe orust 2600. aastast e Kr, kus kümnendmurde kasutati mõõtühikutena. Umbes 2000.-1700. aastast e Kr pärinevalt Ahmese ehk Rhindi papüüruselt võib välja lugeda, et Egiptuses kasutati murde lugejaga 1 ning erandina oli tähis olemas ka $2/3$ jaoks. Näiteks $\frac{23}{40}$ kirjutasi nad kujul $\frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{8}$, mis tähendas $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{23}{40}$. Egiptlased arutlesid umbes nii: kui jagame 23 leiba 40 inimese vahel, siis saab igaüks ühe neljandiku, ühe viiendiku ja ühe kaheksandiku ühest leivast. Murrud lugejaga üks olid kasutusel ka Babülooonias ja Kreekas. Murdude üleskirjutamiseks kasutati algselt tänapäeva omadest erinevaid märke. Murrujoon võeti kasutusele alles 1202. aastal itaalia matemaatiku Leonardo Fibonacci poolt.

Harilikuks murruks nimetatakse kahe (nullist erineva) naturaalarvu jagatist $a : b$ ja tähistatakse sümboliga $\frac{a}{b}$. Arvu a nimetatakse **murru lugejaks**, arvu b **murru nime-tajaks**.

Harilikul murrul on kaks tähendust:

1. Harilik murd on arv, mis näitab, mit-meks võrdseks osaks on ühik jaotatud ja mitu sellist osa on võetud.

Näiteks $\frac{3}{4}$ tähendab, et tervik on jaotatud 4 võrdseks osaks, millest on võetud 3 osa.



2. Harilik murd väljendab kahe naturaalarvu jagamise tulemust.

Näited.

