

„QCD-Strahlungskorrekturen in der
Physik schwerer Quarks und Baryonen“

Dissertation zur Erlangung des Grades

„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik

der Johannes Gutenberg-Universität

in Mainz

Stefan Groote

geboren in Hagen/Westfalen

Mainz, 1996

Zusammenfassung

Im ersten Teil der Dissertation werden zum ersten Mal QCD-Strahlungskorrekturen erster Ordnung zur Polarisation schwerer Quarks berechnet, die in Paarvernichtungsprozessen von Elektronen mit Positronen entstehen. Dazu wird der Anteil des Wirkungsquerschnitts, der sich auf den Eingangskanal bezieht, auf eine Drehmatrix zurückführt. Anders als bei den Beiträgen niedrigster Ordnung (Bornsche Beiträge) treten bei der Berechnung der Schleifenintegrale erster Ordnung Ultraviolett- und Infrarot-Divergenzen auf, die mit Hilfe der dimensional Regularisierung und dem modifizierten minimalen Subtraktionsschema renormiert werden können. Die Schleifenintegrale lassen sich durch Formfaktoren der Vertexkorrektur parametrisieren, welche im Folgenden berechnet werden, ebenso wie die Beiträge weicher Gluonen, also solcher Baumgraphen mit einer Gluonenergie, welche eine vorgegebene Schwelle nicht überschreitet. Bei der Addition beider Anteile heben sich die Infrarot-Divergenzen auf, wie es auch das Theorem von Lee und Nauenberg postuliert. Schließlich wird über den gesamten Phasenraum integriert, wobei sämtliche auftretenden Integrationen analytisch durchgeführt werden. Es werden Ergebnisse für die drei Polarisationskomponenten des schweren Quarks in Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie, der Energie des Quarks und dem Polarwinkel angegeben.

Im zweiten Teil der Dissertation werden erstmalig QCD-Strahlungskorrekturen zu Strömen schwerer Baryonen bestimmt und mit ihrer Hilfe strahlungskorrigierte QCD-Summenregeln aufgestellt. Grundlage der Rechnungen ist hier die effektive Theorie schwerer Quarks (HQET) im Grenzfall unendlich schwerer Quarkmassen, in welchem eine neuartige Spin-Flavour-Symmetrie gilt. Es schließt sich die Vorstellung von Techniken an, die erlauben, die auftretenden Integrale auf bekannte Ein- und Zweischleifenfunktionen zurückzuführen und die Tensorintegrale in skalare Integrale zu entwickeln. Mit den vorgestellten Techniken werden QCD-Strahlungskorrekturen zum Stromvertex berechnet, welche anschließend zur Bestimmung der anomalen Dimension bis zur zweiten Schleifenordnung verwendet werden. Diese findet Eingang in das Evolutionsverhalten, also die mit der Renormierungsgruppengleichung verträgliche Fortsetzung von Ergebnissen der Störungsreihe erster Ordnung von einem Skalierungspunkt zu einem anderen. In eben dieser ersten Ordnung werden anschließend perturbative Strahlungskorrekturen und Strahlungskorrekturen zu den nichtperturbativen Kondensatbeiträgen zum Zweipunktkorrelator berechnet, die schließlich in QCD-Summenregeln einfließen. Im abschließenden Kapitel werden diese analysiert und liefern Werte für die Residuen der beteiligten Ströme.

Einleitung

Die Bestätigung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik, welches die Physik der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung beschreibt, wird sowohl auf experimenteller wie auf theoretischer Seite von Jahr zu Jahr verfeinert und hat bislang zu keinen erkennbaren Differenzen geführt. Die Verfeinerung geschieht auf der Seite der Theorie in zwei Bereichen. In den Bereichen, die sich störungstheoretisch (perturbativ) behandeln lassen, erfolgt die Verbesserung durch die Berechnung von Strahlungskorrekturen zu bereits bestehenden Graphen, die Verbesserung der Ergebnisse des nichtperturbativen Bereiches gelingt beispielsweise durch immer genauere Durchführung der QCD-Summenregelanalyse. Ziel und Inhalt dieser Arbeit ist die Berechnung von bisher noch nicht bekannten QCD-Strahlungskorrekturen im Bereich der Polarisation schwerer Quarks in der e^+e^- -Vernichtung und im Bereich der QCD-Summenregeln für schwere Baryonen.

Thema des ersten Teils dieser Arbeit ist die Berechnung von QCD-Strahlungskorrekturen erster Ordnung zur Polarisation schwerer Quarks. Die Messung der Polarisation von Quarks, die bei der Vernichtung von Elektronen mit Positronen entstehen, gibt Aufschluß über den Charakter der schwachen Wechselwirkung, resultiert die Polarisation der entstehenden Teilchen doch aus dem Wechselspiel zwischen den paritätsverletzenden und paritätserhaltenden Anteilen im Austausch des intermediären Photons bzw. Z_0 -Bosons. Die Polarisation hängt vom erzeugten Quarktyp, seiner Masse und der Schwerpunktsenergie ab. So ergibt sich für die longitudinale Polarisation auf der Z_0 -Resonanz für Quarks des up-Typs, also Zerfälle wie $Z_0 \rightarrow c^\dagger \bar{c}$ (der Pfeil deutet auf die gemessene Quarkpolarisation hin) ein Wert von -69% , für Quarks des down-Typs, also beispielsweise in $Z_0 \rightarrow b^\dagger \bar{b}$, sogar ein Wert von -94% .

Die Beobachtung der Polarisation des top-Quarks ist ideal, da es zerfällt, bevor es zur Hadronisierung kommt. Seine Polarisation kann damit direkt durch die Analyse der anschließenden Zerfallsmoden bestimmt werden [1]. Beim Zerfall $t \rightarrow b + e^+ + \nu$ beispielsweise werden die Korrelationen $\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_b \rangle$ oder $\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_l \rangle$ gemessen, wobei $\vec{\sigma}$ die zu bestimmende Polarisation des top-Quarks ist. Beim bottom-Quark wird die Polarisation teilweise vom Baryon Λ_b übernommen [2], im Grenzfall schwerer Quarks erreicht diese Übernahme 100% [3]. Die Polarisation der Baryonen kann wiederum aus ihren Zerfallsmoden abgelesen werden [4]. Die Annahme, daß bereits die schwersten der tatsächlich vorhandenen Quarks dem angegebenen Grenzfall entsprechen, also eine nahezu vollständige Übernahme der Polarisation durch die im nachfolgenden Prozeß entstehenden Hadronen erfolgt, legt es nahe, der Physik schwerer Quarks und Hadronen verstärkte Aufmerksamkeit zu schenken. Dies stellt die Verbindung her zum zweiten Teil der Arbeit, die sich mit der Bestimmung der anomalen Dimension schwerer baryonischer Ströme und der Analyse von QCD-Summenregeln beschäftigt, welche auf der Berechnung von Strahlungskorrekturen zu den Zweipunktkorrelatoren basiert.

Ein weiteres wichtiges Bindeglied zwischen den beiden Teilen, also dem hochenergetischen Bereich der Erzeugung schwerer Quarks und dem niederenergetischen Bereich der Analyse von Summenregeln, welche mit Methoden der effektiven Theorie schwerer Quarks (HQET) aufgestellt wurden und nichtperturbative Beiträge enthalten, ist das gemeinsame Konzept der *Spektraldichte*. Während diese Spektraldichte im zweiten Teil der Arbeit über die Dispersionsrelation als Imaginärteil des Zweipunktkorrelators bestimmt wird, ist sie im ersten Teil durch den perturbativen Beitrag zum *Hadrontensor* gegeben, also den Anteil des Wirkungsquerschnitts, der die Zerfallsseite des Streuprozesses beschreibt. Der *Leptontensor* indes, welcher für die Paarvernichtung im Strahl steht, reduziert sich mit Hilfe der verwendeten Methoden auf eine Drehmatrix.

So wird im ersten Teil der hier vorliegenden Arbeit nach Vorstellung der technischen Grundlagen in Kapitel 1 im zweiten Kapitel die Methode entwickelt, welche den Leptontensor in eine Drehmatrix umschreibt (Hilfsmittel dazu finden sich in Anhang A). An dieser Stelle werden auch bereits die Beiträge führender Ordnung, auch *Bornsche Beiträge* genannt, bestimmt. Zur Berechnung der Schleifenintegrale erster Ordnung treten UV- und IR-Divergenzen auf, hier muß eine Regularisierung vorgenommen werden. In Kapitel 3 werden zu diesem Zwecke die *dimensionale Regularisierung* und geeignete *Subtraktionsschemata* vorgeführt, um dieses Verfahren sogleich auf die Berechnung der *Formfaktoren der Vertexkorrektur* anwenden zu können. Diese Formfaktoren werden dann als geschlossene Ausdrücke in der Bestimmung der *Schleifenkorrekturen* in Kapitel 4 benutzt. In diesem Kapitel wird auch gezeigt, daß die IR-Divergenzen dieser Schleifenkorrekturen sich gegen entsprechende Divergenzen aus den Beiträgen *weicher Gluonen*, also den Baumbeiträgen erster Ordnung mit einer festgelegten maximalen Gluonenergie kürzen lassen, wie es das Theorem von Lee und Nauenberg postuliert. Die Baumbeiträge erster Ordnung werden anschließend in Kapitel 5 über den gesamten Phasenraum integriert, wobei alle Integrale analytisch durchgeführt werden. Diese Berechnungen werden in Anhang B vertieft. Kapitel 6 schließlich gibt die drei *Polarisationskomponenten* des Quarks in Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie, der Energie des Quarks und dem Polarwinkel an [5, 6, 7]. Es werden hier auch die *laufende Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung* und im Zusammenhang mit dem Grenzfall verschwindender Quarkmasse das γ_5 -Problem angeschnitten. In Anhang C schließlich sind die *temporalen Anteile* des Hadrontensors berechnet, welche bei der in dieser Arbeit durchgängig erfolgten Vernachlässigung der Elektronmasse ohne Bedeutung sind. Diese Rechnungen sind ein Nebenprodukt der Arbeit und bestätigen überzeugend Ergebnisse, die von anderen Autoren auf anderem Wege erzielt wurden.

Der zweite Teil dieser Arbeit beginnt mit der Vorstellung der *Effektiven Theorie schwerer Quarks (HQET)* in Kapitel 7 und ihrem Grenzfall, der *Symmetrie schwerer Quarks (HQS)*, in welchem der Spin, die Flavour und damit die Masse des als unendlich schwer angenommenen Quarks von den sonstigen Bestandteilen des betrachteten Hadrons entkoppeln. Diese Symmetrie wird auch als *Spin-Flavour-Symmetrie* bezeichnet und bildet die Grundlage des zweiten Teils dieser Arbeit. Im betrachteten Grenzfall können die den schweren Baryonen zugeordneten Ströme unter ein gemeinsames Konzept gestellt werden. Kapitel 7 erläutert die Integrationstechniken, wie beispielsweise die Zurückführung der Integrale auf *Ein- und Zweischleifenfunktionen*, wobei allerdings die sehr technische Entwicklung der Tensorintegrale in Kovariante nach einer Methode, die auf Passarino und Veltman zurückgeht, zum größten Teil in Anhang D zu finden ist. Die vorgestellten Tech-

niken werden in Kapitel 9 angewandt, um *Korrekturen zum Stromvertex* zu berechnen, welche in Anhang E niedergelegt sind und nach einer Vorstellung der Renormierungsgruppengleichung in Kapitel 10 zur Bestimmung der *Anomalen Dimension zur zweiten Schleifenordnung* verwendet werden [8]. Diese anomale Dimension zweiter Ordnung findet Eingang in das *Evolutionsverhalten*, also in eine mit der Renormierungsgruppengleichung verträgliche Fortsetzung von Ergebnissen der Störungsreihe erster Ordnung von einem Skalierungspunkt zu einem anderen. In eben dieser ersten Ordnung werden in Kapitel 11 perturbative Strahlungskorrekturen und Strahlungskorrekturen zu den nichtperturbativen Kondensatbeiträgen zum *Zweipunktkorrelator* (ebenfalls in Anhang E zu finden), die schließlich in *QCD-Summenregeln* zum Tragen kommen. Diese werden in Kapitel 12 analysiert und liefern Werte für die Residuen der beteiligten Ströme [9].

Abschließend sei bemerkt, daß der Autor nur deshalb bereits bekannte Sachverhalte in den Haupttext dieser Arbeit mit aufnahm, um ihr eine in sich geschlossene Form zu geben. So kann beispielsweise die Aufstellung der Feynmanregeln zu Beginn des ersten Kapitels zunächst übersprungen und erst im Zweifelsfall zu Rate gezogen werden. Für die Arbeit spezifische Grundlagen finden sich dann im zweiten Abschnitt dieses Kapitels, und erste konkrete Rechnungen erscheinen in den daran anschließenden Kapiteln.

Danksagungen

Mein Dank gilt zuerst meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Jürgen Körner, für die interessante, konkrete und in absehbarer Zeit durchführbare Themenstellung. Er bezieht sich aber auch auf die sehr intensive Betreuung meiner Arbeit, die mir schnell Eingang in das für mich neue Themengebiet verschaffte und sich mit der Zeit zu einer wirklichen Zusammenarbeit entwickelte. Daß dies durchaus keine Selbstverständlichkeit ist, weiß ich aus eigener Erfahrung und bin darum umsomehr dankbar für die mir entgegengebrachte Hilfe. An dieser Stelle möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Ewald Reya und Herrn Prof. Dr. Konrad Kleinknecht nennen, die mir Fürsprecher für den Beginn in Mainz waren. Mein Dank gilt an nächster Stelle den Menschen, auf deren wissenschaftlicher Arbeit ich konkret aufbauen und mit denen ich in dieser Zeit zusammenarbeiten konnte. Für den ersten Teil meiner Arbeit gilt dieser Dank Michael Tung, welcher mir vor allem das Arbeiten mit MATHEMATICA näher brachte, für den zweiten Teil Oleg Yakovlev, der mir in wichtigen Fragen der Renormierungstheorie hilfreich zur Seite stand.

Danken möchte ich allen, die mich in der Mainzer Arbeitsgruppe ThEP an dieser oder jener oft sehr praktischen Stelle halfen. Ich möchte hier zunächst diejenigen erwähnen, die in dieser Zeit das Büro mit mir teilten, nämlich Zoltan Gagyi-Palfy, Ulrich Kilian, Jochen Landgraf und Alfonso Leyva, möchte aber auch Lars Brücher für die Hilfe bei so manchem Computerproblem danken und sicherlich das ein oder andere Gespräch nicht missen, das ich mit Mitgliedern der Arbeitsgruppe führte.

Zum Schluß danke ich meiner Familie für viel Verständnis vor allem in der Anfangsphase meiner Arbeit in Mainz und die Möglichkeit, an den Wochenenden von der wissenschaftlichen Arbeit in ihrem Kreise Abstand zu gewinnen. Und ich danke meiner ehemaligen Freundin Sylvia Fluhr, die meine Zweifel und Vorbehalte aus dem Wege räumen konnte und mir so den Weg für den Wechsel nach Mainz ebnete. Ihr sei diese Arbeit gewidmet.

S. D. Gl.

Inhaltsverzeichnis

1 Technische Grundlagen	9
1.1 Grundlagen der Diracschen Fermionentheorie	10
1.1.1 Freie Fermionlinien	10
1.1.2 Fermionische Propagatoren	11
1.1.3 Der Photonpropagator	12
1.1.4 Der elektromagnetische Vertex	12
1.1.5 Der elektroschwache Vertex	13
1.1.6 Der elektroschwache Propagator	13
1.1.7 Der Gluonvertex	14
1.1.8 Der Gluonpropagator und freie Gluonen	14
1.2 Polarisation – was ist zu berechnen?	15
1.3 Vektor- und Axialvektoranteile	17
1.4 Strukturfunktionen der elektroschwachen Theorie	18
1.5 Kovarianz und Wahl eines Bezugssystems	18
2 Projektionen	20
2.1 Entwicklung in Kovariante	21
2.2 Berechnung des Leptontensors	22
2.2.1 Polarisierte Leptonstrahlen	22
2.2.2 Leptontensor im Hadronsystem	24
2.2.3 Trennung vom Leptontensor	24
2.3 Konstruktion der Projektoren	25
2.3.1 Die Drehung der Projektoren	26
2.3.2 Transformationsregeln	26
2.4 Behandlung des Bornschen Falls	27
2.4.1 Zur Kinematik des Diagramms nullter Ordnung	27
2.4.2 Der Hadrontensor im Bornschen Fall	28
3 Regularisierung und Subtraktion	31
3.1 Die dimensionale Regularisierung	31
3.1.1 Berechnung des Grundintegrals	32
3.2 Propagatorkorrektur für massive Quarks	33
3.2.1 Berechnung von $\Sigma_{m_0}(\mathbf{p})$	34
3.2.2 Berechnung von $\Sigma_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})$	35
3.2.3 Das Renormierungsverfahren	36
3.2.4 Die Renormierung auf der Massenschale	37
3.2.5 Regularisierung mit Hilfe der Gluonmasse	38

3.3	Vertexkorrektur für massive Quarks	40
3.3.1	Berechnung von $I_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$	41
3.3.2	Berechnung von $I_3^\alpha(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$	44
3.3.3	Berechnung von $I_3^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$	45
3.3.4	Zusammenfassung zur Vertexkorrektur	47
3.3.5	Renormierung der Vertexkorrektur	48
3.3.6	Korrektur des Axialvertex	49
3.4	Vertexkorrektur für masselose Quarks	50
3.4.1	Berechnung von $\tilde{I}_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$	50
3.4.2	Berechnung von $\tilde{I}_3^\alpha(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$	51
3.4.3	Berechnung von $\tilde{I}_3^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$	52
3.4.4	Zusammenfassung zur Vertexkorrektur	52
4	Virtuelle und weiche Beiträge	53
4.1	Berechnung der unprojizierten Beiträge	54
4.1.1	Isolierung der Terme erster Ordnung	56
4.2	Ergebnisse der Projektionen	56
4.3	Der Phasenraum	57
4.3.1	Der Phasenraum für zwei Teilchen	58
4.3.2	Der Phasenraum für drei Teilchen	59
4.4	Der Sektor weicher Gluonen	60
4.4.1	Näherung weicher Gluonen	60
4.4.2	Wahl geeigneter Phasenraumparameter	63
4.4.3	Einige hilfreiche Integralformeln	66
4.4.4	Berechnung von $\mathcal{H}_l(-1)$	67
4.4.5	Der Formfaktor für Streuungen mit weichen Gluonen	68
5	Reelle Beiträge	69
5.1	Neue Phasenraumvariablen	69
5.2	Beiträge mit einem reellen Gluon	70
5.2.1	Unintegrierte Beiträge	71
5.3	Longitudinal polarisierte Quarks	73
5.3.1	Die Projektion $\mathbf{U} + \mathbf{L}$	73
5.3.2	Die Projektion \mathbf{L}	75
5.3.3	Die Projektion \mathbf{F}	76
5.4	Integrationstechniken	77
5.4.1	Die global gültige Substitution	78
5.4.2	Berechnung der Integrale $\mathcal{J}(n, m)$	79
5.4.3	Berechnung des Integrals $\mathcal{J}(\mathbf{0}, -1)$	80
5.4.4	Berechnung des Integrals $\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{0}, -1)$	81
5.4.5	Berechnung der Integrale $\mathcal{J}_l(m)$	83
5.4.6	Berechnung des Integrals $\mathcal{J}_l(-1)$	83
6	Beiträge erster Ordnung	86
6.1	Entwicklung in Zerfallsratenterme	86
6.1.1	Vorgehen anhand des Beispiels der Projektion \mathbf{L}	86
6.1.2	Der relative Phasenraumfaktor	87

6.1.3	Zusammenfassung mit den virtuellen Beiträgen	87
6.2	Polarisierte und unpolarisierte Terme	88
6.2.1	Unpolarisierte Beiträge	89
6.2.2	Longitudinal polarisierte Beiträge	90
6.2.3	Transversal eben polarisierte Beiträge	91
6.2.4	Transversal normal polarisierte Beiträge	92
6.3	Polarisationen	93
6.3.1	Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes	94
6.3.2	Die Abhängigkeit der Polarisation vom Polarwinkel	94
6.3.3	Die Abhängigkeit der Polarisation von der Quarkenergie	101
6.3.4	Die laufende Kopplungskonstante	106
6.4	Beiträge erster Ordnung für masselose Quarks	107
6.4.1	Das γ_5 -Problem und seine Lösungsverfahren	107
6.4.2	Bornsche Beiträge	108
6.4.3	Beiträge virtueller Gluonen	109
6.4.4	Beiträge reeller Gluonen	109
6.4.5	Beiträge erster Ordnung	110
6.4.6	Der Grenzfall verschwindender Quarkmasse	112
7	Eine effektive Theorie schwerer Quarks	114
7.1	Einführung in die HQET	114
7.2	Die Feynmanregeln der HQS	115
7.2.1	Der Propagator für schwere Quarks	115
7.2.2	Der Vertex an eine schwere Quarklinie	116
7.2.3	Zusammenfassung	116
7.2.4	Feynmanregeln für Dreigluonvertex und Geisterfelder	116
7.3	Mesonische und Baryonische Ströme	117
7.3.1	Der mesonische Strom	117
7.3.2	Der baryonische Strom	117
7.3.3	Die Farbstruktur	118
7.3.4	Spezielle baryonische Ströme	119
7.3.5	Ströme, Zwei- und Dreipunktkorrelatoren	119
8	Algorithmische Integrationstechniken	120
8.1	Die Diracstruktur	120
8.1.1	Entwicklung in Kovariante	120
8.1.2	Reduktion der Diracstruktur	121
8.2	Die Integrale	122
8.2.1	HQET-Integrale	122
8.2.2	QCD-Integrale	124
8.2.3	Reduktion der Integrale	125
8.3	Die Operatoren	126
8.3.1	Operatoren für die HQET-Integrale	126
8.3.2	Operatoren für die QCD-Integrale	127
8.3.3	Behandlung von Sonderfällen	127

9	Korrekturen zum Stromvertex	128
9.1	Mesonische und Diquarkgraphen	128
9.1.1	Korrektur erster Ordnung zum schweren Meson	128
9.1.2	Eine Korrektur zweiter Ordnung zum schweren Meson	131
9.1.3	Die Farbstruktur der mesonischen Graphen	133
9.1.4	Korrekturen zum schweren Diquarksystem	134
9.1.5	Korrekturen zum leichten Meson und Diquarksystem	135
9.1.6	UV- und IR-Singularitäten	137
9.2	Irreduzible Graphen	137
9.2.1	Behandlung der IR-Singularität	139
10	Die anomale Dimension	140
10.1	Die Renormierungsgruppengleichung	140
10.1.1	Die laufende Kopplung	141
10.1.2	Zum Namen „anomale Dimension“	143
10.2	Der Renormierungsfaktor	144
10.2.1	Von der Störungsreihe zum Renormierungsfaktor	144
10.2.2	Die Renormierungsfaktoren zu α_s und \mathbf{a}	145
10.2.3	Vom Renormierungsfaktor zur anomalen Dimension	146
10.3	Die Renormierung der äußeren Beine	148
10.4	Die anomale Dimension des baryonischen Stroms	148
10.4.1	Skalare Darstellung der Diracstruktur	148
10.4.2	Anomale Dimension des schweren Diquarksystems	149
10.4.3	Anomale Dimension des leichten Diquarksystems	150
10.4.4	Anomale Dimension des irreduziblen Vertex	151
10.4.5	Anomale Dimension des Baryons	151
10.5	Beziehungen zwischen den Schemata	152
10.5.1	Die naive Nicht-Abelianisierung	152
10.5.2	Die endliche Renormierung	153
10.6	Renormierungsgruppeninvarianter Strom	154
11	Zweipunktkorrelatoren	156
11.1	Die Operatorproduktentwicklung	156
11.2	Die Spektraldichte	158
11.3	Strahlungskorrigierter diagonaler Korrelator	159
11.3.1	Konstruktion der Pre-Diracstruktur	159
11.3.2	Berechnung der Zwei- und Dreischleifenintegrale	160
11.3.3	Ergebnisse der Zwei- und Dreischleifenintegrale	163
11.4	Strahlungskorrigierter nichtdiagonaler Korrelator	165
11.4.1	Ergebnisse der Ein- und Zweischleifenintegrale	165
12	QCD-Summenregeln	168
12.1	Das Residuum	169
12.2	Die Borel-Transformation	170
12.3	Strahlungskorrigierte diagonale Summenregel	172
12.3.1	Eine neue Klasse von Funktionen	172
12.3.2	Numerische Analyse der diagonalen Summenregel	173

12.3.3	Anmerkungen zum γ_5 -Schema	177
12.4	Strahlungskorrigierte nichtdiagonale Summenregel	177
12.4.1	Numerische Analyse der nichtdiagonalen Summenregel	177
12.5	Projektion auf die großen Komponenten	180
12.5.1	Numerische Analyse der Summenregel	180
12.6	Vergleich der Analysen	181
A	Drehungen und Projektoren	183
A.1	Die Eulerschen Drehungen	184
A.2	Darstellung der Projektoren	185
B	Integrale und Zerfallsratenterme	186
B.1	Integrale vom Typ \mathcal{I}	186
B.2	Integrale vom Typ \mathcal{J}	187
B.3	Integrale vom Typ \mathcal{S}	188
B.4	Integrale vom Typ \mathcal{T}	189
B.5	Tabelle der Zerfallsratenterme	190
C	Massive Leptonen	191
D	Dirac- und Pre-Diracstruktur	194
D.1	Konstruktion der Diracstruktur	194
D.1.1	Bildung der Kontraktionen	194
D.1.2	Schematisierung der Kontraktion	195
D.2	Konstruktion der Pre-Diracstruktur	196
D.2.1	Die Neukombination	196
D.2.2	Systematisches Zählschema	199
E	Beiträge der HQS-Graphen	200
E.1	Koeffizienten für die schwer-leichten Graphen	200
E.2	Koeffizienten für die doppelteichten Graphen	201
E.3	Koeffizienten für die irreduziblen Graphen	203
E.4	Koeffizienten für die Korrelatorkorrekturen	204
E.5	Koeffizienten für Korrekturen zum Quarkkondensatbeitrag	204
F	Ströme schwerer Baryonen	209
F.1	Die HQET, eine effektive Theorie schwerer Quarks	210
F.2	Renormierung der Ströme	211
F.3	Strahlungskorrekturen zu QCD-Summenregeln	214
F.4	Zusammenfassung und Ausblick	216
G	Stichwortverzeichnis	220

Kapitel 1

Technische Grundlagen

Messungen der Hochenergiephysik geschehen über Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitte. Der Wirkungsquerschnitt selber kann jedoch von unterschiedlichen Parametern abhängig sein, und als solche bieten sich die unterschiedlichen Phasenraumparameter an, im einfachsten Fall die Winkelverteilung oder die Energie der auslaufenden Teilchen, oder aber ihre Polarisation. Alle diese Möglichkeiten spiegeln sich in *Fermis goldener Regel*

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 dPS \quad (1.1)$$

wider, die den differentiellen Wirkungsquerschnitt mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement dPS und dem Betragsquadrat der Übergangsmatrix T_{fi} in Beziehung setzt. Diese Formel ist sehr kompakt. Es wird daher zunächst einmal dringende Aufgabe sein, die einzelnen Bestandteile unter die Lupe zu nehmen.

Das Betragsquadrat der Übergangsmatrix T_{fi} ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Anfangszustand i in einen Endzustand f übergeht. Zu ihrer Bestimmung wird die Matrix in eine Störungsreihe entwickelt, deren Entwicklungsparameter die Kopplungskonstante der betrachteten Wechselwirkung ist und die sich bildhaft durch die nach Richard P. Feynman benannten Graphen ausdrückt. Diese Graphen repräsentieren alle Anteile, die in die Übergangsmatrix eingehen. Punkte oder Vertizes markieren Stellen, an denen ein Boson abgestrahlt oder absorbiert wird. Diese Bosonen sind Vermittler der Wechselwirkung, man spricht daher von Wechselwirkungspunkten. Verbindungslinien zwischen diesen Punkten symbolisieren die Propagation eines Teilchens zwischen zwei solchen Wechselwirkungen. Während es sich hier um virtuelle Vorgänge handelt, sind schließlich die äußeren Linien Symbol für die ein- und auslaufenden Teilchen, die physikalisch beobachtet werden können.

Die Feynmangraphen ähneln einem Kirchhoffschen Netzwerk, für das ja bekanntlich an jedem Knoten die Erhaltung der Ströme gewährleistet sein muß. Auch wenn man mit dieser Analogie nicht zu weit gehen sollte, so gilt doch für die Feynmangraphen eine solche Stromerhaltung. Sie fordert vor allem die Erhaltung so fundamentaler physikalischer Größen wie der Ladung, des Impulses und der Energie der Teilchen an jedem Vertex. Berücksichtigt man diese Regeln, so ist es möglich, allein aus einer symbolischen Schreibweise heraus, eben der Darstellung durch Feynmangraphen, die Übergangsmatrix in eine Störungsreihe zu entwickeln.

1.1 Grundlagen der Diracschen Fermionentheorie

In diesem Abschnitt werden kurz die generellen Grundlagen der Störungsrechnung dargestellt, wie sie von Richard P. Feynman entwickelt wurde. Wie bereits im Vorwort erwähnt, geschieht dies, um der Arbeit eine in sich geschlossene Form zu verleihen. Hinzuweisen ist ferner darauf, daß in diesem Abschnitt zunächst Einheiten des internationalen Systems (SI-Einheiten) verwendet werden. Jedoch sieht sich der Autor in den daran anschließenden Rechnungen gezwungen, dieses Einheitensystem zugunsten des Systems der „natürlichen Einheiten“ aufzugeben, um mit anderen Autoren vergleichen zu können. Dieses System ergibt sich durch die Setzung $\hbar = c = \varepsilon_0 = 1$.

Grundlage der Theorie der Fermionen ist die von Paul Dirac entwickelte und nach ihm benannte kovariante Gleichung

$$(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc)\psi(x) = 0. \quad (1.2)$$

Die 4×4 -Matrizen γ^μ sind Elemente einer Clifford-Algebra, erfüllen also die Beziehungen

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Aus ihnen läßt sich ferner die Matrix

$$\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \text{mit} \quad [\gamma_5, \gamma^\mu]_+ = 0, \quad [\gamma_5, \gamma_5]_+ = 2 \quad (1.4)$$

konstruieren. An dieser Stelle seien auch die wichtigsten Regeln über die Bildung der Spur einer oder mehrerer dieser Matrizen in vier Dimensionen erwähnt,

$$\text{Sp}(1) = 4 \quad (1.5)$$

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu} \quad (1.6)$$

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \quad (1.7)$$

$$\text{Sp}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p}) = 0 \quad \text{für } p \text{ ungerade} \quad (1.8)$$

$$\text{Sp}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.9)$$

$$\text{Sp}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p}) = 0 \quad \text{für } p < 4 \text{ oder ungerade,} \quad (1.10)$$

ferner die zyklische Vertauschbarkeit unter der Spur. Weitere Regeln können in [10] nachgeschlagen werden. Der metrische Tensor ($g_{\mu\nu}$) ist diagonal gewählt und trägt die Signatur $(1; -1, -1, -1)$, für den total antisymmetrischen Tensor soll $\varepsilon_{0123} = 1$ festgelegt sein.

1.1.1 Freie Fermionlinien

Die Diracgleichung (1.2) kann mit Hilfe des Ansatzes

$$\psi(x, p) = a(p)u(p) \exp(-i\frac{px}{\hbar}) + b(p)v(p) \exp(i\frac{px}{\hbar}) \quad (1.11)$$

formal gelöst werden. Die nun vom Viererimpuls p abhängigen Lösungen $u(p)$ und $v(p)$, als *Spinoren* bezeichnet, sowie die zugehörigen *adjungierten Spinoren* $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma_0$ und $\bar{v}(p) = v^\dagger(p)\gamma_0$ erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\not{p} - mc)u(p) &= 0 & (\not{p} + mc)v(p) &= 0 \\ \bar{u}(p)(\not{p} - mc) &= 0 & \bar{v}(p)(\not{p} + mc) &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

($\not{p} := p_\mu \gamma^\mu$). Die Spinoren sind ferner Funktionen eines *Spinvierervektors* s , der durch die Eigenschaften $s^2 = s_\mu s^\mu = -1$ und $sp = s_\mu p^\mu = 0$ charakterisiert ist. Dies bedeutet, daß der Spin im Ruhesystem des Teilchens, welches durch den Impuls p beschrieben wird, ein rein raumartiger Vierervektor der Länge 1 ist. Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen für die Spinoren haben die Form

$$\bar{u}(p, s)u(p, s') = 2mc\delta(s, s') = -\bar{v}(p, s)v(p, s'), \quad (1.13)$$

$$\sum_{s=\pm 1/2} u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + mc, \quad \sum_{s=\pm 1/2} v(p, s)\bar{v}(p, s) = \not{p} - mc. \quad (1.14)$$

Ferner gilt, läßt man die Summation über den Spin fort,

$$u(p, s)\bar{u}(p, s) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s})(\not{p} + mc), \quad v(p, s)\bar{v}(p, s) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s})(\not{p} - mc). \quad (1.15)$$

Im Feynmandiagramm werden diese Spinoren nun den äußeren fermionischen Linien zugeordnet. Linien von Teilchen erhalten dabei einen Pfeil in Bewegungsrichtung, Linien von Antiteilchen einen entgegengesetzten Pfeil. Das hat damit zu tun, daß Antiteilchen, also Lösungen negativer Energie, im Rahmen der Fermischen Theorie auch als Lösungen interpretiert werden können, die in der Zeit rückwärts laufen. Es bezeichnet

- $u(p)$ ein einlaufendes fermionisches Teilchen,
- $\bar{u}(p)$ ein auslaufendes fermionisches Teilchen,
- $v(p)$ ein auslaufendes fermionisches Antiteilchen und
- $\bar{v}(p)$ ein einlaufendes fermionisches Antiteilchen.

1.1.2 Fermionische Propagatoren

Die inneren fermionischen Linien sind Symbol für die *Propagatoren*. Diese sind Greensche Funktionen, also Lösungen der aus der Diracgleichung hervorgehenden Gleichung

$$\left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) S(x - x') = i\hbar (2\pi)^2 \delta^4(x - x'), \quad (1.16)$$

welche die freie Fortbewegung eines Teilchens vom Raumzeitpunkt x' zum Raumzeitpunkt x beschreiben. Diese Richtung wird einzig durch den angebrachten Pfeil beschrieben, der denselben Gesetzmäßigkeiten folgt wie bei den freien Linien. Entsprechend wird das Vorzeichen des Impulses behandelt, der mit der Linie verbunden ist. In den Impulsraum transformiert, lautet der Propagator

$$\tilde{S}(p) = \frac{i\hbar}{\not{p} - mc} := i\hbar \frac{\not{p} + mc}{p^2 - m^2 c^2}. \quad (1.17)$$

Offensichtlich besitzt diese Funktion *auf der Massenschale*, also bei $p^2 = m^2 c^2$ einen Pol. Daher wird dem Nenner ein Summand $+i\varepsilon$ hinzugefügt, der die Kausalität der Teilchenbewegung bestimmt. Ein so ergänzter Propagator S_F wird als *Feynmanpropagator* bezeichnet, er läßt Lösungen positiver Energie vorwärts und Lösungen negativer Energie rückwärts in der Zeit laufen. In einer vereinfachenden Darstellung wird der Term $+i\varepsilon$ nicht explizit ausgeschrieben.

1.1.3 Der Photonpropagator

Die Photonen sind Lösungen der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\rho \partial x^\rho} A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad (1.18)$$

die sich aus den Maxwell'schen Gleichungen ergibt. Auch hier wird ein Propagator gesucht, der die dazu assoziierte Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\rho \partial x^\rho} D^{\mu\nu}(x-x') = \frac{i}{\hbar} (2\pi)^2 g^{\mu\nu} \delta^4(x-x') \quad (1.19)$$

löst. In den Impulsraum transformiert, lautet dieser Propagator

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = -\frac{i\hbar g^{\mu\nu}}{q^2}, \quad \tilde{D}_F^{\mu\nu}(q) := \frac{-i\hbar g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}. \quad (1.20)$$

Mit seiner Hilfe berechnet sich

$$A^\mu(x) = \hbar \int D^{\mu\nu}(x-x') \left(-\frac{i\mu_0}{(2\pi)^2} j_\nu(x')\right) d^4x'. \quad (1.21)$$

1.1.4 Der elektromagnetische Vertex

Die Ankopplung des elektromagnetischen Feldes an ein Fermion geschieht durch die minimale Substitution $p \rightarrow p - eQ_f A$ in der Diracgleichung, wobei Q_f die Ladung des Fermions in Einheiten der Elementarladung e ist. Man erhält dann die inhomogene Differentialgleichung

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right) \psi(x) = eQ_f \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x), \quad (1.22)$$

die sich mit dem nun schon bekannten fermionischen Propagator lösen läßt zu

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int S_F(x-x') \left(-\frac{ieQ_f}{\hbar} \gamma_\mu A^\mu(x')\right) \psi(x') d^4x', \quad (1.23)$$

wobei $\psi_0(x)$ Lösung der freien Diracgleichung ist. Dies ist die rekursive Formel einer Störungsreihe. Löst man diese auf, so kommt es zu einer Verkettung freier fermionischer Propagatoren mit Elementen der Form $-ieQ_f \gamma_\mu A^\mu(x^{(i)})/\hbar$, was als freie Fortbewegung des Fermions zwischen Wechselwirkungspunkten interpretiert werden kann. So beschreibt beispielsweise das zweite Reihenglied

$$\psi^{(2)}(x) = \iint S_F(x-x') \left(-\frac{ieQ_f}{\hbar} \gamma_\mu A^\mu(x')\right) S_F(x'-x'') \left(-\frac{ieQ_f}{\hbar} \gamma_\mu A^\mu(x'')\right) \psi(x'') d^4x'' d^4x' \quad (1.24)$$

die Wechselwirkung am Raumzeitpunkt x'' , die Bewegung zum Raumzeitpunkt x' , dort eine zweite Wechselwirkung und anschließend die Bewegung zum Raumzeitpunkt x . Sieht man sich den Term an, der für die Wechselwirkung zuständig ist, so zählt A^μ/\hbar zum Zustand des elektromagnetischen Feldes, das ankopplert, während der Rest diese Ankopplung bewerkstelligt. Für einen elektromagnetischen Vertex steht also der Faktor

$$-ieQ_f \gamma_\mu. \quad (1.25)$$

Man spricht von einem *Vektorstrom*

$$j_\mu^V = -ieQ_f \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad (1.26)$$

an den das Photon ankopplert.

1.1.5 Der elektroschwache Vertex

Was für die elektromagnetische Theorie gültig war, kann nun auf die elektroschwache Theorie des *Weinberg-Salam-Modells* übertragen werden. Während die Vektorbosonen W^+ und W^- allein die schwache Wechselwirkung vermitteln, ist das Vektorboson Z^0 , das in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielt, ein Masseneigenzustand. Die sich daraus ergebende Mischung zwischen elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung ist durch einen Winkel, den *Weinbergwinkel* θ_W , gegeben. Zusätzlich enthält die Kopplung einen Axialvektoranteil, schreibt sich also als die Überlagerung

$$-ie(v_f\gamma_\mu - a_f\gamma_\mu\gamma_5) \quad (1.27)$$

eines Vektorstroms und eines *Axialvektorstroms*,

$$j_\mu^V = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad \text{und} \quad j_\mu^A = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi. \quad (1.28)$$

Die Koeffizienten v_f und a_f , auch *elektroschwache Kopplungskonstanten* genannt, sind wie bisher abhängig von der Fermionladung, aber zusätzlich noch vom Weinbergwinkel und von der 3-Komponente I_f^{3L} des schwachen Isospins. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} v_f &= 2I_f^{3L} - 4Q_f \sin^2 \theta_W, & a_f &= 2I_f^{3L}, & \text{speziell} \\ v_e &= -1 + 4\sin^2 \theta_W, & a_e &= -1 & \text{für Leptonen,} \\ v_f &= 1 - \frac{8}{3}\sin^2 \theta_W, & a_f &= 1 & \text{für Quarks des up-Typs } (Q_f = \frac{2}{3}) \text{ und} \\ v_f &= -1 + \frac{4}{3}\sin^2 \theta_W, & a_f &= -1 & \text{für Quarks des down-Typs } (Q_f = -\frac{1}{3}). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Für den Weinbergwinkel wird in dieser Arbeit $\sin^2 \theta_W = 0.226$ gesetzt.

1.1.6 Der elektroschwache Propagator

Im Gegensatz zum Photon besitzt das Vektorboson Z^0 (wie auch W^+ und W^-) eine Masse $m_Z \approx 91.178 \text{ GeV}/c^2$ und eine endliche Lebensdauer, die sich in der Zerfallsbreite $\Gamma_Z \approx 2.487 \text{ GeV}$ ausdrückt. Diese Größen finden Eingang in die *Breit-Wignersche Resonanzfunktion*

$$\chi_Z(q) = \frac{G_F}{8\sqrt{2}\pi\alpha(\hbar c)^3} \frac{m_Z^2 c^4 q^2}{q^2 - m_Z^2 c^2 + im_Z \Gamma_Z}, \quad \frac{G_F}{(\hbar c)^3} \approx 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (1.30)$$

zusammenfassen, die den Photonvertex korrigiert. $g_{\mu\nu}$ in (1.20) wird noch ergänzt durch einen Term $-q_\mu q_\nu / m_Z^2$. Da jedoch der Propagator zwischen dem leptonischen Eingangskanal und dem Ausgangskanal der Quarks steht, geht dieser Zusatzterm bei Kontraktion in einen Term $-m_e m_q / m_Z^2$ über, der selbst für das top-Quark aufgrund der kleinen Elektronenmasse m_e vernachlässigt werden kann. Für den elektroschwachen Propagator des Z^0 -Vektorbosons gilt folglich

$$\tilde{D}_Z^{\mu\nu}(q) = -\frac{i\hbar g^{\mu\nu}}{q^2} \chi_Z(q). \quad (1.31)$$

1.1.7 Der Gluonvertex

Bei der starken Wechselwirkung handelt es sich um eine nichtabelsche Eichtheorie, die durch der Gruppe $SU(3)_C$ der Farbwechselwirkungen beschrieben wird. Adjungierte Darstellungen dieser Gruppe sind die Gluonen. Die QCD faßt diese Gluonen als Wechselwirkungsteilchen auf, die an die Quarks koppeln. Die Elemente der $SU(3)_C$ sind die *Gell-Mann-Matrizen* λ_a ($a = 1, 2, \dots, 8$), welche der Vertauschungsrelation $[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c$ genügen (f_{abc} sind die total antisymmetrischen Strukturkonstanten). Aus Gründen der Einfachheit werden in dieser Arbeit stattdessen die Matrizen $T_a := \lambda_a/2$ verwendet. Für sie gilt

$$\sum_{a=1}^8 T_a T_a = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} = C_F, \quad (1.32)$$

$$\text{Sp}(T_a T_a) = C_F N_C. \quad (1.33)$$

$N_C = 3$ ist die Anzahl der Farbfreiheitsgrade, der Casimir-Operator ist also als $C_F = 4/3$ gegeben. Außerdem wird die elektromagnetische Ladung eQ_F durch die starke Ladung g_s ersetzt. Der Vertexfaktor besitzt demnach die Form

$$-ig_s T_a \gamma_\mu. \quad (1.34)$$

Wie im Falle der QED hängt auch hier die Ladung eng mit der Kopplung α_s zusammen, die den Ordnungsparameter für die verwendete Störungsreihe darstellt. Es ist

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}. \quad (1.35)$$

1.1.8 Der Gluonpropagator und freie Gluonen

Das Gluon ist wie das Photon masselos. Sein Propagator entspricht also auch dem des Photons, außer daß das Gluon eine Farbe trägt. Dies schlägt sich in einem Zusatzfaktor δ^{ab} wieder. Der Gluonpropagator ist

$$\tilde{D}_G(q) = \frac{-i\hbar\delta^{ab}g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}. \quad (1.36)$$

Eine freie Gluonlinie wird mit dem Polarisationsvektor (ε^μ) bezeichnet, für diesen Polarisationsvektor gilt $\sum \varepsilon^\mu \varepsilon^\nu = -g^{\mu\nu}$.

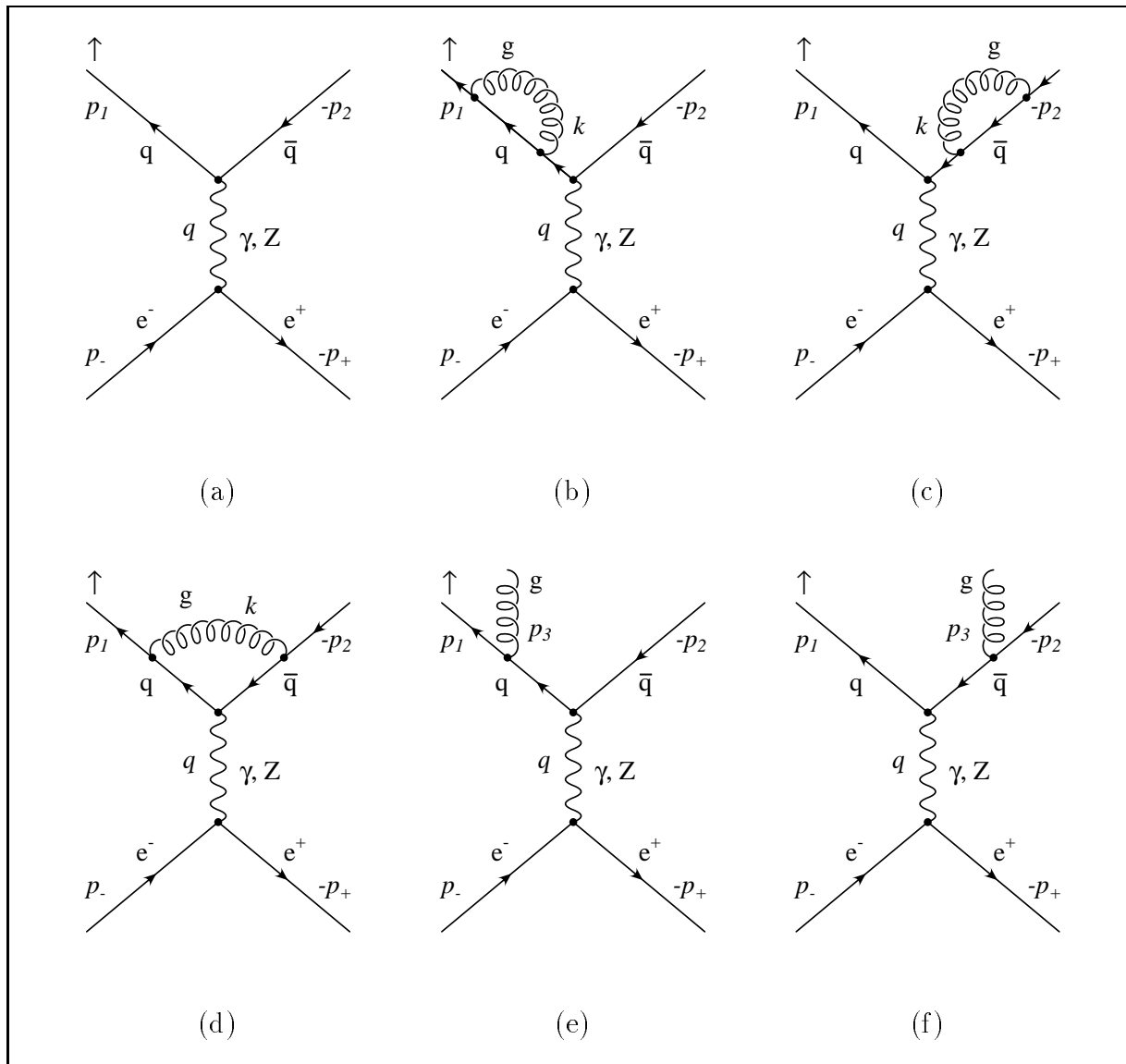


Abbildung 1.1: Zur e^+e^- -Vernichtung in $q\bar{q}(g)$ beitragende Diagramme. Die Impulse der Antiteilchen sind mit einem zusätzlichen Vorzeichen versehen, um ihre Ausrichtung mit den Pfeilrichtungen in Einklang zu bringen.

1.2 Polarisation – was ist zu berechnen?

Wie bereits eingangs angesprochen, kann der Wirkungsquerschnitt von verschiedenen Parametern abhängen. Einer dieser Parameter ist der Spin der Teilchen, welche die Wechselwirkungszone verlassen. Für die m -Quantenzahl des Spins gibt es für Fermionen als Teilchen mit $s = 1/2$ grundsätzlich die beiden Einstellungen $m_s = +1/2$ und $m_s = -1/2$. Diese beiden Möglichkeiten sollen durch „ \uparrow “ und „ \downarrow “ symbolisch beschrieben werden. Gemessen wird im Experiment die *Polarisation*, also der Quotient

$$P = \frac{d\sigma(\uparrow) - d\sigma(\downarrow)}{d\sigma(\uparrow) + d\sigma(\downarrow)}. \tag{1.37}$$

Man erkennt, daß der Nenner die übliche Summe über die Spineinstellungen des Endzustands darstellt. Um den Zähler zu erhalten, muß jedoch diese Summation entfallen. Daher wurden die spinunabhängigen Nennerausdrücke bereits früh numerisch berechnet [11], während analytische Ergebnisse zeitgleich mit den Ergebnissen dieser Arbeit erschienen [12, 13].¹ Dagegen standen die spinabhängigen Terme des Zählers lange nicht zur Verfügung. Aufgabe dieser Arbeit soll daher sein, auch diese für Rechnungen erster Ordnung in der starken Kopplung darzustellen und die entsprechenden Polarisationen zu berechnen.

Anhand des Terms nullter Ordnung, auch *Bornscher Term* genannt, soll zunächst geklärt werden, welche generelle Struktur zu erwarten ist. Dabei wird von einem Prozeß ausgegangen, bei dem ein Elektron und ein Positron vernichtet werden und dabei ein Quark und ein Antiquark erzeugen. Die Anwendung der im letzten Abschnitt entwickelten Feynman-Regeln auf diesen einfachen Graphen, in Abbildung 1.1(a) dargestellt, ist recht einfach. Sie liefert

$$T_{fi}(\gamma) = \bar{v}(p_+)(-ieQ_e\gamma_\mu)u(p_-) \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}(p_1)(-ieQ_f\gamma_\nu)v(p_2) \quad (1.38)$$

für den Austausch eines Photons und

$$T_{fi}(Z^0) = \bar{v}(p_+)(-ie(v_e\gamma_\mu - a_e\gamma_\mu\gamma_5))u(p_-) \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\chi_Z(q) \right) \bar{u}(p_1)(-ie(v_f\gamma_\nu - a_f\gamma_\nu\gamma_5))v(p_2) \quad (1.39)$$

für den Austausch eines Z^0 -Bosons. Beide Anteile tragen zu diesem Prozeß bei. Um mit dem einfachsten Fall zu beginnen, soll als erstes das Betragsquadrat für den Photonaustausch berechnet werden. Dabei wird zunächst über die Spins der einlaufenden Leptonen gemittelt und über die Spins der auslaufenden Quarks und deren Farbfreiheitsgrade summiert. Es ergibt sich dann unter Ausnutzung der Beziehung $\bar{\gamma}^\mu := \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$

$$\begin{aligned} |T_{fi}(\gamma)|^2 &= \frac{N_C}{4} \sum_{s_+, s_-} \sum_{s_1, s_2} \bar{v}(p_+)(-ieQ_e\gamma_\mu)u(p_-) \left(\frac{-i}{q^2} \right) \bar{u}(p_1)(-ieQ_f\gamma^\mu)v(p_2) \cdot \\ &\quad \cdot \bar{v}(p_2)(ieQ_f\gamma^\nu)u(p_1) \left(\frac{i}{q^2} \right) \bar{u}(p_-)(ieQ_e\gamma_\nu)v(p_+) = \\ &= \frac{e^4Q_e^2Q_f^2}{q^4} \frac{N_C}{4} \sum_{s_+} v(p_+)\bar{v}(p_+)\gamma_\mu \sum_{s_-} u(p_-)\bar{u}(p_-)\gamma_\nu \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{s_1} u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma^\mu \sum_{s_2} v(p_2)\bar{v}(p_2)\gamma^\nu = \\ &= \frac{e^4Q_e^2Q_f^2}{q^4} \frac{N_C}{4} \text{Sp}((\not{p}_+ - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_- + m_e)\gamma_\nu) \text{Sp}((\not{p}_1 + m_f)\gamma^\mu(\not{p}_2 - m_f)\gamma^\nu) = \\ &= \frac{e^4Q_e^2Q_f^2}{q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dieses Betragsquadrat läßt sich also als Kontraktion des *Leptontensors*

$$L_{\mu\nu} := \frac{1}{4} \text{Sp}((\not{p}_+ - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_- + m_e)\gamma_\nu) \quad (1.41)$$

¹Durch Korrespondenz mit den Autoren der Artikel [12] konnte ein Fehler in der Preprintversion ihres in Phys. Rev. D54 erschienen Artikels berichtigt werden.

mit dem *Hadrontensor*

$$H_{\mu\nu} := N_C \text{Sp}((\not{p}_1 + m_f)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_f)\gamma_\nu) \quad (1.42)$$

beschreiben. Dieser einfachste Fall kann nun schrittweise erweitert werden. Die erste Erweiterung ergibt sich einfach über den Vergleich von Gleichung (1.14) mit (1.15). Fällt eine der Spinsumationen (beim Hadrontensor) oder Spinmittlungen (beim Leptontensor) fort, so ist der entsprechende Ausdruck $(\not{p} \pm m)$ um den vorangesetzten Faktor $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s})$ (für den Hadrontensor) bzw. $(1 + \gamma_5 \not{s})$ (für den Leptontensor) zu ergänzen.

1.3 Vektor- und Axialvektoranteile

Etwas länger werden die Ausdrücke, wenn die Wechselwirkung über das Z^0 -Boson mitberücksichtigt wird. Dann nämlich treten zu den Vektoranteilen in der Spur Axialvektoranteile. Sie drücken sich in den beiden Spuren dadurch aus, daß die Gamma-Matrix des Vertex um einen angehängten Faktor γ_5 ergänzt wird. Dementsprechend sei

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{VV} &:= L_{\mu\nu}, & L_{\mu\nu}^{AA} &:= L_{\mu\nu}(\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_\nu \rightarrow \gamma_\nu \gamma_5), \\ L_{\mu\nu}^{VA} &:= L_{\mu\nu}(\gamma_\nu \rightarrow \gamma_\nu \gamma_5), & L_{\mu\nu}^{AV} &:= L_{\mu\nu}(\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu \gamma_5) \end{aligned} \quad (1.43)$$

und entsprechend auch für den Hadrontensor gesetzt. Dann ist

$$T_{fi}(\gamma)T_{fi}^\dagger(\gamma) = \frac{e^4 Q_e^2 Q_f^2}{q^4} L_{\mu\nu}^{VV} H^{VV\mu\nu} \quad (1.44)$$

$$T_{fi}(\gamma)T_{fi}^\dagger(Z^0) = \frac{e^4 Q_e Q_f}{q^4} \chi_Z^\dagger(q)(v_e L_{\mu\nu}^{VV} - a_e L_{\mu\nu}^{VA})(v_f H^{VV\mu\nu} - a_f H^{VA\mu\nu}) \quad (1.45)$$

$$T_{fi}(Z^0)T_{fi}^\dagger(\gamma) = \frac{e^4 Q_e Q_f}{q^4} \chi_Z(q)(v_e L_{\mu\nu}^{VV} - a_e L_{\mu\nu}^{AV})(v_f H^{VV\mu\nu} - a_f H^{AV\mu\nu}) \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} T_{fi}(Z^0)T_{fi}^\dagger(Z^0) &= \frac{e^4}{q^4} |\chi_Z(q)|^2 (v_e^2 L_{\mu\nu}^{VV} - v_e a_e (L_{\mu\nu}^{VA} + L_{\mu\nu}^{AV}) + a_e^2 L_{\mu\nu}^{AA}) \cdot \\ &\quad \cdot (v_f^2 H^{VV\mu\nu} - v_f a_f (H^{VA\mu\nu} + H^{AV\mu\nu}) + a_f^2 H^{AA\mu\nu}) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Die Summe all dieser Terme ergibt schließlich das Betragsquadrat der Übergangsmatrix für den Beitrag nullter Ordnung. Dies erscheint zunächst ziemlich unübersichtlich. Doch man kann die Ausdrücke ordnen. Die Einführung der vier neuen Leptontensorgrößen

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^1 &:= \frac{1}{2}(L_{\mu\nu}^{VV} + L_{\mu\nu}^{AA}), & L_{\mu\nu}^2 &:= \frac{1}{2}(L_{\mu\nu}^{VV} - L_{\mu\nu}^{AA}), \\ L_{\mu\nu}^3 &:= \frac{i}{2}(L_{\mu\nu}^{VA} - L_{\mu\nu}^{AV}) & \text{und} & L_{\mu\nu}^4 &:= \frac{1}{2}(L_{\mu\nu}^{VA} + L_{\mu\nu}^{AV}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

läßt zunächst erst einmal nur den Sinn einer Ökonomie in der Wahl der Indizes erkennen. In diesen neuen Größen geschrieben, lautet das Betragsquadrat des Matrixelements nun

$$|T_{fi}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \sum_{i,j=1}^4 g_{ij} L_{\mu\nu}^i H^{j\mu\nu}. \quad (1.49)$$

Das Fortlassen der Indizes i und j , die hier für 1, 2, 3 und 4, allgemein aber auch für VV , VA , AV und AA stehen können, soll im Folgenden nicht zu den Gleichungen (1.41) und (1.42) zurückführen, sondern andeuten, daß diese Indizes nicht festgelegt sein sollen.

1.4 Strukturfunktionen der elektroschwachen Theorie

Während der Leptontensor für die einlaufenden und der Hadrontensor für die auslaufenden Teilchen steht, repräsentieren die *Strukturfunktionen* g_{ij} der *elektroschwachen Theorie* als Bindeglieder die Wechselwirkungslinie. Sie enthalten also Größen wie die elektrischen Ladungen der beteiligten Teilchen, die elektroschwachen Kopplungskonstanten sowie die Breit-Wigner-Funktion $\chi_Z(q)$. Diese ist stark abhängig von der Schwerpunktsenergie. Fernab von der Z^0 -Resonanz $q^2 = m_Z^2$ können die Terme in $\chi_Z(q)$ vernachlässigt werden. An dieser Stelle jedoch dominiert der Term proportional zu $|\chi_Z(q)|^2$. Die Strukturfunktionen sind im einzelnen (nach der Setzung $Q_e = -1$)

$$\begin{aligned}
g_{11} &= Q_f^2 - 2Q_f v_e v_f \operatorname{Re} \chi_Z + (v_e^2 + a_e^2)(v_f^2 + a_f^2) |\chi_Z|^2 \\
g_{12} &= Q_f^2 - 2Q_f v_e v_f \operatorname{Re} \chi_Z + (v_e^2 + a_e^2)(v_f^2 - a_f^2) |\chi_Z|^2 \\
g_{13} &= -2Q_f v_e a_f \operatorname{Im} \chi_Z \\
g_{14} &= 2Q_f v_e a_f \operatorname{Re} \chi_Z - 2(v_e^2 + a_e^2) v_f a_f |\chi_Z|^2 \\
\\
g_{21} &= Q_f^2 - 2Q_f v_e v_f \operatorname{Re} \chi_Z + (v_e^2 - a_e^2)(v_f^2 + a_f^2) |\chi_Z|^2 \\
g_{22} &= Q_f^2 - 2Q_f v_e v_f \operatorname{Re} \chi_Z + (v_e^2 - a_e^2)(v_f^2 - a_f^2) |\chi_Z|^2 \\
g_{23} &= -2Q_f v_e a_f \operatorname{Im} \chi_Z \\
g_{24} &= 2Q_f v_e a_f \operatorname{Re} \chi_Z - 2(v_e^2 - a_e^2) v_f a_f |\chi_Z|^2 \\
\\
g_{31} &= -2Q_f a_e v_f \operatorname{Im} \chi_Z \\
g_{32} &= -2Q_f a_e v_f \operatorname{Im} \chi_Z \\
g_{33} &= 2Q_f a_e a_f \operatorname{Re} \chi_Z \\
g_{34} &= 2Q_f a_e a_f \operatorname{Im} \chi_Z \\
\\
g_{41} &= 2Q_f a_e v_f \operatorname{Re} \chi_Z - 2v_e a_e (v_f^2 + a_f^2) |\chi_Z|^2 \\
g_{42} &= 2Q_f a_e v_f \operatorname{Re} \chi_Z - 2v_e a_e (v_f^2 - a_f^2) |\chi_Z|^2 \\
g_{43} &= 2Q_f a_e a_f \operatorname{Im} \chi_Z \\
g_{44} &= -2Q_f a_e a_f \operatorname{Re} \chi_Z + 4v_e a_e v_f a_f |\chi_Z|^2
\end{aligned} \tag{1.50}$$

1.5 Kovarianz und Wahl eines Bezugssystems

Es wurden bisher und werden in dieser Arbeit *Vierervektoren* und *-tensoren* verwendet. Ihr besondere Eigenschaft ist es, daß sie *Lorentz-kovariante Größen* sind, sich also beispielsweise ihr Skalarprodukt unter Lorentztransformationen nicht ändert. Auch die Diracgleichung, die Maxwellgleichung und alle sonstigen in die Rechnung eingehenden Gleichungen sind in kovarianter Weise konstruiert. Da als Meßgrößen nur Skalare in Frage kommen, hat die Kovarianz somit zur Folge, daß die Streuprozesse in einem frei gewählten Inertialsystem betrachtet werden können. Als Inertialsystem soll in dieser Arbeit fast ausschließlich das *Schwerpunktsystem* verwendet werden, also das Ruhesystem des Photons oder Vektorbosons. Auch die Achsen sollen festgelegt werden. Dazu seien im Fall der Messung der Quarkpolarisation zwei verschiedene Systeme verwendet:

- Das *Leptonensystem* richtet sich nach den Teilchen des Eingangskanals, also dem Elektron und Positron. Zusammen mit dem Quark spannen sie die *Leptonebene* auf. Dabei soll der Impuls des Quarks in positive z' -Richtung weisen, der Impuls des Elektrons eine negative x' -Komponente besitzen. Der Winkel, der den Elektronimpuls in den Quarkimpuls dreht, ist der *Polarwinkel* θ . Die y' -Achse wird dann so gewählt, daß (x', y', z') ein rechtshändiges Koordinatensystem bildet.
- Das *Hadronensystem* wird nur für einen Dreiteilchenzerfall interessant, also für die Diagramme in Abbildung 1.1(e) und (f). Die *Hadronebene* wird aufgespannt von den Impulsen des Quarks, Antiquarks und Gluons. Der Impuls des Quarks bestimmt die z -Achse, die mit der z' -Achse übereinstimmt. Der Impuls des Antiquarks besitzt eine positive, der des Gluons eine negative x -Komponente. Die y -Achse ergänzt diese Achsen zu einem rechtshändigen System.

Das Hadronensystem ist gegenüber dem Leptonensystem um den *Azimuthalwinkel* χ gedreht. Die beschriebene Beziehung zwischen den Impulsen und den Ebenen sowie deren Stellung zueinander ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

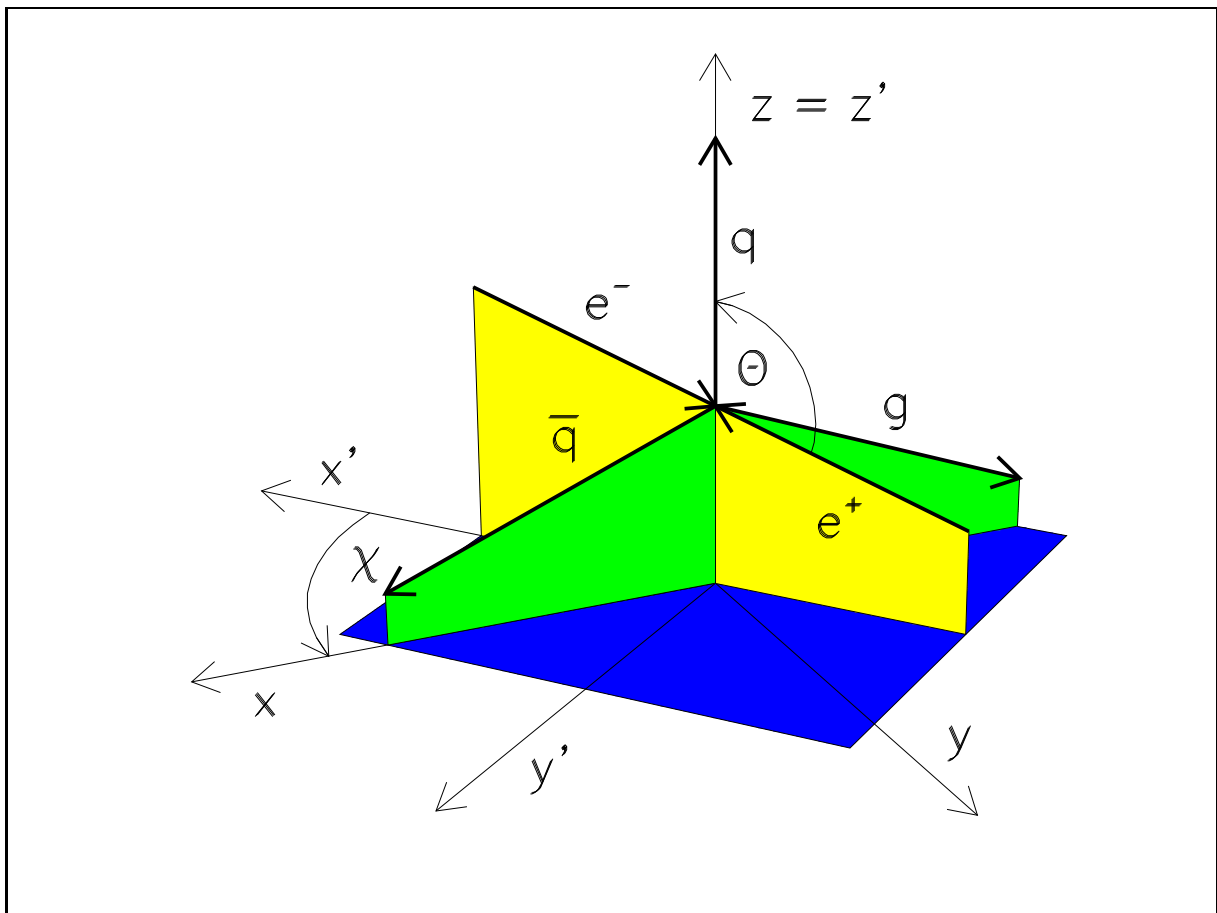


Abbildung 1.2: Lepton- und Hadronebene

Kapitel 2

Projektionen

Zu Beginn dieses Kapitels, das auf der Schwelle von den technischen Grundlagen zu den konkreten Rechnungen steht, soll noch einmal klar vor Augen gestellt werden, was die experimentellen Möglichkeiten der Messung mit den Vorgaben für die phänomenologischen Rechnungen verbindet. Vereinfachend sei angenommen, daß im Experiment Eigenschaften wie die Polarisierung und die Energie, der Impuls und die Winkelverteilung der austretenden Teilchen gemessen werden können und daß aus den auftretenden Jets oder Teilchenschauern auf das Primärteilchen, also in diesem Fall das Quark, Antiquark oder Gluon, zurückgefolgert werden kann. Dahingestellt bleibt dabei die konkrete Verwirklichung dieser Annahmen, doch sind darüber im Vorwort bereits wesentliche Worte gesagt worden.

Gemessen wird also in einem Laborsystem, genauer in einem der Wechselwirkungspunkte eines Elektron-Positron-Speicherringes. Damit ist eine der Achsen des Laborsystems bereits als die Achse des Strahls festgelegt. Gemessen wird das Auftreten eines Quarkjets. Der Impuls des primären Quarks bestimmt also eine zweite Achse, die nicht mit der Strahlachse zusammenfällt (denn dort kann ja bekanntlich nicht gemessen werden). Damit ist die Ebene klar, in der die Messungen stattfinden: Es ist die im letzten Kapitel erwähnte Leptonebene. Für die Rechnungen muß sie lediglich noch um den Polarwinkel θ gedreht werden, so daß die z' -Achse auf die Quarkrichtung fällt. Die Wahl des Polarwinkels ist so vorgenommen, daß für $\theta_W = 0$ die Streuung der Quarks in Vorwärtsrichtung (also für $0 \leq \theta < \pi/2$) größer ist als in Rückwärtsrichtung.

Alle zusätzlich gemessenen Größen sind auf dieses Laborsystem zu beziehen, so auch die Polarisierung des Quarks. Unterschieden wird zwischen einer *longitudinalen Polarisierung* parallel zum Impuls des Quarks, einer *transversal ebenen Polarisierung* senkrecht zum Quarkimpuls in der Leptonebene und einer *transversal normalen Polarisierung* senkrecht zur Leptonebene. Diese Polarisierungsrichtungen sind im Leptonensystem durch die z' -, x' - bzw. y' -Achse gegeben. Dies ist zu berücksichtigen, wenn der Hadrontensor später im Hadronensystem auszurechnen sein wird. Über alle sonstigen Freiheiten, die in der Lage der Hadronebene relativ zur Leptonebene liegen, wird gemittelt, also insbesondere über die Impulsfreiheitsgrade des Antiquarks und den Azimutalwinkel.

2.1 Entwicklung in Kovariante

Eine der Möglichkeiten, bei der Vielgestaltigkeit des Hadrontensors den Überblick zu wahren, ist die *Entwicklung in Kovariante*, also in Lorentz-kovariante Vektoren und Tensoren maximal zweiter Stufe. Dies sind der Viererimpuls (q_μ) des Bosons (Photon oder Z^0 -Vektorboson), der Viererimpuls ($p_{1\mu}$) des Quarks und der metrische Tensor ($g_{\mu\nu}$). Statt der letzten beiden Größen werden solche verwendet, deren Null-Komponente im Schwerpunktsystem, also im Ruhesystem des Bosons, verschwindet. Es sind dies der *vierertransversale Quarkimpuls*

$$\hat{p}_{1\mu} := p_{1\mu} - \frac{p_1 \cdot q}{q^2} q_\mu \quad (2.1)$$

und der *vierertransversale metrische Tensor*

$$\hat{g}_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \quad (2.2)$$

Hinzu kommt der Spin (s_μ) des Quarks, der sich auf das Leptonsystem bezieht, sowie Konstruktionen unter Zuhilfenahme des total antisymmetrischen Tensor ($\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$) der Form

$$\varepsilon(\mu\nu ab) := \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a^\alpha b^\beta \quad \text{und} \quad \varepsilon(\mu abc) := \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma. \quad (2.3)$$

Der Hadrontensor des Bornschen Falls, der ja nicht gemittelt werden muß, da er keine Hadronebene aufspannt, besitzt die vollständige Entwicklung

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}(\text{Born}) = & \\ = & -\hat{g}_{\mu\nu} \mathbf{H}_1 + \hat{p}_{1\mu} \hat{p}_{1\nu} \mathbf{H}_2 + i\varepsilon(\mu\nu \hat{p}_1 q) \mathbf{H}_3 + q_\mu q_\nu \mathbf{H}_4 + (q_\mu \hat{p}_{1\nu} + \hat{p}_{1\mu} q_\nu) \mathbf{H}_5 + \\ & +(q \cdot s) [-\hat{g}_{\mu\nu} \mathbf{G}_1 + \hat{p}_{1\mu} \hat{p}_{1\nu} \mathbf{G}_2 + i\varepsilon(\mu\nu \hat{p}_1 q) \mathbf{G}_3 + q_\mu q_\nu \mathbf{G}_4 + (q_\mu \hat{p}_{1\nu} + \hat{p}_{1\mu} q_\nu) \mathbf{G}_5] + \\ & +(s_\mu \hat{p}_{1\nu} + \hat{p}_{1\mu} s_\nu) \mathbf{G}_6 + (s_\mu q_\nu + q_\mu s_\nu) \mathbf{G}_7 + i\varepsilon(\mu\nu q s) \mathbf{G}_8 + i\varepsilon(\mu\nu \hat{p}_1 s) \mathbf{G}_9 + \\ & + i(s_\mu \hat{p}_{1\nu} - \hat{p}_{1\mu} s_\nu) \mathbf{G}_{10} + i(s_\mu q_\nu - q_\mu s_\nu) \mathbf{G}_{11} + \\ & + (\hat{p}_{1\mu} \varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) + \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s) \hat{p}_{1\nu}) \mathbf{G}_{12} + (q_\mu \varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) + \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s) q_\nu) \mathbf{G}_{13}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Zu erkennen sind fünf spinunabhängige und dreizehn spinabhängige Terme, die durch die *Strukturfunktionen* H_i bzw. G_i der *kovarianten Entwicklung* klassifiziert sind. Nur dann, wenn der Spin nicht in die Richtung des Quarkimpulses fällt, sind diese Terme auch wirklich unabhängig voneinander. Im Falle der longitudinalen Polarisation wird daher nur der Beitrag der fünf spinunabhängigen Terme betrachtet. Zu erkennen ist ferner eine Unterscheidung, die im Druckbild sichtbar gemacht ist: Nur die dickgedruckten Anteile tragen für Elektronen und Positronen, die im Vergleich zur gewählten Schwerpunktsenergie quasi masselos sind, zum Wirkungsquerschnitt bei. Das hängt wieder damit zusammen, daß alle übrigen Anteile von der Ordnung m_e^2/q^2 , also in dieser Anwendung zu vernachlässigen sind. Die Systematik der Entwicklung orientiert sich an dieser Unterscheidung. G_8 und G_9 sind so gewählt, daß G_8 nur für transversal polarisierte Quarks Beiträge erhält. Die Strukturfunktionen G_{10} , G_{11} , G_{12} und G_{13} sind unter der Zeitumkehr T ungerade.

2.2 Berechnung des Leptontensors

Die Berechnung des Leptontensors ist elementar. Dennoch oder gerade auch deshalb soll die Berechnung hier im Detail vorgestellt sein, um sie später auf ähnliche Fälle übertragen zu können. Es ist

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{VV} &= \frac{1}{4} \text{Sp}((\not{p}_+ - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_- + m_e)\gamma_\nu) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\not{p}_+ \gamma_\mu \not{p}_- \gamma_\nu) - \frac{1}{4} m_e^2 \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \\ &= (p_{+\mu} p_{-\nu} - (p_+ p_-) g_{\mu\nu} + p_{-\mu} p_{+\nu}) - m_e^2 g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{VA} &= \frac{1}{4} \text{Sp}((\not{p}_+ - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_- + m_e)\gamma_\nu \gamma_5) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\gamma_5 \not{p}_+ \gamma_\mu \not{p}_- \gamma_\nu) = \\ &= i\varepsilon(p_+ \mu p_- \nu) = -i\varepsilon(\mu\nu p_+ p_-) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{AV} &= \frac{1}{4} \text{Sp}((\not{p}_+ - m_e)\gamma_\mu \gamma_5 (\not{p}_- + m_e)\gamma_\nu) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\gamma_5 \not{p}_- \gamma_\nu \not{p}_+ \gamma_\mu) = \\ &= i\varepsilon(p_- \nu p_+ \mu) = i\varepsilon(\mu\nu p_- p_+) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{AA} &= \frac{1}{4} \text{Sp}((\not{p}_+ - m_e)\gamma_\mu \gamma_5 (\not{p}_- + m_e)\gamma_\nu \gamma_5) = \frac{1}{4} \text{Sp}((\not{p}_+ - m_e)\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5 (\not{p}_- - m_e)\gamma_\nu) = \\ &= \frac{1}{4} \text{Sp}((\not{p}_+ - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_- - m_e)\gamma_\nu) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\not{p}_+ \gamma_\mu \not{p}_- \gamma_\nu) + \frac{1}{4} m_e^2 \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \\ &= (p_{+\mu} p_{-\nu} - (p_+ p_-) g_{\mu\nu} + p_{-\mu} p_{+\nu}) + m_e^2 g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei die abkürzende Schreibweise des Epsilonsymbols aus Gleichung (2.3) Verwendung fand. Neu kombiniert ergibt sich

$$L_{\mu\nu}^1 = p_{+\mu} p_{-\nu} + p_{-\mu} p_{+\nu} - (p_+ p_-) g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

$$L_{\mu\nu}^2 = -m_e^2 g_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

$$L_{\mu\nu}^3 = 0 \quad \text{und} \quad (2.11)$$

$$L_{\mu\nu}^4 = i\varepsilon(\mu\nu p_- p_+) \quad (2.12)$$

(vgl. Gleichung (1.48)). Die relevante Massenskala ist M_Z^2 , demnach kann man Terme wie $L_{\mu\nu}^2$, die proportional zu m_e^2/q^2 sind, vernachlässigen.

2.2.1 Polarisierete Leptonstrahlen

Etwas komplizierter wird die Rechnung im Fall polarisierter Leptonen, doch wird im Folgenden gezeigt, daß dieser Fall durch eine einfache Ersetzung aus dem unpolarisierten hervorgeht. Hier soll nur der Fall longitudinaler Strahlpolarisation betrachtet werden, für die Behandlung der transversalen Strahlpolarisation sei auf [14] verwiesen. Wie bereits im letzten Kapitel erwähnt, wird im Falle der Polarisation eines einlaufenden Teilchens der Ausdruck $(p_\mp \pm m)$ um den Faktor $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s})$ ergänzt. Dieser Faktor geht im Grenzfall masseloser Teilchen in $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ über. Mit Pluszeichen beschreibt es ein rechtshändiges Teilchen bzw. ein linkshändiges Antiteilchen, mit Minuszeichen genau die umgekehrte Situation. Jedoch müssen in einem Teilchenstrahl nicht alle Teilchen polarisiert sein. Der

Grad der longitudinalen Strahlpolarisation wird durch eine Zahl h zwischen -1 und $+1$ beschrieben, wobei positives h überwiegend rechtshändige und negatives h überwiegend linkshändige Teilchen meint. Diese Größe kann formal in den Faktor $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ hineingezogen werden, er lautet dann $\frac{1}{2}(1 + h^- \gamma_5)$ bzw. $\frac{1}{2}(1 - h^+ \gamma_5)$. Mit diesen Ergänzungen soll erneut der Leptontensor berechnet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{VV} &= \frac{1}{4} \text{Sp}((1 - h^+ \gamma_5) \not{p}_+ \gamma_\mu (1 + h^- \gamma_5) \not{p}_- \gamma_\nu) = \\ &= \frac{1}{4} \text{Sp}(\not{p}_+ \gamma_\mu \not{p}_- \gamma_\nu) - \frac{1}{4} h^+ \text{Sp}(\gamma_5 \not{p}_+ \gamma_\mu \not{p}_- \gamma_\nu) + \\ &\quad + \frac{1}{4} h^- \text{Sp}(\gamma_5 \not{p}_- \gamma_\nu \not{p}_+ \gamma_\mu) - \frac{1}{4} h^- h^+ \text{Sp}(\gamma_5 \not{p}_+ \gamma_\mu \gamma_5 \not{p}_- \gamma_\nu) = \\ &= L_{\mu\nu}^{VV} - h^+ L_{\mu\nu}^{VA} + h^- L_{\mu\nu}^{AV} - h^- h^+ L_{\mu\nu}^{AA} \quad \text{und entsprechend} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$L_{\mu\nu}'^{VA} = L_{\mu\nu}^{VA} - h^+ L_{\mu\nu}^{VV} + h^- L_{\mu\nu}^{AA} - h^- h^+ L_{\mu\nu}^{AV}, \quad (2.14)$$

$$L_{\mu\nu}'^{AV} = L_{\mu\nu}^{AV} - h^+ L_{\mu\nu}^{AA} + h^- L_{\mu\nu}^{VV} - h^- h^+ L_{\mu\nu}^{VA}, \quad (2.15)$$

$$L_{\mu\nu}'^{AA} = L_{\mu\nu}^{AA} - h^+ L_{\mu\nu}^{AV} + h^- L_{\mu\nu}^{VA} - h^- h^+ L_{\mu\nu}^{VV}. \quad (2.16)$$

Damit ist (für vernachlässigte Leptonmasse)

$$L_{\mu\nu}'^1 = (1 - h^- h^+) L_{\mu\nu}^1 + (h^- - h^+) L_{\mu\nu}^4, \quad (2.17)$$

$$L_{\mu\nu}'^2 = (1 + h^- h^+) L_{\mu\nu}^2 + i(h^- + h^+) L_{\mu\nu}^3 = 0, \quad (2.18)$$

$$L_{\mu\nu}'^3 = -i(h^- + h^+) L_{\mu\nu}^2 + (1 + h^- h^+) L_{\mu\nu}^3 = 0, \quad (2.19)$$

$$L_{\mu\nu}'^4 = (h^- - h^+) L_{\mu\nu}^1 + (1 - h^- h^+) L_{\mu\nu}^4. \quad (2.20)$$

Die Summe in Gleichung (1.49) schreibt sich dann

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^4 g_{ij} L_{\mu\nu}^i H^{j\mu\nu} &= \sum_{j=1}^4 (g_{1j} L_{\mu\nu}'^1 + g_{4j} L_{\mu\nu}'^4) H^{j\mu\nu} = \\ &= \sum_{j=1}^4 g_{1j} ((1 - h^- h^+) L_{\mu\nu}^1 + (h^- - h^+) L_{\mu\nu}^4) H^{j\mu\nu} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^4 g_{4j} ((h^- - h^+) L_{\mu\nu}^1 + (1 - h^- h^+) L_{\mu\nu}^4) H^{j\mu\nu} = \\ &= \sum_{j=1}^4 (g_{1j} (1 - h^- h^+) + g_{4j} (h^- - h^+)) L_{\mu\nu}^1 H^{j\mu\nu} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^4 (g_{1j} (h^- - h^+) + g_{4j} (1 - h^- h^+)) L_{\mu\nu}^4 H^{j\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^4 \tilde{g}_{ij} L_{\mu\nu}^i H^{j\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Der bisher verwendete Leptontensor kann also weiter verwendet werden, wenn entsprechend die Formfaktoren ersetzt werden durch

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{1j} &= g_{1j} (1 - h^- h^+) + g_{4j} (h^- - h^+) \quad \text{und} \\ \tilde{g}_{4j} &= g_{1j} (h^- - h^+) + g_{4j} (1 - h^- h^+). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die Formfaktoren und damit der Wirkungsquerschnitt verschwinden für $h^+ = h^- = \pm 1$. Gleichhändiges Elektron und Positron wechselwirken also nicht miteinander.

2.2.2 Leptontensor im Hadronsystem

Um die Rechnungen für den (im allgemein komplexeren) Hadrontensor zu vereinfachen, sollen alle Rechnungen im Hadronsystem durchgeführt werden. Dazu ist auch der Leptontensor im Hadronsystem zu berechnen. Die Impulsvierervektoren schreiben sich dort als

$$(p_+^\mu) = \frac{1}{2}\sqrt{q^2}(1; \sin\theta \cos\chi, -\sin\theta \sin\chi, -\cos\theta), \quad (2.23)$$

$$(p_-^\mu) = \frac{1}{2}\sqrt{q^2}(1; -\sin\theta \cos\chi, \sin\theta \sin\chi, \cos\theta) \quad (2.24)$$

So ausgedrückt, ergibt sich

$$(L_{\mu\nu}^1) = \frac{1}{2}q^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sin^2\theta \cos^2\chi & \sin^2\theta \sin\chi \cos\chi & \sin\theta \cos\theta \cos\chi \\ 0 & \sin^2\theta \sin\chi \cos\chi & 1 - \sin^2\theta \sin^2\chi & -\sin\theta \cos\theta \sin\chi \\ 0 & \sin\theta \cos\theta \cos\chi & -\sin\theta \cos\theta \sin\chi & 1 - \cos^2\theta \end{pmatrix},$$

$$(L_{\mu\nu}^4) = \frac{1}{2}q^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \cos\theta & i \sin\theta \sin\chi \\ 0 & i \cos\theta & 0 & i \sin\theta \cos\chi \\ 0 & -i \sin\theta \sin\chi & -i \sin\theta \cos\chi & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Zu erkennen ist neben dem Verschwinden der zeitartigen Komponenten ein breites Spektrum an Winkelabhängigkeiten. Die Abhängigkeit vom Polarwinkel θ spiegelt sich beispielsweise im differentiellen Wirkungsquerschnitt wider, der die allgemeine Form

$$\frac{d\sigma^{(m)}}{d\cos\theta} = \frac{3}{8}(1 + \cos^2\theta)\sigma_U^{(m)} + \frac{3}{4}\sin^2\theta\sigma_L^{(m)} + \frac{3}{4}\cos\theta\sigma_F^{(m)} + \frac{3}{4}\sin\theta\cos\theta\sigma_I^{(m)} + \frac{3}{4}\sin\theta\sigma_A^{(m)} \quad (2.26)$$

besitzt, wobei der Index (m) entweder den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt angibt, in welchem Fall er wegfällt, oder eine der drei Polarisationsrichtungen, also $m \in \{\ell, \perp, N\}$. Da der Hadrontensor in der Ereignisebene keine Abhängigkeit vom Winkel θ besitzt (denn die Richtung des Strahls ist hier nicht von Bedeutung), ist die Winkelabhängigkeit vollständig auf den Leptontensor übergegangen. Um die einzelnen winkelabhängigen Anteile des Wirkungsquerschnitts berechnen zu können, ist es sinnvoll, den Leptontensor in diese verschiedenen Anteile aufzuspalten. Diese Anteile können mittels der Kontraktion der Lorentzindizes als „Projektoren“ auf die verschiedenen Winkelabhängigkeiten betrachtet werden. Es sind allerdings keine Projektoren im strengeren Sinne, da sie nicht die Eigenschaft $\Pi^2 = \Pi$ besitzen.

2.2.3 Trennung vom Leptontensor

Nach der Entwicklung des Leptontensors in Projektoren bleibt ein Faktor $(p_-p_+) = \frac{1}{2}q^2$ übrig, der in den Phasenraumfaktor aufgenommen wird. Die Kontraktion der Projektoren mit dem Hadrontensor ($H_{\mu\nu}^i$) ($i = 1, 2, 3, 4$) liefert die entsprechenden Projektionen H_U^i , H_L^i , H_F^i , H_I^i und H_A^i mit

$$H_\alpha^i := \Pi_\alpha^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^i. \quad (2.27)$$

2.3 Konstruktion der Projektoren

Die Projektoren stehen gewissermaßen dual zu den Tensoren der kovarianten Entwicklung, werden also aus den entsprechend kontravarianten Vektor- und Tensorkomponenten konstruiert. Hier sollen gleich die normierten Formen der Vektoren aufgeführt werden, sie besitzen im Hadronsystem die Form

$$e_0 = (e_0^\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{q^2}} q^\mu \right) = (1; 0, 0, 0), \quad (2.28)$$

$$e_3 = (e_3^\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{(p_1 q)^2 / q^2 - p_1^2}} \hat{p}_1^\mu \right) = (0; 0, 0, 1). \quad (2.29)$$

Die Konstruktionsmöglichkeit eines dritten Einheitsvektors zur Beschreibung des Hadronsystems hängt davon ab, welche Polarisation gemessen wird. Die Richtung der Polarisation ist durch die Spinrichtung gegeben. Da jeweils aber nur ein Spin gemessen werden kann, kann auch jeweils nur ein weiterer Vektor konstruiert werden. Für den Fall longitudinaler Polarisation ist dieser Spinvektor kollinear zu e^0 und e^3 und kann daher keine eigene Richtung aufspannen. Im Falle der transversal ebenen und der transversal normalen Polarisationsrichtung gibt es aber jeweils eine zusätzliche Richtung, nämlich

$$s_x = \pm(0; \cos \chi, -\sin \chi, 0) \quad (\text{transversal ebene Polarisation}) \quad \text{oder} \quad (2.30)$$

$$s_y = \pm(0; \sin \chi, \cos \chi, 0) \quad (\text{transversal normale Polarisation}). \quad (2.31)$$

Die χ -Abhängigkeit rührt daher, daß die Polarisation in der Strahl- und nicht in der Ereignisebene gemessen wird. Als weitere Konstruktionselemente treten der metrische Tensor ($g^{\mu\nu}$) wie auch der total antisymmetrische Tensor ($\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$) hinzu. Ohne die Spinrichtung konstruiert man so zunächst

$$\hat{\Pi}_{U+L} := (\hat{\Pi}_{U+L}^{\mu\nu}) \quad \hat{\Pi}_L := (\hat{\Pi}_L^{\mu\nu}) \quad \hat{\Pi}_F := (\hat{\Pi}_F^{\mu\nu}) \quad (2.32)$$

mit

$$\hat{\Pi}_{U+L}^{\mu\nu} = e_0^\mu e_0^\nu - g^{\mu\nu} = -\hat{g}^{\mu\nu} \quad (2.33)$$

$$\hat{\Pi}_L^{\mu\nu} = e_3^\mu e_3^\nu = \frac{q^2 \hat{p}_1^\mu \hat{p}_1^\nu}{(p_1 q)^2 - p_1^2 q^2} \quad (2.34)$$

$$\hat{\Pi}_F^{\mu\nu} = i\varepsilon(\mu\nu e_3 e_0) = \frac{i\varepsilon(\mu\nu \hat{p}_1 q)}{\sqrt{(p_1 q)^2 - p_1^2 q^2}} \quad (2.35)$$

(man beachte für $\hat{\Pi}_F^{\mu\nu}$, daß die Lorentzindizes μ und ν nur raumartige Werte annehmen können, daher liefert der Unterschied zur Stellung der Indizes in der Kurzschreibweise (2.3) keinen Vorzeichenwechsel). Dies sind für die longitudinale Polarisation die einzigen möglichen Projektoren. Für den nicht kollinearen Spin jedoch sind weitere Projektoren denkbar:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_I^{\mu\nu} &= s^\mu e_3^\nu + e_3^\mu s^\nu & \hat{\Pi}_E^{\mu\nu} &= -(\varepsilon(\mu e_0 e_3 s) e_3^\nu + e_3^\mu \varepsilon(\nu e_0 e_3 s)) \\ \hat{\Pi}_A^{\mu\nu} &= i\varepsilon(\mu\nu e_0 s) & \hat{\Pi}_R^{\mu\nu} &= i(s^\mu e_3^\nu - e_3^\mu s^\nu) \\ \hat{\Pi}_T^{\mu\nu} &= s^\mu s^\nu & \hat{\Pi}_O^{\mu\nu} &= \varepsilon(\mu e_0 e_3 s) \varepsilon(\nu e_0 e_3 s). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Die Darstellungen dieser Projektoren im gewählten Bezugssystem ist in Anhang A nachzusehen. Zu bemerken ist dabei, daß für rein räumliche Komponenten der so konstruierten Tensoren zweiter Stufe die doppelt kovarianten gleich den doppelt kontravarianten Komponenten sind.

2.3.1 Die Drehung der Projektoren

s stand im Vorhergehenden allgemein für den (nicht kollinearen) Spin. Das Aussehen dieser Projektoren ändert sich also je nach Messung von transversal ebener oder normaler Polarisation. Nicht nur das: Man kann erkennen, daß je zwei der neuen Projektoren ihre Winkelabhängigkeit austauschen. So wechseln $\hat{\Pi}_I$ und $\hat{\Pi}_E$, $\hat{\Pi}_A$ und $\hat{\Pi}_R$ bzw. $\hat{\Pi}_T$ und $\hat{\Pi}_O$ ihre Funktion. Vergleicht man die Darstellung des Leptontensors mit den Darstellungen der Projektoren, so ist leicht zu erkennen, daß jeweils nur die Hälfte dieser sich ineinander drehenden Projektoren zum Leptontensor beiträgt. So ergibt sich für die longitudinale Polarisation

$$L^1 = \frac{1}{2}q^2(\hat{\Pi}_{U+L} - \cos^2 \theta \hat{\Pi}_L), \quad L^4 = \frac{1}{2}q^2 \cos \theta \hat{\Pi}_F, \quad (2.37)$$

für die transversal ebene Polarisation

$$\begin{aligned} L^1 &= \frac{1}{2}q^2(\hat{\Pi}_{U+L} - \cos^2 \theta \hat{\Pi}_L - \sin^2 \theta \hat{\Pi}_T + \sin \theta \cos \theta \hat{\Pi}_I), \\ L^4 &= \frac{1}{2}q^2(\cos \theta \hat{\Pi}_F + \sin \theta \hat{\Pi}_A) \end{aligned} \quad (2.38)$$

und für die transversal normale Polarisation

$$\begin{aligned} L^1 &= \frac{1}{2}q^2(\hat{\Pi}_{U+L} - \cos^2 \theta \hat{\Pi}_L - \sin^2 \theta \hat{\Pi}_O + \sin \theta \cos \theta \hat{\Pi}_E), \\ L^4 &= \frac{i}{2}q^2(\cos \theta \hat{\Pi}_F + \sin \theta \hat{\Pi}_R). \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.3.2 Transformationsregeln

Die etwas verwirrende Zerlegung des Leptontensors läßt sich vereinfachen und in die Standardform bringen, wenn folgende Konvention benutzt wird:

$$\Pi_U := \hat{\Pi}_{U+L} - \hat{\Pi}_L, \quad \Pi_L := \hat{\Pi}_L, \quad \Pi_F := \hat{\Pi}_F \quad (2.40)$$

$$\Pi_I := \begin{cases} 0 & \text{für longitudinale Polarisation} \\ \hat{\Pi}_I & \text{für transversal ebene Polarisation} \\ \hat{\Pi}_E & \text{für transversal normale Polarisation} \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\Pi_A := \begin{cases} 0 & \text{für longitudinale Polarisation} \\ \hat{\Pi}_A & \text{für transversal ebene Polarisation} \\ \hat{\Pi}_R & \text{für transversal normale Polarisation} \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\Pi_T := \begin{cases} 0 & \text{für longitudinale Polarisation} \\ \frac{1}{2}\Pi_U - \hat{\Pi}_T & \text{für transversal ebene Polarisation} \\ \frac{1}{2}\Pi_U - \hat{\Pi}_O & \text{für transversal normale Polarisation} \end{cases} \quad (2.43)$$

Effektiv, also in seiner Wirkung auf den Hadrontensor, gilt $\hat{\Pi}_T = \hat{\Pi}_O = \frac{1}{2}\Pi_U$. Das hängt damit zusammen, daß der Hadrontensor den Spin nur bis zur ersten Potenz enthält. Der Leptontensor schreibt sich damit als

$$\begin{aligned} L^1 &= \frac{1}{2}q^2(\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)\Pi_U + \sin^2 \theta \Pi_L + \sin \theta \cos \theta \Pi_I), \\ L^4 &= \frac{1}{2}q^2(\cos \theta \Pi_F + \sin \theta \Pi_A). \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.4 Behandlung des Bornschen Falls

Mit dem Bornschen Term beginnt die Störungsreihe in der Kopplungskonstanten α_s der starken Wechselwirkung. Mit dem Bornschen Fall soll auch der Einstieg in die konkreten Rechnungen beginnen. Besonders hilfreich war hier, daß mit HIP [15] ein Makro-Paket zur Verfügung stand, das unter MATHEMATICA [16] die Berechnung der oft umfangreichen Spuren bewerkstelligte. Viele der Rechnungen wurden entsprechend parallel mit dem Computer und „per Hand“ durchgeführt, so auch die Rechnungen im Bornschen Fall. Erst bei den Baumgraphen höherer Ordnung mußte sich der Autor weitgehend auf die Computerrechnungen verlassen, führte aber immer wieder Stichproben durch. Das Programm wie das verwendete Paket bewiesen bis in die extremsten Fälle hinein ihre Fehlerfreiheit, auch wenn manchmal kräftig nachgeholfen werden mußte, um eine brauchbare Form zu erzielen.

2.4.1 Zur Kinematik des Diagramms nullter Ordnung

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, übernehmen an jedem Vertex die auslaufenden Teilchen den Viererimpuls der einlaufenden Teilchen. Die Impulse sind den Diagrammen in Abbildung 1.1 zu entnehmen, das Diagramm nullter Ordnung ist noch einmal in Abbildung 2.1 dargestellt. Die angebrachten Pfeile geben dabei die Fortbewegung des Teilchens in der Zeit an, die Vorzeichen der Antiteilchenimpulse sind daran angeglichen. Für dieses einfachste Diagramm gilt also

$$p_- + p_+ = q = p_1 + p_2. \quad (2.45)$$

Im Schwerpunktssystem und mit der z -Achse als Flugrichtung des Quarks ergibt sich wie in jedem Zweikörperzerfall, daß sich auch das Antiquark auf der z -Achse bewegt. Es ist

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{q^2}(1; 0, 0, 0), \\ p_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{q^2}(1; 0, 0, v), \\ p_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{q^2}(1; 0, 0, -v). \end{aligned} \quad (2.46)$$

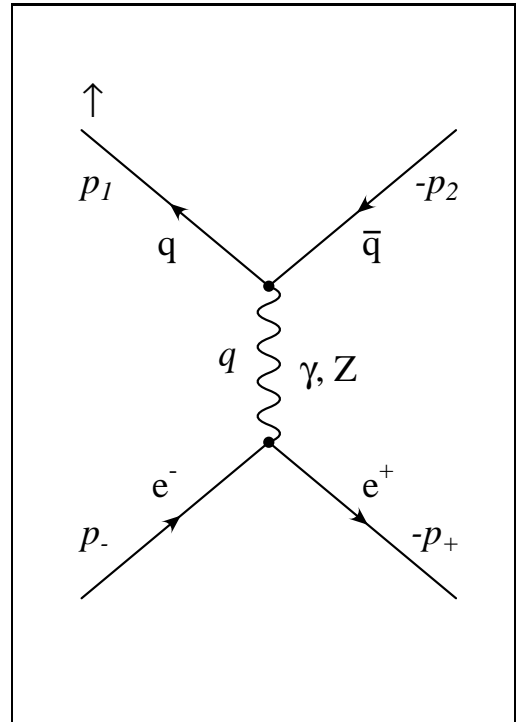


Abbildung 2.1: Bornscher Fall

v bezeichnet die Geschwindigkeit des Quarks (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c). Sie hängt mit der Ruhemasse des Quarks zusammen, die sich durch Quadrieren des Viererimpulses ergibt. So ist

$$p_i^2 = m^2 = \frac{1}{4}q^2(1 - v^2) \quad \text{für } i = 1, 2 \quad (2.47)$$

und damit

$$v^2 = 1 - \frac{4m^2}{q^2} =: 1 - \xi. \quad (2.48)$$

Weiterhin ergibt sich $(p_1 q) = (p_2 q) = \frac{1}{2}q^2$ und $(p_1 p_2) = \frac{1}{4}q^2(1 + v^2)$.

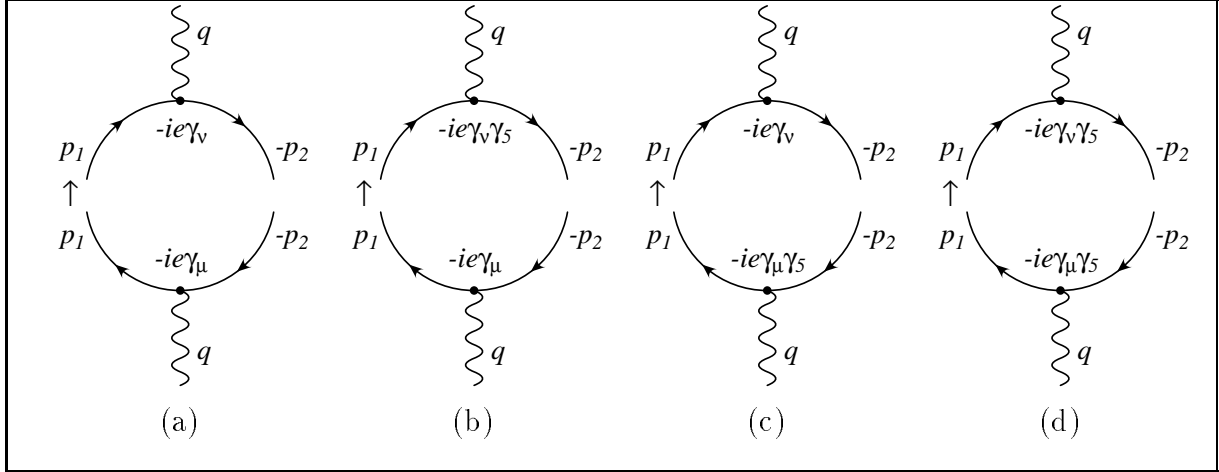


Abbildung 2.2: Die Beiträge VV , VA , AV und AA zum Bornschen Term, die Vorzeichen der Impulse sind erneut an die Pfeilrichtungen angepaßt.

2.4.2 Der Hadrontensor im Bornschen Fall

Zu berechnen sind zunächst die Komponenten VV , VA , AV und AA des hadronischen Tensors, also die Matrixquadrate der auslaufenden Teilchenlinien. Dies soll in Abbildung (2.2) noch einmal auf eine andere Weise dargestellt sein. Der komplex konjugierte Anteil der Matrix wird dabei als auf dem Kopf stehendes Diagramm hinzugefügt, so wie sich ja auch in der konkreten Rechnung bei komplexer Konjugation die Reihenfolge der Faktoren umkehrt. Auslaufende Teilchen gehen dabei in einlaufende Antiteilchen über und umgekehrt. Die Spur wird konstruiert, indem entlang eines Umlaufes entgegen der Pfeilrichtung um den so gebildeten Kreis alle Anteile nacheinander aufgeführt werden.

Tatsächlich kann diesem kombinierten Diagramm ein Stück Wirklichkeit zugemessen werden, denn ein Diagramm, das an den unterbrochenen Stellen verbunden ist, liefert einen ähnlichen Beitrag. Unterschied ist nur, daß es in diesem Fall die Teilchen virtuell sind, daß also an die Stelle der Faktoren $(\not{p} \pm m)$ die entsprechenden Propagatoren treten, über deren Impuls dann integriert wird. Im hier betrachteten Fall wird jedoch nur der Imaginär- oder Absorptivanteil des Feynmanpropagators betrachtet, was einen Faktor $\delta(p^2 - m^2)$ und damit die Massenschalenbedingung liefert.

Zu berechnen sind also, entsprechend den Anteilen (a), (b), (c) und (d) der Abbildung (2.2)

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{VV} &= N_C \text{Sp}(\frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s})(\not{p}_1 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m)\gamma_\nu) = \\ &= N_C (2im\varepsilon(\mu\nu p_1 s) + 2im\varepsilon(\mu\nu p_2 s) - q^2 g_{\mu\nu} + 2(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu})) \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{VA} &= N_C \text{Sp}(\frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s})(\not{p}_1 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m)\gamma_\nu \gamma_5) = \\ &= N_C (-2i\varepsilon(\mu\nu p_1 p_2) - 2m(p_2 s)g_{\mu\nu} + 2m(s_\mu p_{1\nu} - p_{1\mu} s_\nu) + 2m(s_\mu p_{2\nu} + p_{2\mu} s_\nu)) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{AV} &= N_C \text{Sp}(\frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s})(\not{p}_1 + m)\gamma_\mu \gamma_5 (\not{p}_2 - m)\gamma_\nu) = \\ &= N_C (-2i\varepsilon(\mu\nu p_1 p_2) - 2m(p_2 s)g_{\mu\nu} - 2m(s_\mu p_{1\nu} - p_{1\mu} s_\nu) + 2m(s_\mu p_{2\nu} + p_{2\mu} s_\nu)) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{AA} &= N_C \text{Sp}(\frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s})(\not{p}_1 + m)\gamma_\mu \gamma_5 (\not{p}_2 - m)\gamma_\nu \gamma_5) = \\ &= N_C (2im\varepsilon(\mu\nu p_2 s) - 2im\varepsilon(\mu\nu p_1 s) - (q^2 - 4m^2)g_{\mu\nu} + 2(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu})). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Dies soll auf die Vierervektoren $(\hat{p}_{1\mu})$ und $(\hat{g}_{\mu\nu})$ umgeschrieben werden, um die Formfaktoren der kovarianten Entwicklung identifizieren zu können. Im Zweikörperfall ist die

Umformung recht einfach, denn es ist

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{1\mu} = \frac{1}{2}(p_{1\mu} - p_{2\mu}), \quad q_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu} &\Rightarrow p_{1\mu} = \frac{1}{2}q_\mu + \hat{p}_{1\mu}, \quad p_{2\mu} = \frac{1}{2}q_\mu - \hat{p}_{1\mu} \\
g_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{q^2}q_\mu q_\nu \\
p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu} &= \frac{1}{2}q_\mu q_\nu - 2\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu} \\
\varepsilon(\mu\nu p_1 p_2) &= \varepsilon(\mu\nu \hat{p}_1 q) \quad \dots
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Damit ergibt sich

$$H_{\mu\nu}^{VV} = N_C(2im\varepsilon(\mu\nu qs) - q^2\hat{g}_{\mu\nu} - 4\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu}) \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{VA} &= N_C(-2i\varepsilon(\mu\nu \hat{p}_1 q) - 2m(q \cdot s)g_{\mu\nu} + 2m(s_\mu \hat{p}_{1\nu} - \hat{p}_{1\mu} s_\nu) + \\
&\quad + m(s_\mu q_\nu - q_\mu s_\nu) - 2m(s_\mu \hat{p}_{1\nu} + \hat{p}_{1\mu} s_\nu) + m(s_\mu q_\nu + q_\mu s_\nu))
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{AV} &= N_C(-2i\varepsilon(\mu\nu \hat{p}_1 q) - 2m(q \cdot s)g_{\mu\nu} - 2m(s_\mu \hat{p}_{1\nu} - \hat{p}_{1\mu} s_\nu) + \\
&\quad - m(s_\mu q_\nu - q_\mu s_\nu) - 2m(s_\mu \hat{p}_{1\nu} + \hat{p}_{1\mu} s_\nu) + m(s_\mu q_\nu + q_\mu s_\nu))
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$H_{\mu\nu}^{AA} = N_C(-4im\varepsilon(\mu\nu \hat{p}_1 s) - (q^2 - 4m^2)\hat{g}_{\mu\nu} + \frac{4m^2}{q^2}q_\mu q_\nu - 4\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu}). \tag{2.57}$$

Hieraus lassen sich die Bornschen Strukturfunktionen leicht ablesen. Es sind dies

$$\begin{aligned}
H_1^{VV} &= N_C q^2, \quad H_1^{AA} = N_C q^2 v^2, \quad H_2^{VV} = H_2^{AA} = -4N_C, \quad H_4^{AA} = N_C \xi, \\
H_3^{VA} &= H_3^{AV} = -2N_C, \quad G_1^{VA} = G_1^{AV} = 2N_C m, \quad G_9^{AA} = -4N_C, \\
G_6^{VA} &= G_6^{AV} = -2N_C m, \quad G_7^{VA} = G_7^{AV} = N_C m, \quad G_8^{VV} = 2N_C m, \\
G_{10}^{VA} &= -2iN_C m, \quad G_{10}^{AV} = 2iN_C m, \quad G_{11}^{VA} = -iN_C m, \quad G_{11}^{AV} = iN_C m.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Aus den Strukturfunktionen läßt sich zunächst wenig über die Winkelverteilung des Hadrontensors und damit des Wirkungsquerschnitts aussagen, da die kovariante Entwicklung nicht nach den verschiedenen Winkelabhängigkeiten sortiert. Geeigneter ist eine Entwicklung des Wirkungsquerschnittes in die verschiedenen Projektionsanteile, daher wird dieses Vorgehen im Folgenden bevorzugt verwendet. Es existiert jedoch eine eindeutige Beziehung zwischen beiden Entwicklungen, so daß eine Übersetzung der einen in die andere Form möglich ist. Für den hier betrachteten Zweikörperzerfall gilt

$$H_U = 2H_1 + 2(q \cdot s)G_1 \tag{2.59}$$

$$H_L = H_1 + \frac{1}{4}q^2 v^2 H_2 + (q \cdot s) \left(G_1 + \frac{1}{4}q^2 v^2 G_2 + G_6 \right) \tag{2.60}$$

$$H_F = -q^2 v H_3 - (q \cdot s) \left(q^2 v G_3 - \frac{2}{v} G_8 + v G_9 \right) \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_I^{\mu\nu} H_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{q^2} v} \left[q^2 v^2 G_6 + (q \cdot s) \left(2H_1 + \frac{1}{2}q^2 v^2 H_2 - q^2 v^2 H_5 \right) + \right. \\
&\quad \left. + (q \cdot s)^2 \left(2G_1 + \frac{1}{2}q^2 v^2 G_2 - q^2 v^2 G_5 + G_6 - 2G_7 \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\hat{\Pi}_A^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{q^2}} \left[-2q^2 G_8 + (q \cdot s) q^2 H_3 + (q \cdot s)^2 (q^2 G_3 - 2G_8 + G_9) \right] \quad (2.63)$$

$$\hat{\Pi}_E^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \sqrt{q^2} \left(\frac{1}{2} q^2 v^2 - \frac{1}{2} (q \cdot s)^2 (1 - v^2) \right) G_{12} \quad (2.64)$$

$$\hat{\Pi}_R^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{q^2 v}} \left[(-q^2 v^2 + (q \cdot s)^2) G_{10} - 2(q \cdot s)^2 G_{11} \right]. \quad (2.65)$$

Hier sollen zunächst nur die Projektionen H_U , H_L und H_F betrachtet werden. Zu erkennen ist bei ihnen die Aufspaltung in einen spinunabhängigen und einen spinabhängigen Term (proportional zu $(q \cdot s)$). Der letztgenannte Anteil fällt im Falle transversaler Polarisation fort, die nichtverschwindenden Projektionen sind dann

$$\begin{aligned} H_U^{VV} &= 2H_1^{VV} = 2N_C q^2, & H_U^{AA} &= 2H_1^{AA} = 2N_C q^2 v^2, \\ H_L^{VV} &= H_1^{VV} + \frac{1}{4} q^2 v^2 H_2^{VV} = N_C q^2 (1 - v^2), & & \\ H_L^{AA} &= H_1^{AA} + \frac{1}{4} q^2 v^2 H_2^{AA} = 0, & & \\ H_F^{VA} &= -q^2 v H_3^{VA} = 2N_C q^2 v, & H_F^{AV} &= -q^2 v H_3^{AV} = 2N_C q^2 v. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Für die longitudinale Polarisation treten die spinabhängigen Terme hinzu, mit dem Produkt $(q \cdot s) = \pm q^2 v / 2m$ ergibt sich hier

$$\begin{aligned} H_U^{VA} &= 2(q \cdot s) G_1^{VA} = \pm 2N_C q^2 v, & H_U^{AV} &= 2(q \cdot s) G_1^{AV} = \pm 2N_C q^2 v, \\ H_L^{VA} &= 2(q \cdot s) (G_1^{VA} + G_6^{VA}) = 0, & H_L^{AV} &= 2(q \cdot s) (G_1^{AV} + G_6^{AV}) = 0, \\ H_F^{VV} &= (q \cdot s) \frac{2}{v} G_8^{VV} = \pm 2N_C q^2, & H_F^{AA} &= -(q \cdot s) v G_9^{AA} = \pm 2N_C q^2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Diese Ergebnisse lassen sich natürlich auch direkt mittels der Projektoren erzielen. So ergeben sich die fehlenden Projektionen, und zwar

für die transversal ebene Polarisation:

$$\begin{aligned} H_I^{VV} &= H_I^{AA} = 0, \\ H_I^{VA} &= H_I^{AV} = \mp 2N_C m v \sqrt{q^2} = \mp N_C q^2 v \sqrt{\xi}, \\ H_A^{VV} &= \mp 4N_C m \sqrt{q^2} = \mp 2N_C q^2 \sqrt{\xi}, \\ H_A^{VA} &= H_A^{AV} = H_A^{AA} = 0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

für die transversal normale Polarisation:

$$\begin{aligned} H_I^{VV} &= H_I^{VA} = H_I^{AV} = H_I^{AA} = 0, \\ H_A^{VV} &= H_A^{AA} = 0, \\ H_A^{VA} &= \pm 2i N_C m v \sqrt{q^2} = \pm i N_C q^2 v \sqrt{\xi}, \\ H_A^{AV} &= \mp 2i N_C m v \sqrt{q^2} = \mp i N_C q^2 v \sqrt{\xi}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Kapitel 3

Regularisierung und Subtraktion

3.1 Die dimensionale Regularisierung

Die zum Abschluß des letzten Kapitels betrachtete Bornsche Näherung war kinematisch durch die beobachtbaren Größen, also die Viererimpulse von Boson und Quark, festgelegt. Bei höheren Ordnungen der Störungstheorie treten dagegen zusätzliche Impulsfreiheitsgrade auf, über die integriert werden muß. Damit ergeben sich neue Probleme, denn es stellt sich heraus, daß diese Integrale, für einzelne Feynmangraphen berechnet, divergent sein können. Treffendes Beispiel und zugleich häufig anzutreffender Spezialfall ist das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x - \lim_{x \rightarrow 0} \ln x. \quad (3.1)$$

An beiden Grenzen treten hier Divergenzen auf. Ist x ein Maß für den Impulsfreiheitsgrad, so spricht man für große Impulse, also für den ersten Term, von einer *Ultraviolett-* oder *UV-Divergenz*, für kleine Impulse (zweiter Term) von einer *Infrarot-* oder *IR-Divergenz*. Meistens kommen diese Divergenzen nicht gemeinsam in einem Integral vor, aber schon das Auftreten einer dieser Fälle muß sorgfältig behandelt werden. Um diese Integrale definieren zu können, nimmt man kleine Änderungen an ihnen vor, beschneidet beispielsweise den Integrationsbereich entsprechend, indem man Abschneideparameter einführt, die dann nachher die als divergent zu denkenden Anteile parametrisieren. Ein solches Verfahren heißt *Regularisierung*.

Das Verfahren der *dimensionalen Regularisierung*, das 1972 zur Handhabung der UV-Divergenzen vorgeschlagen wurde [17], hat gegenüber anderen Verfahren den Vorteil, daß es grundlegende Prinzipien wie die Eichinvarianz, die Unitarität oder die Lorentzinvarianz der zugrundeliegenden Theorie erhält. Grundidee des Verfahrens ist, daß Integrale, die in vier Raumzeit-Dimensionen divergent sind, dies in einem geringerdimensionalen Raum nicht mehr sind. Ist es möglich, dieses Integral in dieser niederen Dimension n zu berechnen und es dann zu komplexen Werten von n fortzusetzen, so kann es auch zu $n = 4$ fortgesetzt werden. Die Divergenz wird dann durch die Größe $\varepsilon = (4 - n)/2$ parametrisiert. Vorteil der dimensionalen Regularisierung ist, daß die Feynman-Regeln und fast alle Symmetrien nicht von der betrachteten Dimension abhängen und daher erhalten bleiben. Lediglich die Kopplungskonstante muß, wie noch gezeigt wird, umskaliert werden. So lassen sich die Diracschen Gamma-Matrizen auf n Dimensionen erweitern. Erst mit der Matrix γ_5 treten Probleme auf, diese sollen jedoch zu einem späteren Zeitpunkt

besprochen werden. War die dimensionale Regularisierung zunächst für den Fall der UV-Divergenzen konzipiert, so zeigte sich im Folgenden, daß sie auch für die Regularisierung der IR-Divergenzen geeignet ist. Hier muß n dann natürlich entsprechend eine Dimension $n > 4$ bezeichnen.

Genauere Aufmerksamkeit verlangen die physikalischen Dimensionen im betrachteten niederdimensionalen Raum. Geht man von einem (bis auf einen Faktor \hbar) dimensionslosen Wirkungsintegral der typischen Form

$$S = \int (\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})d^n q \quad \text{mit} \quad (3.2)$$

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial q^\mu} + ig_s A_\mu^a T_a, \quad F_{\mu\nu}^a = \frac{\partial A_\nu^a}{\partial q^\mu} - \frac{\partial A_\mu^a}{\partial q^\nu} - g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

aus, so ergibt sich für den Spinor ψ eine Massendimension $(n-1)/2$, für das Eichfeld eine Massendimension $(n-2)/2$ und folglich für die Kopplungskonstante eine Massendimension $\varepsilon = (4-n)/2$. Das Wirkungsintegral wird erneut dimensionslos, wenn statt g_s die Größe

$$\tilde{g}_s := \mu^\varepsilon g_s(\mu^2) \quad (3.3)$$

verwendet wird. g_s ist nun von dem Massenparameter μ abhängig, der zugleich die Funktion der *Renormierungsskala* übernimmt.

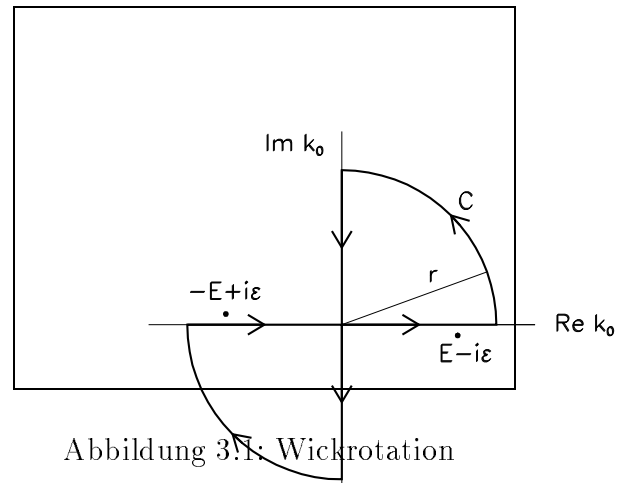
3.1.1 Berechnung des Grundintegrals

Zu berechnen ist zunächst das *Grundintegral*

$$I(n, \alpha) := \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(-k^2 + m^2 - i\varepsilon)^\alpha}. \quad (3.4)$$

Dieses Integral ist im Bereich $n < 2\alpha$ konvergent. Eine Wickrotation der Zeitkomponente im Gegenuhrzeigersinn, welche die Pole des Integranden nicht trifft, überführt dieses Integral in

$$I(n, \alpha) = i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + m^2)^\alpha}. \quad (3.5)$$



Wird nun k durch die Umskalierung $k \rightarrow \mu k$ zu einer dimensionslosen Größe und wird die Winkelintegration im n -dimensionalen Raum durchgeführt, die einen Faktor $2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ liefert, so ergibt sich mit $\kappa = \sqrt{k^2}$

$$I(n, \alpha) = \frac{2i\mu^{n-2\alpha}}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \frac{\kappa^{n-1} d\kappa}{(\kappa^2 + m^2/\mu^2)^\alpha}. \quad (3.6)$$

Mit Hilfe der Substitution

$$y := \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + m^2/\mu^2} \Rightarrow dy = \frac{m^2}{\mu^2} \frac{2\kappa d\kappa}{\kappa^2 + m^2/\mu^2}, \quad (3.7)$$

$$\kappa^2 = \frac{m^2}{\mu^2} \frac{y}{1-y}, \quad \kappa^2 - m^2/\mu^2 = \frac{m^2}{\mu^2} \frac{1}{1-y}, \quad 2\kappa d\kappa = \frac{m^2}{\mu^2} \frac{dy}{(1-y)^2}$$

verwandelt sich das Integral in die *Eulersche Betafunktion*

$$B(m, n) := \int_0^1 y^{m-1} (1-y)^{n-1} dy = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(n+m)}, \quad (3.8)$$

($\Gamma(n)$ ist die *Eulersche Gammafunktion*)

$$\begin{aligned} I(n, \alpha) &= \frac{i\mu^{n-2\alpha}}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2)} \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{n/2-\alpha} \int_0^1 y^{n/2-1} (1-y)^{\alpha-n/2-1} dy = \\ &= \frac{i\mu^{n-2\alpha}}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2)} \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{n/2-\alpha} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)} = \\ &= \frac{i\mu^{n-2\alpha}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{n/2-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Weil dieser Ausdruck nun auch für komplexe n wie auch für $n \geq 2\alpha$ berechenbar ist, kann er als analytische Fortsetzung für $I(n, \alpha)$ angesehen werden.

3.2 Propagatorkorrektur für massive Quarks

Berechnet werden sollen hier die Korrekturen zum Quarkpropagator, wie sie an den auslaufenden Quark- und Antiquarklinien in den Abbildungen 1.1(b) und 1.1(c) auftreten. Der korrigierte Propagator lautet

$$\Delta(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} (-i\Sigma(p)) \frac{i}{\not{p} - m_0}. \quad (3.10)$$

bis zur ersten Ordnung der Störungsreihe. In erster Ordnung ist also lediglich der amputierte Term $-i\Sigma(p)$ zu berechnen. Für ihn ergibt sich in dimensionaler Regularisierung

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (-i\tilde{g}_s \gamma_\alpha) \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m_0} (-i\tilde{g}_s \gamma_\beta) \frac{-iC_F g^{\alpha\beta}}{k^2} = \\ &= -\tilde{g}_s^2 C_F \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\alpha (\not{p} - \not{k} + m_0) \gamma^\alpha}{((p-k)^2 - m_0^2) k^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

m_0 ist zunächst nicht die physikalische Masse des Quarks, es kann also im Folgenden nicht $p^2 = m_0^2$ verwendet werden. Für den Zähler des Integranden ergibt sich durch Vertauschen und Kontraktion des Index α

$$\gamma_\alpha (\not{p} - \not{k} + m_0) \gamma^\alpha = 2(p-k)_\alpha \gamma^\alpha - (\not{p} - \not{k} - m_0) \gamma_\alpha \gamma^\alpha = (2-n)(\not{p} - \not{k}) + nm_0, \quad (3.12)$$

und $\Sigma(p)$ kann somit in einen Term proportional zu γ_μ und einen proportional zu m_0 aufgespalten werden. Der Term proportional zu γ_μ kann indes nur von \not{p} abhängen, so daß sich eine dem Diracschen Operator entsprechende Aufspaltung ergibt,

$$\Sigma(p) =: m_0 \Sigma_{m_0}(p) - \not{p} \Sigma_p(p). \quad (3.13)$$

3.2.1 Berechnung von $\Sigma_{m_0}(p)$

Zur Berechnung dieses Anteils wie auch für die folgenden Berechnungen verwendet man die *Feynman-Parametrisierung*

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_m^{\alpha_m}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_m)} \cdot \int_0^1 \frac{x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_m^{\alpha_m-1} \delta(1 - x_1 - x_2 - \dots - x_m)}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m}} dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad (3.14)$$

in diesem Fall für den recht einfachen Fall $m = 2$, und die Deltadistribution läßt sich ausführen, indem $x_2 = 1 - x_1 =: 1 - x$ gesetzt wird. So ist

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{m_0}(p) &= -n\tilde{g}_s^2 C_F \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - 2pk + p^2 - m_0^2)k^2} = \\ &= -n\tilde{g}_s^2 C_F \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 - 2pkx + (p^2 - m_0^2)x)^2} = \\ &= -n\tilde{g}_s^2 C_F \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{((k - px)^2 - p^2 x^2 + (p^2 - m_0^2)x)^2} = \\ &= -n\tilde{g}_s^2 C_F \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(-k^2 + m_0^2 x - p^2 x(1-x))^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mit Hilfe des Grundintegrals (3.9) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Sigma_{m_0}(p) &= -in\tilde{g}_s^2 C_F \int_0^1 \frac{i\mu^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{m_0^2 x - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right)^{n/2-2} dx = \\ &= \frac{\mu^{-2\varepsilon} \tilde{g}_s^2}{(4\pi)^2} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} \right)^\varepsilon (4 - 2\varepsilon)\Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \left(\frac{m_0^2 x - p^2 x(1-x)}{m_0^2} \right)^{-\varepsilon} dx = \\ &= \frac{\tilde{g}_s^2}{(4\pi)^2} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} \right)^\varepsilon (4 - 2\varepsilon)\Gamma(\varepsilon) \int_0^1 x^{-\varepsilon} \left(1 - \frac{p^2}{m_0^2}(1-x) \right)^{-\varepsilon} dx = \\ &= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} \right)^\varepsilon (4 - 2\varepsilon)\Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \left(x^{-\varepsilon} - \varepsilon \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_0^2}(1-x) \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Verwendung fand im letzten Schritt die Näherungsformel

$$x^\varepsilon = \exp(\varepsilon \ln x) = 1 + \varepsilon \ln x + O(\varepsilon^2). \quad (3.17)$$

Es ist nun

$$\int_0^1 x^{-\varepsilon} dx = \frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon \quad (3.18)$$

und mit der Substitution $y := 1 - a(1-x)$, $a := p^2/m_0^2$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_0^2}(1-x) \right) dx &= \frac{1}{a} \int_{1-a}^1 \ln y dy = \frac{1}{a} \left[y \ln y - y \right]_{1-a}^1 = \\ &= -1 - \frac{m_0^2 - p^2}{p^2} \ln \left(\frac{m_0^2 - p^2}{m_0^2} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

also

$$\Sigma_{m_0}(p) = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} \right)^\varepsilon (4 - 2\varepsilon) \Gamma(\varepsilon) \left(1 + 2\varepsilon + \varepsilon \frac{m_0^2 - p^2}{p^2} \ln \left(\frac{m_0^2 - p^2}{m_0^2} \right) \right). \quad (3.20)$$

Schließlich sind noch die Entwicklungen der Eulerschen Gammafunktion,

$$\begin{aligned} \Gamma(1 + \varepsilon) &= 1 - \varepsilon\gamma_E + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) + O(\varepsilon^3) \\ \Gamma(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1 + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.21)$$

($\gamma_E = 0.577\dots$ ist die *Eulersche Konstante*) sowie

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} \right)^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} \right) \quad (3.22)$$

zu verwenden, es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \Sigma_{m_0}(p) &= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(1 + \varepsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} \right) \right) (4 - 2\varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(1 + 2\varepsilon + \varepsilon \frac{m_0^2 - p^2}{p^2} \ln \left(\frac{m_0^2 - p^2}{m_0^2} \right) \right) = \\ &= 4 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} \right) + \frac{3}{2} + \frac{m_0^2 - p^2}{p^2} \ln \left(\frac{m_0^2 - p^2}{m_0^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.2.2 Berechnung von $\Sigma_p(p)$

Hier ist nach den gleichen Umformungen

$$\begin{aligned} \not{p} \Sigma_p(p) &= i(n-2) \tilde{g}_s^2 C_F \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\not{p} - \not{k}}{(k^2 - 2pk + p^2 - m_0^2)k^2} = \\ &= i(n-2) \tilde{g}_s^2 C_F \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int_0^1 \frac{\not{p}(1-x) - \not{k}}{(-k^2 + m_0^2 x - p^2 x(1-x))^2} dx = \\ &= i(n-2) \tilde{g}_s^2 C_F \not{p} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int_0^1 \frac{(1-x) dx}{(-k^2 + m_0^2 x - p^2 x(1-x))^2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Im letzten Schritt wurde die Symmetrie der k -Integration benutzt. Auch hier kann das Grundintegral Verwendung finden, es liefert

$$\Sigma_p(p) = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} \right)^\varepsilon (2 - 2\varepsilon) \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 (1-x) x^{-\varepsilon} \left(1 - \frac{p^2}{m_0^2} (1-x) \right)^{-\varepsilon} dx. \quad (3.25)$$

Ferner ist

$$\int_0^1 (1-x) x^{-\varepsilon} dx = \frac{1}{(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon \right), \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_0^2} (1-x) \right) &= \frac{1}{a^2} \int_{1-a}^1 (1-y) \ln y dy = \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{(m_0^2)^2 - (p^2)^2}{2(p^2)^2} \ln \left(\frac{m_0^2 - p^2}{m_0^2} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)x^{-\varepsilon} \left(1 - \frac{p^2}{m_0^2}(1-x)\right)^{-\varepsilon} dx &= \int_0^1 (1-x) \left(x^{-\varepsilon} - \varepsilon \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_0^2}(1-x)\right)\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 2\varepsilon + \varepsilon \frac{m_0^2}{p^2} + \varepsilon \frac{(m_0^2)^2 - (p^2)^2}{(p^2)^2} \ln \left(\frac{m_0^2 - p^2}{m_0^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Zusammengenommen ergibt sich

$$\begin{aligned} \Sigma_p(p) &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(1 + \varepsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2}\right)\right) (1-\varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(1 + \varepsilon - \varepsilon \frac{m_0^2}{p^2} - \varepsilon \frac{(m_0^2)^2 - (p^2)^2}{(p^2)^2} \ln \left(\frac{m_0^2 - p^2}{m_0^2}\right)\right) = \\ &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2}\right) + 1 + \frac{m_0^2}{p^2} + \frac{(m_0^2)^2 - (p^2)^2}{(p^2)^2} \ln \left(\frac{m_0^2 - p^2}{m_0^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.2.3 Das Renormierungsverfahren

Wie unschwer zu erkennen ist, besitzen $\Sigma_p(p)$ wie auch $\Sigma_{m_0}(p)$ $1/\varepsilon$ -Singularitäten. Durch einen formalen Trick können diese nun beseitigt werden. Dazu nimmt man an, daß sowohl die Wellenfunktionen als auch die Masse und Ladung des Quarks noch einmal neu normiert, *renormiert* werden kann. Es soll also gelten

$$\psi_0 = \sqrt{Z_2}\psi_r, \quad m_0 = Z_m m_r \quad \text{und} \quad e_0 = Z_1 e_r, \quad (3.30)$$

wobei ψ_0 , m_0 und e_0 die unrenormierten oder „nackten“ Größen und ψ_r , m_r und e_r die renormierten Größen darstellen. Dabei lassen sich die Renormierungsfaktoren Z_1 , Z_2 und Z_m , obwohl sie die Singularitäten absorbieren, formal als Potenzreihen des Entwicklungsparameters α_s darstellen,

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + Z_1^{(1)}\alpha_s + O(\alpha_s^2), & Z_m &= 1 + Z_m^{(1)}\alpha_s + O(\alpha_s^2). \\ Z_2 &= 1 + Z_2^{(1)}\alpha_s + O(\alpha_s^2), \end{aligned} \quad (3.31)$$

Diese Renormierung gelingt im vorliegenden Fall der Propagatorfunktion $\Delta(p)$. Betrachtet man Gleichung (3.10) als erstes Glied in der Entwicklung nach α_s , so kann die Schreibweise

$$\Delta(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)} \quad (3.32)$$

naheliegen. Behandelt man im Folgenden alle Ausdrücke nur bis zur Ordnung α_s , so ist diese Schreibweise gerechtfertigt. Andererseits steht der Propagator aber zwischen Wellenfunktionen, so daß für den renormierten Propagator

$$\Delta_r(p) = \frac{i}{\not{p} - m_r - \Sigma_r(p)} = Z_2^{-1} \Delta(p) \quad (3.33)$$

ist. Dies liefert, in erster Ordnung in α_s , eine Beziehung zwischen der renormierten und der unrenormierten Propagatorkorrektur,

$$\Sigma_r(p) = \Sigma(p) - (Z_2 - 1)\not{p} + (Z_2 Z_m - 1)m_r. \quad (3.34)$$

Während $\Sigma(p)$ noch singuläre Terme enthält, ist zu verlangen, daß dies für $\Sigma_r(p)$ nicht mehr gilt. Die Frage nach dem Subtraktionsverfahren, die Frage also, wie die singulären Terme von den regulären getrennt und ob noch endliche Beiträge in den singulären Anteil mit aufgenommen werden, soll später betrachtet werden. Zunächst sei eine solche Trennung vorausgesetzt, und ein singulärer Term $\Sigma_s(p)$ läßt sich sicherlich auch wieder schreiben als einen Term proportional zu \not{p} und einen solchen proportional zu m_0 , was in der gewählten Ordnung der Näherung durch m_r zu ersetzen ist,

$$\Sigma_s(p) := \Sigma(p) - \Sigma_r(p) = -\not{p}\Sigma_{p,s}(p) + m_r\Sigma_{m_0,s}(p). \quad (3.35)$$

Ein Vergleich mit der Gleichung (3.34) liefert

$$-\Sigma_{p,s}(p) = Z_2 - 1, \quad \Sigma_{m_0,s}(p) = -(Z_2 Z_m - 1) \quad (3.36)$$

oder umgekehrt

$$\begin{aligned} Z_2 &= 1 - \Sigma_{p,s}(p) + O(\alpha_s^2), \\ Z_m &= 1 + \Sigma_{p,s}(p) - \Sigma_{m_0,s}(p) + O(\alpha_s^2). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Angenommen, man möchte nur die Terme $1/\varepsilon$ als singulären Beitrag abspalten. Dann ergibt sich aus den Gleichungen (3.37)

$$Z_2^{\text{MS}} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{\varepsilon}, \quad Z_m^{\text{MS}} = 1 - 3 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.38)$$

Dieses Subtraktionsverfahren, auch *minimales Subtraktionsverfahren* (MS) genannt, führt zwar zu einfachen Renormierungsfaktoren, aber zu relativ komplexen Greenschen Funktionen. Daher wurde ein anderes Verfahren konstruiert, das *modifizierte minimale Subtraktionsverfahren* ($\overline{\text{MS}}$) [18], das statt des Terms $1/\varepsilon$ den Ausdruck

$$\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi, \quad (3.39)$$

der als genereller Faktor auftritt, zum singulären Anteil schlägt. Entsprechend erweitern sich hier auch die Renormierungsfaktoren zu

$$Z_2^{\overline{\text{MS}}} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right), \quad (3.40)$$

$$Z_m^{\overline{\text{MS}}} = 1 - 3 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right). \quad (3.41)$$

3.2.4 Die Renormierung auf der Massenschale

Die Massenschalenrenormierung ist die in der QED gebräuchliche Methode. Sie wählt die Renormierungsfaktoren Z_2 und Z_m so, daß $\Delta_r(p)$ bei $\not{p} = m$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum i hat. Dabei wird ferner angenommen, daß die renormierte Masse mit der physikalischen Masse m identisch ist. Dies hat zur Konsequenz, daß in der Entwicklung

$$\Sigma_r(p) = \Sigma_p(m) + \left. \frac{\partial \Sigma_r(p)}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} (\not{p} - m) + O((\not{p} - m)^2) \quad (3.42)$$

der renormierten Propagatorkorrektur sowohl der konstante als auch der lineare Term verschwinden müssen. Setzt man hier Gleichung (3.34) ein, so ergibt sich als Forderung

$$\begin{aligned}\Sigma_r(m) &= \Sigma(m) - Z_2 m + Z_2 Z_m m = 0 \\ &\Rightarrow Z_m^{\text{OS}} = 1 - \frac{1}{m} \Sigma(m) + O(\alpha_s^2) \\ \frac{\partial \Sigma_r(p)}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} &= \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial \not{p}} - (Z_2 - 1) = 0 \Rightarrow Z_2^{\text{OS}} = 1 + \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma(p) \Big|_{\not{p}=m}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Mit $\Sigma(p) = m \Sigma_m(p) - \not{p} \Sigma_p(p)$ (hier konnte in der gewählten Ordnung m_0 durch m ersetzt werden) ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} = \frac{\partial p^2}{\partial \not{p}} \frac{\partial}{\partial p^2} = \frac{\partial \not{p}^2}{\partial \not{p}} \frac{\partial}{\partial p^2} = 2 \not{p} \frac{\partial}{\partial p^2} \quad (3.44)$$

die Ableitung gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma(p) \Big|_{\not{p}=m} = -\Sigma_p(m) + 2m^2 (-\Sigma'_p(m) + \Sigma'_m(m)), \quad (3.45)$$

wobei der Strich für die Ableitung nach p^2 steht. Die Ausdrücke $\Sigma_m(p)$ und $\Sigma_p(p)$, nach p^2 abgeleitet, ergeben

$$\begin{aligned}m^2 \Sigma'_m(m) &= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(-4 \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) - 4 \right) \Big|_{p^2=m^2} \quad \text{und} \\ m^2 \Sigma'_p(m) &= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(-2 \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) - 3 \right),\end{aligned}\quad (3.46)$$

zusammen mit

$$\Sigma_p(m) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi \mu^2}{m^2} \right) + 2 \right) \quad (3.47)$$

also

$$\begin{aligned}Z_2^{\text{OS}} &= 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi \mu^2}{m^2} \right) + 2 \right) + \\ &\quad - 2 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(2 \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) + 1 \right) \Big|_{p^2=m^2}.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Der Grenzfall $p^2 = m^2$ der Massenschale ist für den zweiten Term nicht mehr so einfach zu bilden. Er kann jedoch mit Hilfe eines anderen Regularisierungsverfahrens noch einmal konstruiert werden.

3.2.5 Regularisierung mit Hilfe der Gluonmasse

Diese Regularisierungsmethode gibt dem Gluon eine kleine Masse $\sqrt{\Lambda q^2}$, die als Regularisierungsparameter fungiert. Die Einführung der Gluonmasse läßt den Gluonpropagator eine andere Form annehmen, nämlich $-i C_F g^{\alpha\beta} / (k^2 - \Lambda q^2)$. Zur Rechnung werden nur dann Terme in höherer als nullter Ordnung in Λ herangezogen, wenn sie regularisierungsnotwendig sind. Die Kombination mit der dimensional Regularisierung, die in diesem Zusammenhang verwendet wird, trennt exakt zwischen IR- und UV-Divergenzen.

Die UV-Divergenzen werden von der dimensional Regularisierungsmethode geliefert, die IR-Divergenzen durch Regularisierung mit Hilfe der Gluonmasse. So ergibt sich in direkter Übertragung der bisherigen Rechnungen

$$\begin{aligned}
\Sigma_p(p) &= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon (2 - 2\varepsilon) \Gamma(\varepsilon) \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^1 (1-x) \left(1 - \varepsilon \ln \left(\frac{m^2 x - p^2 x(1-x) + \Lambda q^2(1-x)}{m^2} \right) \right) dx = \\
&= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) - 1 + \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^1 (1-x) \ln \left(\frac{m^2 x - p^2 x(1-x) + \Lambda q^2(1-x)}{m^2} \right) dx \right), \tag{3.49}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
-\Sigma_p(m) &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) - 1 + \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^1 (1-x) \ln \left(\frac{m^2 x^2 + \Lambda q^2(1-x)}{m^2} \right) dx \right) = \\
&= -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) - 1 - 4 \int_0^1 (1-x) \ln x dx \right) = \\
&= -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 2 \right) \tag{3.50}
\end{aligned}$$

und mit $a := \Lambda q^2/m^2$

$$\begin{aligned}
-2m^2 \Sigma'_p(m) &= -4 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \int_0^1 \frac{m^2 x(1-x)^2 dx}{\Lambda q^2(1-x) + m^2 x^2} = -4 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + a(1-x)} dx = \\
&= -4 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\int_0^1 x dx - 2 \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2x-a) dx}{x^2 + a(1-x)} \right) = \\
&= 2 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(3 + \ln \left(\frac{\Lambda q^2}{m^2} \right) \right). \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Für den Term $\Sigma_m(p)$ berechnet man

$$\begin{aligned}
\Sigma_m(p) &= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon (4 - 2\varepsilon) \Gamma(\varepsilon) \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^1 \left(1 - \varepsilon \ln \left(\frac{m^2 x - p^2 x(1-x) + \Lambda q^2(1-x)}{m^2} \right) \right) dx = \\
&= 4 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} + \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \ln \left(\frac{m^2 x - p^2 x(1-x) + \Lambda q^2(1-x)}{m^2} \right) dx \right), \tag{3.52}
\end{aligned}$$

hier ergibt sich

$$2m^2 \Sigma'_m(m) = 8 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \int_0^1 \frac{m^2 x(1-x) dx}{m^2 x - p^2 x(1-x) + \Lambda q^2(1-x)} =$$

$$= -8 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \int_0^1 \frac{(x^2 - x) dx}{x^2 + a(1-x)} = -2 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(4 + 2 \ln \left(\frac{\Lambda q^2}{m^2} \right) \right). \quad (3.53)$$

Zusammen liefert dies den Renormierungsfaktor

$$Z_2^{\text{OS}} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 2 \right) - 2 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\ln \left(\frac{\Lambda q^2}{m^2} \right) + 1 \right). \quad (3.54)$$

Zwischen der Regularisierung mit Gluonmasse und der dimensional Regularisierung besteht nun eine Korrespondenz, die sich in der *Korrespondenzformel*

$$\ln \left(\frac{\Lambda q^2}{m^2} \right) \leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \quad (3.55)$$

ausdrückt. Benutzt man diese, so ergibt sich schließlich

$$Z_2^{\text{OS}} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + 4 \right). \quad (3.56)$$

3.3 Vertexkorrektur für massive Quarks

Berechnet werden sollen die Korrekturen zum Z_0 -Quark-Vertex für massive Quarks,

$$\Lambda_\mu^V(p_1, p_2) = -ieQ_f(\gamma_\mu + \Gamma_\mu^V(p_1, p_2)), \quad (3.57)$$

in erster Ordnung der Störungstheorie, also der Zusatzterm $\Gamma_\mu^V(p_1, p_2)$. Er liefert

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^V(p_1, p_2) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (-ig_s \gamma_\alpha) \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \gamma_\mu \frac{i}{-\not{p}_2 + \not{k} - m} (-ig_s \gamma_\beta) \frac{-iC_F g^{\alpha\beta}}{k^2} = \\ &= -ig_s^2 C_F \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\alpha (\not{p}_1 + \not{k} + m) \gamma_\mu (-\not{p}_2 + \not{k} + m) \gamma^\alpha}{((p_1 + k)^2 - m^2)((p_2 - k)^2 - m^2)k^2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Der Zähler ergibt nach Durchtauschen von γ_α und Umsortieren

$$\begin{aligned} &\gamma_\alpha (\not{p}_1 + \not{k} + m) \gamma_\mu (-\not{p}_2 + \not{k} + m) \gamma^\alpha = \\ &= 4(k^2 - (p_2 - p_1)k - p_1 p_2) \gamma_\mu + (\not{p}_1 + \not{k} - m)(4(p_2 - k)_\mu + 2m\gamma_\mu) + \\ &\quad + (2m\gamma_\mu - 4((p_1 + k)_\mu)(-\not{p}_2 + \not{k} - m) + (6 - n)(\not{p}_1 + \not{k} - m) \gamma_\mu (-\not{p}_2 + \not{k} - m) = \\ &\rightarrow 4(k^2 - (p_2 - p_1)k - p_1 p_2) \gamma_\mu + 4(p_2 - k)_\mu \not{k} + 2m \not{k} \gamma_\mu + \\ &\quad + 2m \gamma_\mu \not{k} - 4(p_1 + k)_\mu \not{k} + (6 - n) \not{k} \gamma_\mu \not{k} = \\ &= ((n - 2)k^2 - 4(p_2 - p_1)k - 4p_1 p_2) \gamma_\mu + 4mk_\mu + \\ &\quad + 4(p_2 - p_1)_\mu \not{k} + 2(2 - n)k_\mu \not{k}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dabei wurde verwendet (durch „ \rightarrow “ angedeutet), daß die Vertexkorrektur stets zwischen den Spinoren der freien Quarks steht, und daß für diese gilt:

$$\bar{u}(p_1)(\not{p}_1 - m) = 0, \quad (-\not{p}_2 - m)v(p_2) = 0. \quad (3.60)$$

$\Gamma_\mu^V(p_1, p_2)$ läßt sich nun auf eine Reihe von Grundintegralen zurückführen, die im folgenden berechnet werden sollen. Es sind dies

$$\begin{aligned} I_3(p_1, p_2) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{((p_1 + k)^2 - m^2)((p_2 - k)^2 - m^2)k^2} \\ I_3^\alpha(p_1, p_2) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\alpha}{((p_1 + k)^2 - m^2)((p_2 - k)^2 - m^2)k^2} \\ I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\alpha k^\beta}{((p_1 + k)^2 - m^2)((p_2 - k)^2 - m^2)k^2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Alle diese Integrale lassen sich wiederum auf das Grundintegral (3.9) zurückführen.

3.3.1 Berechnung von $I_3(p_1, p_2)$

Durch Verwendung der Feynmanparametrisierung ergibt sich

$$\begin{aligned} I_3(p_1, p_2) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)k^2} = \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + 2p_1 kx - 2p_2 ky)^3} = \\ &= -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(-k^2 + (p_1 x - p_2 y)^2)^3}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Hier läßt sich nun (3.9) für $\alpha = 3$ verwenden, wobei die Masse m in diesem Fall zu ersetzen ist durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} (p_1 x - p_2 y)^2 &= m^2(x^2 + y^2) - 2(p_1 p_2)xy = \\ &= \frac{1}{4}q^2((x - y)^2 - v^2(x + y)^2) = \frac{1}{4}q^2u^2(w^2 - v^2) \end{aligned} \quad (3.63)$$

mit $u := x + y$ und $w := (y - x)/(x + y)$. Die Integration über x und y läßt sich ferner in eine Integration über u und w verwandeln mit $2dx dy = u du dw$, $u \in [0, 1]$, $w \in [-1, 1]$. Es ist dann

$$\begin{aligned} I_3(p_1, p_2) &= -\frac{i\mu^{n-6}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(3 - n/2)}{\Gamma(3)} \int_0^1 du u \int_{-1}^{+1} dw \left(\frac{q^2 u^2 (w^2 - v^2)}{4\mu^2} \right)^{n/2-3} = \\ &= -\frac{i\mu^{-2-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \Gamma(1 + \varepsilon) \int_0^1 du u \left(\frac{m^2 u^2}{\mu^2} \right)^{-1-\varepsilon} \int_0^1 dw \left(\frac{1 - v^2}{w^2 - v^2} \right)^{1+\varepsilon} = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2 m^2} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{2\varepsilon} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \int_0^1 dw \left(\frac{1 - v^2}{w^2 - v^2} \right)^{1+\varepsilon} = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}\Gamma(1 + \varepsilon)}{(4\pi)^2 q^2 v \varepsilon} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \frac{2v}{1 - v^2} \int_0^1 dw \left(\frac{1 - v^2}{w^2 - v^2} \right)^{1+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Dabei ist $n = 4 - 2\varepsilon$ gesetzt und die Integration über u für $\varepsilon < 0$ ausgeführt worden. Zur Berechnung des verbleibenden Integrals wird die Näherung (3.17) sowie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2v}{w^2 - v^2} = \frac{1}{w - v} - \frac{1}{w + v} \quad (3.65)$$

verwendet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{2v}{1-v^2} \int_0^1 dw \left(\frac{1-v^2}{w^2-v^2} \right)^{1+\varepsilon} = \\
& = \int_0^1 dw \left(\frac{2v}{w^2-v^2} \right) + \varepsilon \int_0^1 dw \left(\frac{2v}{w^2-v^2} \right) \ln \left(\frac{1-v^2}{w^2-v^2} \right) = \\
& = \int_0^1 \frac{dw}{w-v} - \int_0^1 \frac{dw}{w+v} + \\
& \quad - \varepsilon \int_0^1 \frac{dw}{w-v} \ln \left(\frac{w-v}{1-v} \right) - \varepsilon \int_0^1 \frac{dw}{w-v} \ln \left(\frac{w+v}{1+v} \right) + \\
& \quad + \varepsilon \int_0^1 \frac{dw}{w+v} \ln \left(\frac{w-v}{1-v} \right) + \varepsilon \int_0^1 \frac{dw}{w+v} \ln \left(\frac{w+v}{1+v} \right). \tag{3.66}
\end{aligned}$$

Um die Integrationen, die für den physikalischen Fall $v \leq 1$ teilweise zu Logarithmen mit negativem Argument führen, bewerkstelligen zu können, wird im Folgenden zunächst der unphysikalische Fall $v > 1$ berechnet, das Ergebnis dann später zu $v \leq 1$ fortgesetzt. So kann der erste, zweite, dritte und sechste Term auf einfache Weise mit Hilfe der Substitution $w' = (w \pm v)/(1 \pm v)$ und partieller Integration berechnet werden,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{dw}{w-v} - \int_0^1 \frac{dw}{w+v} = \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right), \\
& \int_0^1 \frac{dw}{w-v} \ln \left(\frac{w-v}{1-v} \right) = -\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{v-1}{v} \right), \\
& \int_0^1 \frac{dw}{w+v} \ln \left(\frac{w+v}{1+v} \right) = -\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{v+1}{v} \right). \tag{3.67}
\end{aligned}$$

Für den vierten und fünften Term muß der *Dilogarithmus* [19]

$$\text{Li}_2(x) := - \int_0^x \frac{dx'}{x'} \ln(1-x') \tag{3.68}$$

benutzt werden. Hier ergibt sich mit den gleichen Substitutionen

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{dw}{w-v} \ln \left(\frac{w+v}{1+v} \right) = \int_{-v/(1-v)}^1 \frac{dw'}{w'} \ln \left(\frac{1-v}{1+v} w' + \frac{2v}{1+v} \right) = \\
& = -\ln \left(\frac{2v}{1+v} \right) \ln \left(\frac{-v}{1-v} \right) + \int_{-v/(1-v)}^1 \frac{dw'}{w'} \ln \left(1 + \frac{1-v}{2v} w' \right) = \\
& = -\ln \left(\frac{2v}{1+v} \right) \ln \left(\frac{-v}{1-v} \right) + \int_{1/2}^{-(1-v)/2v} \frac{dw''}{w''} \ln(1-w'') = \\
& = -\ln \left(\frac{2v}{v+1} \right) \ln \left(\frac{v}{v-1} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{v-1}{2v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1}{2} \right), \quad \text{entsprechend} \tag{3.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{dw}{w+v} \ln \left(\frac{w-v}{1-v} \right) = \int_{v/(1+v)}^1 \frac{dw'}{w'} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} w' - \frac{2v}{1-v} \right) = \\
& = -\ln \left(\frac{2v}{v-1} \right) \ln \left(\frac{v}{v+1} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{v+1}{2v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1}{2} \right). \tag{3.70}
\end{aligned}$$

Die Summe all dieser Beiträge liefert zur Ordnung $O(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
& \frac{2v}{1-v^2} \int_0^1 dw \left(\frac{1-v^2}{w^2-v^2} \right)^{1+\varepsilon} = \\
& = \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + \varepsilon \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{v-1}{v} \right) - \varepsilon \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{v+1}{v} \right) + \varepsilon \ln \left(\frac{2v}{v+1} \right) \ln \left(\frac{v}{v-1} \right) + \\
& + \varepsilon \text{Li}_2 \left(\frac{v-1}{2v} \right) - \varepsilon \ln \left(\frac{2v}{v-1} \right) \ln \left(\frac{v}{v+1} \right) - \varepsilon \text{Li}_2 \left(\frac{v+1}{2v} \right) = \\
& = \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + \varepsilon \frac{1}{2} \ln \left(\frac{v^2-1}{v^2} \right) \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + \\
& + \varepsilon \ln \left(\frac{v+1}{v} \right) \ln \left(\frac{v-1}{v} \right) - \varepsilon \ln 2 \ln \left(\frac{v-1}{v} \right) + \varepsilon \text{Li}_2 \left(\frac{v-1}{2v} \right) + \\
& - \varepsilon \ln \left(\frac{v-1}{v} \right) \ln \left(\frac{v+1}{v} \right) + \varepsilon \ln 2 \ln \left(\frac{v+1}{v} \right) - \varepsilon \text{Li}_2 \left(\frac{v+1}{2v} \right) = \\
& = \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + 2\varepsilon L(v) \tag{3.71}
\end{aligned}$$

mit

$$2L(v) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{v^2-1}{4v^2} \right) \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{v-1}{2v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{v+1}{2v} \right). \tag{3.72}$$

Zum Anfang zurückgekehrt erhält man

$$\begin{aligned}
I_3(p_1, p_2) & = \frac{i\mu^{-2\varepsilon} \Gamma(1+\varepsilon)}{(4\pi)^2 q^2 v} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + 2L(v) \right) = \\
& = \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2 q^2 v} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + 2L(v) + O(\varepsilon) \right). \tag{3.73}
\end{aligned}$$

Dabei wurden die Entwicklungen (3.21) und (3.22) benutzt. Der physikalische Sektor $v \leq 1$ ergibt sich durch die analytische Fortsetzung

$$\ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) \rightarrow \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) + i\pi \tag{3.74}$$

($\ln(f(z)) = \ln(|f(z)|) + i\text{Arg}(f(z+i0))$). Unter Verwendung der Dilogarithmenbeziehungen

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2(-z) \quad \text{für } z \notin [0, 1[, \tag{3.75}$$

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \ln z \ln(1-z) \tag{3.76}$$

ergibt sich hier ferner

$$2L(v) = \text{Li}_2 \left(\frac{2v}{1+v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{-2v}{1-v} \right) + i\pi \ln \left(\frac{1+v}{2v} \right) - \pi^2. \tag{3.77}$$

3.3.2 Berechnung von $I_3^\alpha(p_1, p_2)$

Hier erhält man

$$I_3^\alpha(p_1, p_2) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\alpha}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)k^2}. \quad (3.78)$$

Prinzipiell läßt sich diese Größe als Vektor durch die beiden Vektoren $p_2 - p_1$ und $q = p_1 + p_2$ ausdrücken,

$$I_3^\alpha(p_1, p_2) = (p_2 - p_1)^\alpha I_3^{11}(p_1, p_2) + q^\alpha I_3^{12}(p_1, p_2). \quad (3.79)$$

Allerdings erkennt man aus der Invarianz des Integrals gegenüber der Vertauschung von p_1 und $-p_2$, daß der Koeffizient I_3^{12} verschwinden muß. Mit $(p_2 - p_1)^2 = 2(m^2 - p_1 p_2) = -q^2 v^2$ berechnet sich I_3^{11} nun zu

$$\begin{aligned} -q^2 v^2 I_3^{11} &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{p_2 k - p_1 k}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)k^2} = \\ &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \left(\frac{1}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(k^2 + 2p_1 k)k^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(k^2 - 2p_2 k)k^2} \right) = \\ &= I_2(p_1, p_2) - \frac{1}{2} I_2(p_1) - \frac{1}{2} I_2(-p_2). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Die einzelnen Bestandteile sind zu bestimmen. So liefert

$$\begin{aligned} I_2(p_1) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + 2p_1 k)k^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(-k^2 + m^2 x^2)^2} = \\ &= \frac{i\mu^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(2 - n/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{n/2-2} \int_0^1 x^{-2\varepsilon} dx = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon)}{1 - 2\varepsilon} = \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon(1 - 2\varepsilon)} = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(1 + \varepsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) (1 + 2\varepsilon) = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 2 + O(\varepsilon) \right) = I_2(-p_2) \end{aligned} \quad (3.81)$$

und

$$\begin{aligned} I_2(p_1, p_2) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)} = \int_0^1 dx \int \frac{1}{(-k^2 + (qx - p_2)^2)^2} = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \left(\frac{(qx - p_2)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\varepsilon} dx = \\ &= \frac{i\mu^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \int_0^1 \left(\frac{(qx - p_2)^2}{m^2} \right)^{-\varepsilon} dx. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Nun ist $m^2 = \frac{1}{4}q^2(1 - v^2)$ und

$$\begin{aligned} (qx - p_2)^2 &= q^2 x^2 - 2p_2 q x + p_2^2 = q^2 x^2 - 2(p_1 p_2 + p_2^2)x + p_2^2 = \\ &= q^2 x^2 - 2 \left(\frac{1}{4}q^2(1 + v^2) + \frac{1}{4}q^2(1 - v^2) \right) x + \frac{1}{4}q^2(1 - v^2) = \\ &= \frac{1}{4}q^2(4x^2 - 4x + 1 - v^2) = \frac{1}{4}q^2((2x - 1)^2 - v^2). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Es bietet sich hier also die Substitution $y = 2x - 1$ an, und mit dieser ist

$$\begin{aligned} I_2(p_1, p_2) &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon \int_{-1}^{+1} \ln \left(\frac{y^2 - v^2}{1 - v^2} \right) dy \right) = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left(1 - \varepsilon \int_0^1 \ln \left(\frac{y^2 - v^2}{1 - v^2} \right) dy \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Die Berechnung des Integrals wird erneut für $v > 1$ vorgenommen, und es ergibt sich mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \left(\frac{y^2 - v^2}{1 - v^2} \right) dy &= y \ln \left(\frac{y^2 - v^2}{1 - v^2} \right) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{y^2 - v^2} = \\ &= -2 \int_0^1 dy - 2v^2 \int_0^1 \frac{dy}{y^2 - v^2} = -2 - v \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Insgesamt erhält man also

$$\begin{aligned} I_2(p_1, p_2) &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(1 + \varepsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \left(1 + 2\varepsilon + \varepsilon v \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 2 + v \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + O(\varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

und damit für das Integral $I_3^\alpha(p_1, p_2)$

$$\begin{aligned} I_3^\alpha(p_1, p_2) &= \frac{1}{q^2 v^2} (I_2(p_1) - I_2(p_1, p_2)) (p_2 - p_1)^\alpha = \\ &= -\frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2 q^2 v} \left(\ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + O(\varepsilon) \right) (p_2 - p_1)^\alpha. \end{aligned} \quad (3.87)$$

3.3.3 Berechnung von $I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2)$

Das Tensorintegral

$$I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)k^2} \quad (3.88)$$

läßt sich durch $p_2 - p_1$ und q und den metrischen Tensor ausdrücken,

$$I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) = g^{\alpha\beta} I_3^{20}(p_1, p_2) + (p_2 - p_1)^\alpha (p_2 - p_1)^\beta I_3^{21}(p_1, p_2) + q^\alpha q^\beta I_3^{22}(p_1, p_2). \quad (3.89)$$

Die Koeffizienten ergeben sich auch hier durch Projektion, allerdings in Form eines linearen Gleichungssystems,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) &= n I_3^{20}(p_1, p_2) - q^2 v^2 I_3^{21}(p_1, p_2) + q^2 I_3^{22}(p_1, p_2), \\ (p_2 - p_1)_\alpha I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) &= (p_2 - p_1)^\beta (I_3^{20}(p_1, p_2) - q^2 v^2 I_3^{21}(p_1, p_2)), \\ q_\alpha I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) &= q^\beta (I_3^{20}(p_1, p_2) + q^2 I_3^{22}(p_1, p_2)). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Es ist

$$g_{\alpha\beta} I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) = I_2(p_1, p_2), \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} (p_2 - p_1)_\alpha I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(p_2 k - p_1 k) k^\beta}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)k^2} = \\ &= I_2^\beta(p_1, p_2) - \frac{1}{2} I_2^\beta(p_1) - \frac{1}{2} I_2^\beta(-p_2), \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} q_\alpha I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(p_1 k + p_2 k) k^\beta}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)k^2} = \\ &= \frac{1}{2} I_2^\beta(-p_2) - \frac{1}{2} I_2^\beta(p_1). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Wieder sind die Bestandteile zu bestimmen. So ergibt sich

$$\begin{aligned} I_2^\beta(p_1) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\beta}{(k^2 + 2p_1 k)k^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\beta}{((k + p_1 x)^2 - p_1^2 x^2)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\beta - p_1^\beta x}{(-k^2 + m^2 x^2)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\beta}{(-k^2 + m^2 x^2)^2} - p_1^\beta \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{x}{(-k^2 + m^2 x^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Der erste Term verschwindet aus Symmetriegründen, man erhält

$$\begin{aligned} I_2^\beta(p_1) &= -p_1^\beta \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \left(\frac{m^2 x^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\varepsilon} x dx = \\ &= -p_1^\beta \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \int_0^1 x^{1-2\varepsilon} dx = \\ &= -p_1^\beta \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \left(1 + \varepsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \frac{1}{2-2\varepsilon} = \\ &= -p_1^\beta \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 1 + O(\varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$I_2^\beta(-p_2) = p_2^\beta \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 1 + O(\varepsilon) \right). \quad (3.96)$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned} I_2^\beta(p_1, p_2) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\beta}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)} = \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\beta - p_1^\beta x + p_2^\beta(1-x)}{(-k^2 + (p_1 x + p_2(1-x))^2)^2} = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left(\int_0^1 (p_2^\beta(1-x) - p_1^\beta x) dx + \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \int_0^1 \ln \left(\frac{4x^2 - 4x + 1 - v^2}{1-v^2} \right) ((1-x)p_2^\beta - xp_1^\beta) dx \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \left(\frac{1}{2}(p_2 - p_1)^\beta + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon}{4} \int_{-1}^{+1} \ln \left(\frac{y^2 - v^2}{1 - v^2} \right) ((p_2 - p_1)^\beta - y(p_1 + p_2)^\beta) dy \right) = \\
&= (p_2 - p_1)^\beta \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{2(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \left(1 - \varepsilon \int_0^1 \ln \left(\frac{y^2 - v^2}{1 - v^2} \right) dy \right) = \quad (3.97) \\
&= (p_2 - p_1)^\beta \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 2 + v \ln \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) + O(\varepsilon) \right).
\end{aligned}$$

Dabei wurde erneut die Substitution $y = 2x - 1$ sowie Symmetrieüberlegungen zu k und zu y verwendet. Zusammengefasst ist

$$\begin{aligned}
nI_3^{20} - q^2 v^2 I_3^{21} + q^2 I_3^{22} &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 2 + v \ln \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) \right), \\
I_3^{20} - q^2 v^2 I_3^{21} &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{4(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 3 + 2v \ln \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) \right), \\
I_3^{20} + q^2 I_3^{22} &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{4(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 1 \right) \quad (3.98)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
(2 - 2\varepsilon)I_3^{20} &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{4(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - 2\gamma_E + 2 \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 4 + 2v \ln \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) + O(\varepsilon) \right), \\
-q^2 v^2 I_3^{21} &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{4(4\pi)^2} \left(v \ln \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) + O(\varepsilon) \right), \\
q^2 I_3^{22} &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{4(4\pi)^2} \left(-2 - v \ln \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) + O(\varepsilon) \right) \quad (3.99)
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{4(4\pi)^2} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 3 + v \ln \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) \right) g^{\alpha\beta} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{q^2 v} \ln \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) (p_2 - p_1)^\alpha (p_2 - p_1)^\beta + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{q^2} \left(2 + v \ln \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) \right) q^\alpha q^\beta + O(\varepsilon) \right]. \quad (3.100)
\end{aligned}$$

3.3.4 Zusammenfassung zur Vertexkorrektur

Nachdem die Einzelteile berechnet sind, kann nun der Zusammenbau beginnen. Die Vertexkorrektur bildet sich gemäß Gleichung (3.59) mit $\not{p}_2 - \not{p}_1 \rightarrow -2m$, $q \rightarrow 0$ als

$$\begin{aligned}
(-ig_s^2 C_F)^{-1} \Gamma_\mu^V(p_1, p_2) &= \\
&= -4(p_1 p_2) \gamma_\mu I_3(p_1, p_2) + 4((p_2 - p_1)_\mu \gamma_\alpha - (p_2 - p_1)_\alpha \gamma_\mu + m g_{\alpha\mu}) I_3^\alpha(p_1, p_2) + \\
&\quad + (2 - 2\varepsilon)(g_{\alpha\beta} \gamma_\mu - 2g_{\alpha\mu} \gamma_\beta) I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow -4(p_1 p_2) \gamma_\mu I_3(p_1, p_2) - 4((p_2 - p_1)^2 \gamma_\mu + m(p_2 - p_1)_\mu) I_3^{11}(p_1, p_2) + \\
&\quad + (2 - 2\varepsilon)((2 - 2\varepsilon) \gamma_\mu I_3^{20}(p_1, p_2) + (p_2 - p_1)^2 \gamma_\mu I_3^{21}(p_1, p_2) + \\
&\quad + q^2 \gamma_\mu I_3^{22}(p_1, p_2) + 4m(p_2 - p_1)_\mu I_3^{21}(p_1, p_2)) = \\
&=: (-ig_s^2 C_F)^{-1} \left(A_0 \gamma_\mu + B \frac{(p_2 - p_1)_\mu}{2m} \right) \quad \text{mit} \tag{3.101}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 = & \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[-\frac{1+v^2}{v} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) - 2\frac{1+v^2}{v} L(v) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) - 3v \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) \right] \quad \text{und} \tag{3.102}
\end{aligned}$$

$$B = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1-v^2}{v} \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right). \tag{3.103}$$

3.3.5 Renormierung der Vertexkorrektur

Die bisher betrachtete Vertexkorrektur ist noch nicht renormiert, eigentlich hätte für sie also Γ_μ^{V0} geschrieben werden müssen. Diese Renormierung soll jetzt durchgeführt werden. Es gilt

$$\Lambda_\mu(p_1, p_2) = Z_1 \Lambda_\mu^0(p_1, p_2) \quad \text{und damit} \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu^V(p_1, p_2) &= (Z_1 - 1) \gamma_\mu + \Gamma_\mu^{V0}(p_1, p_2) = \\
&= (A_0 + Z_1 - 1) \gamma_\mu + B \frac{(p_2 - p_1)_\mu}{2m} =: A \gamma_\mu + B \frac{(p_1 - p_2)_\mu}{2m}. \tag{3.105}
\end{aligned}$$

Sämtliche Singularitäten sind im Term A_0 enthalten, wobei zwischen den IR- und den UV-Divergenzen zu unterscheiden ist. Es stellt sich heraus, daß die IR-Divergenzen mit den *kollinearen Divergenzen*, also den zusätzlichen Singularitäten für verschwindende Quarkmassen und damit $v \rightarrow 1$, gekoppelt sind. Dies ist in A_0 in dem Anteil gegeben, der mit $\ln((v-1)/(v+1))$ multipliziert ist. Denn identifiziert man den entsprechenden Entwicklungsparameter ε mit ε_{IR} , den anderen aber mit ε_{UV} , so wird nur die UV-Divergenz subtrahiert, wie es auch sein muß. Dies soll hier wiederum mit dem Massenschalen-Subtraktionsschema durchgeführt werden. Da es sich um einen Graphen erster Ordnung handelt, gilt die *Ward-Identität* $Z_1 = Z_2$, und Z_2 kann aus der Renormierung des Propagators übernommen werden,

$$Z_1^{\text{OS}} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + 4 \right). \tag{3.106}$$

Die Ersetzung (3.74) trennt im physikalischen Sektor auf in Real- und Imaginärteil. Während die explizite Gestalt des Imaginärteils von A , wie später gezeigt, keine Rolle spielen wird, findet der Imaginärteil von B sehr wohl seine Anwendung. Es ergibt sich

$$\Lambda_\mu^V(p_1, p_2) = -ieQ_f \left((1 - A) \gamma_\mu + B \frac{(p_2 - p_1)_\mu}{2m} \right) \quad \text{mit} \tag{3.107}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \left(\frac{1+v^2}{v} \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) + 2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{1+v^2}{v} L(v) + 3v \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) + 4 \right] \quad \text{und} \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\operatorname{Re} B = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1-v^2}{v} \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right), \quad \operatorname{Im} B = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1-v^2}{v} \pi. \quad (3.109)$$

3.3.6 Korrektur des Axialvertex

Bisher ist nur der Vektorvertex korrigiert worden. Für den Axialvertex ergeben sich genau analoge Rechnungen. Es ist hier

$$\Gamma_\mu^A(p_1, p_2) = -ig_s^2 C_F \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\alpha (\not{p}_1 + \not{k} + m) \gamma_\mu \gamma_5 (-\not{p}_2 + \not{k} + m) \gamma^\alpha}{((p_1 + k)^2 - m^2)((p_2 - k)^2 - m^2)k^2}. \quad (3.110)$$

Nach Durchtauschen erhält man für den Zähler

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha (\not{p}_1 + \not{k} + m) \gamma_\mu \gamma_5 (-\not{p}_2 + \not{k} + m) \gamma^\alpha &= \\ \rightarrow ((n-2)k^2 - 4(p_2 - p_1)k - 4p_1 p_2) \gamma_\mu \gamma_5 + 4(p_2 - p_1)_\mu \not{k} \gamma_5 + \\ &\quad - 4m \not{k} \gamma_\mu \gamma_5 + 4m k_\mu \gamma_5 + 2(2-n)k_\mu \not{k} \gamma_5, \end{aligned} \quad (3.111)$$

folglich

$$\begin{aligned} (-ig_s^2 C_F)^{-1} \Gamma_\mu^A(p_1, p_2) &= -4(p_1 p_2) \gamma_\mu I_3(p_1, p_2) \gamma_5 + \\ &\quad + 4((p_2 - p_1)_\mu \gamma_\alpha - (p_2 - p_1)_\alpha \gamma_\mu - m \gamma_\alpha \gamma_\mu + m g_{\alpha\mu}) I_3^\alpha(p_1, p_2) \gamma_5 + \\ &\quad + (2 - 2\varepsilon)(g_{\alpha\beta} \gamma_\mu - 2g_{\alpha\mu} \gamma_\beta) I_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) \gamma_5 = \\ \rightarrow -4(p_1 p_2) \gamma_\mu I_3 \gamma_5 + 4(-(p_2 - p_1)^2 \gamma_\mu + 2m^2 \gamma_\mu - m q_\mu) I_3^{11}(p_1, p_2) \gamma_5 + \\ &\quad + (2 - 2\varepsilon)((2 - 2\varepsilon) \gamma_\mu I_3^{20}(p_1, p_2) + (p_2 - p_1)^2 \gamma_\mu I_3^{21}(p_1, p_2) + \\ &\quad + q^2 \gamma_\mu I_3^{22}(p_1, p_2) - 2q_\mu \not{q} I_3^{22}(p_1, p_2)) \gamma_5 = \\ =: (-ig_s^2 C_F)^{-1} \left(C_0 \gamma_\mu + D \frac{(p_1 + p_2)_\mu}{2m} \right) \gamma_5. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Dabei fanden die Beziehungen

$$\begin{aligned} (\not{p}_2 - \not{p}_1) \gamma_5 &= -\not{p}_1 \gamma_5 - \gamma_5 \not{p}_2 \rightarrow -m \gamma_5 + \gamma_5 m = 0, \\ (\not{p}_2 - \not{p}_1) \gamma_\mu \gamma_5 &= -\not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 + 2(p_2)_\mu \gamma_5 + \gamma_\mu \gamma_5 \not{p}_2 = \\ &\rightarrow -m \gamma_\mu \gamma_5 + 2(p_2)_\mu - \gamma_\mu \gamma_5 m = -2m \gamma_\mu \gamma_5 + 2(p_2)_\mu \gamma_5 \quad \text{und} \\ (\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma_5 &= \not{p}_1 \gamma_5 - \gamma_5 \not{p}_2 \rightarrow m \gamma_5 + \gamma_5 m = 2m \gamma_5 \end{aligned} \quad (3.113)$$

Verwendung, die als zwischen Spinoren stehend aufzufassen sind. Es ergibt sich damit

$$C_0 = A_0 - ig_s^2 C_F [8m^2 I_3^{11}(p_1, p_2)] =$$

$$= A_0 + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[-2 \frac{1-v^2}{v} \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) \right] \quad \text{und} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} D &= -ig_s^2 C_F [-8m^2 I_3^{11}(p_1, p_2) - 8(2-2\varepsilon)m^2 I_3^{22}(p_1, p_2)] = \\ &= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[2 \frac{1-v^2}{v} \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + (1-v^2) \left(2 + v \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) \right) \right] = \\ &= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1-v^2}{v} \left[2v + (2+v^2) \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Die Renormierungsprozedur ist dieselbe wie im Fall des Vektorvertex. Da der Zusatzterm, der in C_0 zu A_0 hinzutritt, keinerlei Singularitäten aufweist, kann dieselbe Renormierung verwendet werden, man erhält also

$$\Lambda_\mu^A(p_1, p_2) = -i\epsilon Q_f \left((1-C)\gamma_\mu + D \frac{(p_1 + p_2)_\mu}{2m} \right) \gamma_5 \quad \text{mit} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \text{Re } C &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \left(\frac{1+v^2}{v} \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) + 2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{1+v^2}{v} L(v) + \frac{2+v^2}{v} \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) + 4 \right], \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\text{Im } C = \text{Im } A - 2 \text{Im } B, \quad (3.118)$$

$$\text{Re } D = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1-v^2}{v} \left[2v + (2+v^2) \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \right], \quad (3.119)$$

$$\text{Im } D = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1-v^2}{v} (2+v^2)\pi. \quad (3.120)$$

Später wird sich zeigen, daß $\text{Im } A$ und $\text{Im } C$ immer nur in der Kombination $\text{Im } A - \text{Im } C$ auftreten, was nach dem oben berechneten gleich $2 \text{Im } B$ ist.

3.4 Vertexkorrektur für masselose Quarks

Die Vertexkorrektur für masselose Quarks soll berechnet werden, um später die Anomalien zwischen dem masselosen und massenlimitierten Fall aufzudecken. Dabei lassen sich die masselosen Rechnungen direkt aus den massiven übertragen. Auch hier ist eine Klasse von Integralen zu bestimmen, die diesmal mit Tilde geschrieben werden, \tilde{I}_3 . Benötigt wird für die Rechnungen die Eulersche Betafunktion (3.8).

3.4.1 Berechnung von $\tilde{I}_3(p_1, p_2)$

Auch hier ist

$$\tilde{I}_3(p_1, p_2) = -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(-k^2 + (p_1 x - p_2 y)^2)^3}. \quad (3.121)$$

Es gilt jedoch einfach $(p_1x - p_2y)^2 = -2(p_1p_2)xy = -q^2xy$, und die Trennung der anfangs geschachtelten Integrale geschieht durch die Substitution $\eta = y/(1-x)$. Mit $dy = (1-x)d\eta$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{I}_3(p_1, p_2) &= -\frac{i\mu^{-2-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\Gamma(1+\varepsilon)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(-\frac{q^2xy}{\mu^2}\right)^{-1-\varepsilon} = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2q^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^\varepsilon\Gamma(1+\varepsilon)\int_0^1 x^{-1-\varepsilon}(1-x)^{-\varepsilon}dx \int_0^1 \eta^{-1-\varepsilon}d\eta = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2q^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^\varepsilon\frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right).\end{aligned}\quad (3.122)$$

3.4.2 Berechnung von $\tilde{I}_3^\alpha(p_1, p_2)$

Das Integral spaltet genauso auf wie im massiven Fall. Zu bestimmen sind also $\tilde{I}_2(p_1)$ und $\tilde{I}_2(p_1, p_2)$. Dabei bereitet vor allem der Anteil $\tilde{I}_2(p_1)$ Probleme, weil er einen Integranden $(k^2)^{-2}$ besitzt. Erneut soll daher zunächst die dimensionale Regularisierung mit der Regularisierung durch eine Gluonmasse kombiniert werden, um IR- und UV-Divergenzen unterscheiden zu können. Mit Gluonmasse λ ist

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2(p_1) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2(k^2 - \lambda^2)} = \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(-k^2 + \lambda^2 x)^2} = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\lambda^2}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 x^{-\varepsilon} dx = \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\lambda^2}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \frac{1}{1-\varepsilon} = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) - \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + 1\right),\end{aligned}\quad (3.123)$$

Unterscheidet man nicht zwischen IR- und UV-Divergenzen, so liefert die Korrespondenz (3.55)

$$\tilde{I}_2(p_1) = 0. \quad (3.124)$$

Einfach zu berechnen ist $\tilde{I}_2(p_1, p_2)$,

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2(p_1, p_2) &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 \left(\frac{(qx - p_2)^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} dx = \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 \left(-\frac{q^2x(1-x)}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} dx = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 x^{-\varepsilon}(1-x)^{-\varepsilon} dx = \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon\Gamma(2-2\varepsilon)} = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-2\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon)} = \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right).\end{aligned}\quad (3.125)$$

Zusammengefaßt ergibt sich so

$$\begin{aligned}\tilde{I}_3^\alpha(p_1, p_2) &= -\frac{1}{q^2}\tilde{I}_2(p_1, p_2)(p_2 - p_1)^\alpha = \\ &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2q^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(-\frac{1}{\varepsilon} - 2\right).\end{aligned}\quad (3.126)$$

3.4.3 Berechnung von $\tilde{I}_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2)$

Auch hier kann in die bisherigen Bestandteile aufgespalten werden. Ebenso wie $\tilde{I}_2(p_1)$ verschwindet auch $\tilde{I}_2^\beta(p_1)$. Schließlich ist mit $(p_1x + p_2(1-x))^2 = -q^2x(1-x)$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2^\beta(p_1, p_2) &= \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{p_2^\beta(1-x) - p_1^\beta x}{(-k^2 - q^2x(1-x))^2} = \\
&= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 x^{-\varepsilon}(1-x)^{-\varepsilon} (p_2^\beta(1-x) - p_1^\beta x) dx = \\
&= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} p_2^\beta - \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} p_1^\beta \right) = \\
&= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(2-2\varepsilon)(1-2\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon)} (p_2 - p_1)^\beta = \\
&= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{1}{2\varepsilon} + 1 \right) (p_2 - p_1)^\beta \tag{3.127}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) &= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{4(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} + 3 \right) g^{\alpha\beta} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{q^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) (p_2 - p_1)^\alpha (p_2 - p_1)^\beta - \frac{1}{q^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 3 \right) q^\alpha q^\beta \right).
\end{aligned}$$

3.4.4 Zusammenfassung zur Vertexkorrektur

Bei der Zusammenfassung dieser Terme zur Vertexkorrektur für masselose Quarks ist $(p_2 - p_1)^2 = -2(p_1 p_2) = -q^2$ zu beachten und entsprechend $\not{p}_1, \not{p}_2 \rightarrow 0$ zu setzen. Dann ist

$$\begin{aligned}
(-ig_s^2 C_F)^{-1} \tilde{\Gamma}_\mu^V(p_1, p_2) &= \\
&= -4(p_1 p_2) \gamma_\mu \tilde{I}_3(p_1, p_2) + 4((p_2 - p_1)_\mu \gamma_\alpha - (p_2 - p_1)_\alpha \gamma_\mu) \tilde{I}_3^\alpha(p_1, p_2) + \\
&\quad + (2 - 2\varepsilon)(g_{\alpha\beta} \gamma_\mu - 2g_{\alpha\mu} \gamma_\beta) \tilde{I}_3^{\alpha\beta}(p_1, p_2) = \\
&= \frac{i\mu^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 \right] \gamma_\mu, \tag{3.128}
\end{aligned}$$

also

$$\tilde{\Gamma}_\mu^V(p_1, p_2) = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + 8 \right] \gamma_\mu \tag{3.129}$$

und ganz entsprechend

$$\tilde{\Gamma}_\mu^A(p_1, p_2) = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + 8 \right] \gamma_\mu \gamma_5. \tag{3.130}$$

Kapitel 4

Virtuelle und weiche Beiträge

Im vorausgegangenen Kapitel wurden die Korrekturen erster Ordnung zum Quarkpropagator wie zum Quark-Gluon-Vertex bestimmt. Die Summe beider Beiträge hob die auftretende ultraviolette Divergenz weg, die jeder Term für sich besaß. Übrig blieb die infrarote Divergenz. Beide Anteile, die noch einmal in Abbildung 4.1 dargestellt sein sollen, tragen zu den *Schleifengraphen* oder *virtuellen Graphen erster Ordnung* bei, und über diese hinaus sind keine weiteren Beiträge zu erwarten. Damit ist aber bereits die Haupt-

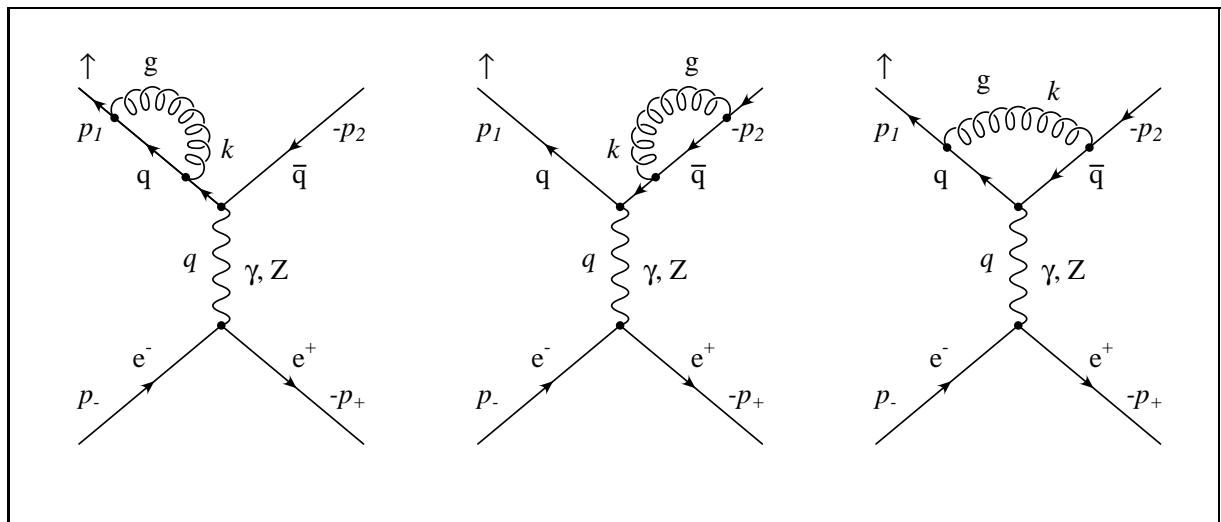


Abbildung 4.1: Virtuelle Beiträge erster Ordnung, die Vorzeichen der Impulse sind an die Pfeilrichtungen angepaßt.

arbeit zur Bestimmung der virtuellen Beiträge mit dem letzten Kapitel getan worden. Die Ergebnisse schlagen sich in den *Formfaktoren* A , B , C und D der *Vertexkorrektur* nieder, die den Vektor- bzw. den Axialvektorvertex gemäß der Vorschrift

$$-ieQ_f\gamma_\mu \rightarrow -ieQ_f \left((1 + A)\gamma_\mu + B\frac{(p_2 - p_1)_\mu}{2m} \right) \quad \text{bzw.} \quad (4.1)$$

$$-ieQ_f\gamma_\mu\gamma_5 \rightarrow -ieQ_f \left((1 + C)\gamma_\mu + D\frac{(p_1 + p_2)_\mu}{2m} \right) \gamma_5 \quad (4.2)$$

korrigieren. Der Formfaktor D spielt für die vorliegenden Rechnungen keine Rolle, da er proportional zu $q = p_1 + p_2$ ist. Der Beitrag von D verschwindet also nach Kontraktion mit

$L_{\mu\nu}$. Dennoch ist er in manchen Anwendungen interessant (siehe Anhang C). Im Folgenden soll zudem die Korrektur des Quarkpropagators nicht mehr explizit vorkommen. Gemeint ist dann bei der Vertexkorrektur immer auch eine Korrektur der äußeren Beine, die mittels der Ward-Identität die ultravioletten Divergenzen weghebt.

4.1 Berechnung der unprojizierten Beiträge

Ersetzt man also in den Bornschen Beiträgen zum Hadrontensor γ_μ bzw. $\gamma_\mu\gamma_5$ durch die oben genannten korrigierten Terme, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{VV} &= (1+A)(1+\bar{A})N_C \left[2p_{1\mu}p_{2\nu} + 2p_{2\mu}p_{1\nu} - 2(p_1p_2 + m^2)g_{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. + 2im\varepsilon(\mu\nu p_1 s) + 2im\varepsilon(\mu\nu p_2 s) \right] + B\bar{B}N_C \frac{p_1p_2 - m^2}{2m^2} (p_2 - p_1)_\mu (p_2 - p_1)_\nu + \\
&\quad + (1+A)\bar{B} \left[\frac{i}{m}\varepsilon(\mu p_1 p_2 s)(p_2 - p_1)_\nu + m(p_2 - p_1)_\mu (p_2 - p_1)_\nu \right] + \\
&\quad + B(1+\bar{A}) \left[-\frac{i}{m}(p_2 - p_1)_\mu \varepsilon(\nu p_1 p_2 s) + m(p_2 - p_1)_\mu (p_2 - p_1)_\nu \right], \tag{4.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{VA} &= (1+A)(1+\bar{C})N_C \left[-2i\varepsilon(\mu\nu p_1 p_2) + 2ms_\mu(p_1 + p_2)_\nu + \right. \\
&\quad \left. + 2m(p_2 - p_1)_\mu s_\nu - (sp_2)g_{\mu\nu} \right] - B\bar{D}N_C \frac{(sp_2)}{2m} (p_2 - p_1)_\mu (p_1 + p_2)_\nu + \\
&\quad - (1+A)\bar{D}N_C \left[\frac{(sp_2)}{m} p_{1\mu} (p_1 + p_2)_\nu - \frac{p_1p_2 + m^2}{m} s_\mu (p_1 + p_2)_\nu \right] + \\
&\quad + B(1+\bar{C})N_C \left[-\frac{(sp_2)}{m} (p_2 - p_1)_\mu p_{1\nu} + \frac{p_1p_2 - m^2}{m} (p_2 - p_1)_\mu s_\nu \right], \tag{4.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{AV} &= (1+C)(1+\bar{A})N_C \left[-2i\varepsilon(\mu\nu p_1 p_2) + 2ms_\mu(p_2 - p_1)_\nu + \right. \\
&\quad \left. + 2m(p_1 + p_2)_\mu s_\nu - (sp_2)g_{\mu\nu} \right] - D\bar{B}N_C \frac{(sp_2)}{2m} (p_1 + p_2)_\mu (p_2 - p_1)_\nu + \\
&\quad + (1+C)\bar{B}N_C \left[-\frac{(sp_2)}{m} p_{1\mu} (p_2 - p_1)_\nu + \frac{p_1p_2 - m^2}{m} s_\mu (p_2 - p_1)_\nu \right] + \\
&\quad + D(1+\bar{A})N_C \left[-\frac{(sp_2)}{m} (p_1 + p_2)_\mu p_{1\nu} + \frac{p_1p_2 + m^2}{m} (p_1 + p_2)_\mu s_\nu \right], \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{AA} &= (1+C)(1+\bar{C})N_C \left[2p_{1\mu}p_{2\nu} + 2p_{2\mu}p_{1\nu} - 2(p_1p_2 - m^2)g_{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. - 2im\varepsilon(\mu\nu p_1 s) + 2im\varepsilon(\mu\nu p_2 s) \right] + D\bar{D}N_C \frac{p_1p_2 + m^2}{2m^2} (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu + \\
&\quad + (1+C)\bar{D} \left[\frac{i}{m}\varepsilon(\mu p_1 p_2 s)(p_1 + p_2)_\nu + m(p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu \right] + \\
&\quad + D(1+\bar{C}) \left[-\frac{i}{m}(p_1 + p_2)_\mu \varepsilon(\nu p_1 p_2 s) + m(p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu \right]. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Wie im Bornschen Fall soll auch dies auf vierertransversale Größen umgeschrieben werden. Verwendung findet also erneut (2.53), ebenso aber auch $\varepsilon(\mu\nu p_1 p_2) = \varepsilon(\mu\nu \hat{p}_1 q)$,

$\varepsilon(\mu p_1 p_2 s) = -\varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)$ sowie $p_1 p_2 + m^2 = \frac{1}{2}q^2$, $p_1 p_2 - m^2 = \frac{1}{2}q^2 v^2$ und $(s p_2) = (s q)$. Allerdings sollen hier gleich die *temporalen Beiträge* proportional q fortgelassen werden. Damit verschwindet nach dem eben Gesagten der Beitrag des Formfaktors D völlig.

Endergebnis dieser Umformungen ist

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{VV} &= (1+A)(1+\bar{A})N_C \left[-4\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu} - q^2\hat{g}_{\mu\nu} + 2im\varepsilon(\mu\nu qs) \right] + B\bar{B}N_C \frac{4v^2}{\xi}\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu} + \\ &+ (1+A)\bar{B}N_C \left[\frac{2i}{m}\varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)\hat{p}_{1\nu} + 4\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu} \right] + \\ &+ B(1+\bar{A})N_C \left[-\frac{2i}{m}\hat{p}_{1\mu}\varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) + 4\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu} \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{VA} &= (1+A)(1+\bar{C})N_C \left[-2i\varepsilon(\mu\nu\hat{p}_1 q) - 4m\hat{p}_{1\mu}s_\nu - 2m(sq)\hat{g}_{\mu\nu} \right] + \\ &+ B(1+\bar{C})N_C \left[\frac{2(sq)}{m}\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu} - \frac{q^2v^2}{m}\hat{p}_{1\mu}s_\nu \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{AV} &= (1+C)(1+\bar{A})N_C \left[-2i\varepsilon(\mu\nu\hat{p}_1 q) - 4ms_\mu\hat{p}_{1\nu} - 2m(sq)\hat{g}_{\mu\nu} \right] + \\ &+ (1+C)\bar{B}N_C \left[\frac{2(sq)}{m}\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu} - \frac{q^2v^2}{m}s_\mu\hat{p}_{1\nu} \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$H_{\mu\nu}^{AA} = (1+C)(1+\bar{C})N_C \left[-4\hat{p}_{1\mu}\hat{p}_{1\nu} - q^2v^2\hat{g}_{\mu\nu} - 4im\varepsilon(\mu\nu\hat{p}_1 s) \right]. \quad (4.10)$$

Auch hier ist wie im Bornschen Fall eine Identifizierung mit den Strukturfunktionen der kovarianten Entwicklung möglich, wenn zusätzlich

$$\begin{aligned} \hat{p}_{1\mu}s_\nu &= \frac{1}{2}(s_\mu\hat{p}_{1\nu} + \hat{p}_{1\mu}s_\nu) + \frac{i}{2}i(s_\mu\hat{p}_{1\nu} - \hat{p}_{1\mu}s_\nu) \\ s_\mu\hat{p}_{1\nu} &= \frac{1}{2}(s_\mu\hat{p}_{1\nu} + \hat{p}_{1\mu}s_\nu) - \frac{i}{2}i(s_\mu\hat{p}_{1\nu} - \hat{p}_{1\mu}s_\nu) \end{aligned} \quad (4.11)$$

und die *Schouten-Identität*

$$\hat{p}_{1\mu}\varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) - \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)\hat{p}_{1\nu} = \hat{p}_1^2\varepsilon(\mu\nu qs) - (\hat{p}_1 s)\varepsilon(\mu\nu q \hat{p}_1) \quad (4.12)$$

verwendet wird, was

$$\begin{aligned} \hat{p}_{1\mu}\varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) &= \frac{1}{2}(\hat{p}_{1\mu}\varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) + \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)\hat{p}_{1\nu}) + \frac{1}{2}(\hat{p}_{1\mu}\varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) - \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)\hat{p}_{1\nu}) = \\ &= \frac{1}{2}(\hat{p}_{1\mu}\varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) + \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)\hat{p}_{1\nu}) - \frac{1}{8}q^2v^2\varepsilon(\mu\nu qs) + \frac{1}{4}(qs)\varepsilon(\mu\nu q \hat{p}_1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)\hat{p}_{1\nu} &= \frac{1}{2}(\hat{p}_{1\mu}\varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) + \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)\hat{p}_{1\nu}) - \frac{1}{2}(\hat{p}_{1\mu}\varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) - \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)\hat{p}_{1\nu}) = \\ &= \frac{1}{2}(\hat{p}_{1\mu}\varepsilon(\nu q \hat{p}_1 s) + \varepsilon(\mu q \hat{p}_1 s)\hat{p}_{1\nu}) + \frac{1}{8}q^2v^2\varepsilon(\mu\nu qs) - \frac{1}{4}(qs)\varepsilon(\mu\nu q \hat{p}_1) \end{aligned} \quad (4.14)$$

liefert. Jedoch soll dieses Ergebnis zunächst unverglichen stehengelassen und stattdessen der direkte Weg über die Projektionen beschritten werden.

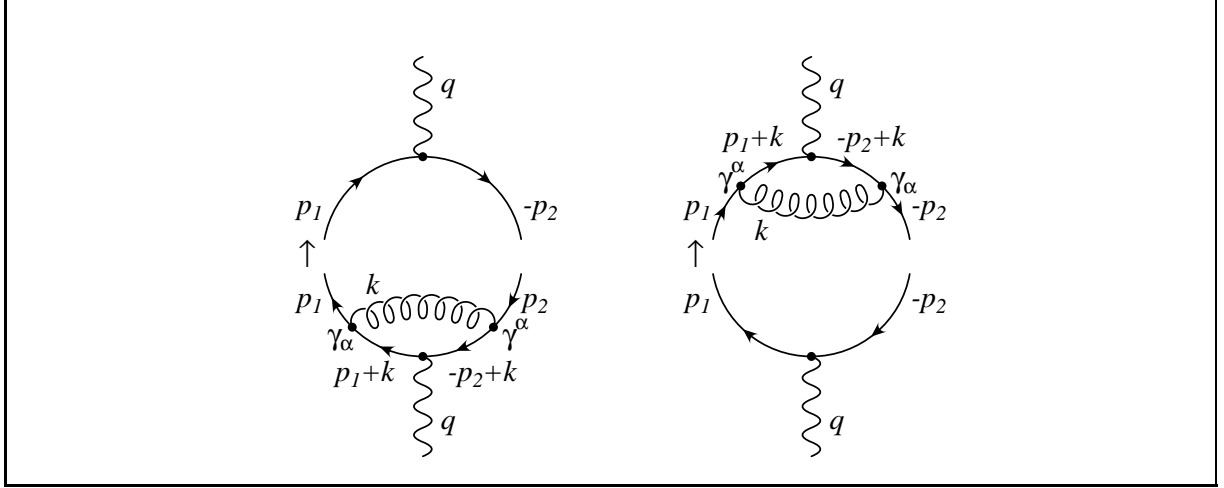


Abbildung 4.2: Virtuelle Beiträge erster Ordnung zum Hadrontensor, die Vorzeichen der Impulse sind an die Pfeilrichtungen angepaßt.

4.1.1 Isolierung der Terme erster Ordnung

An diesem Punkt ist eine neuerliche Gliederung vonnöten. Die eben berechneten Beiträge sind durch Quadrieren des hadronischen Anteils der korrigierten Graphen entstanden. Damit enthalten sie aber Beiträge sowohl nullter als auch erster und zweiter Ordnung. Diese lassen sich leicht voneinander trennen, denn die Formfaktoren A , B und C sind proportional zum Entwicklungsparameter α_s . Die nullte Ordnung liefert erneut das Ergebnis der Bornschen Näherung, die zweite Ordnung ist für diese Anwendung nicht relevant. Lediglich die Beiträge erster Ordnung zum Hadrontensor sind hier wichtig, und diese stellen die Kontraktion des Schleifengraphen erster Ordnung mit dem Bornschen Graphen dar, wie in Abbildung 4.2 gezeigt.

4.2 Ergebnisse der Projektionen

Die Projektionen in die Komponenten U , L , F , I und A liefern zunächst für die longitudinale Polarisation:

$$\begin{aligned}
 H_U^{VV} &= 2N_C(A + \bar{A})q^2, & H_U^{VA} &= \pm 2N_C(A + \bar{C})q^2v, \\
 H_U^{AV} &= \pm 2N_C(\bar{A} + C)q^2v, & H_U^{AA} &= 2N_C(C + \bar{C})q^2v^2, \\
 H_L^{VV} &= N_C(A + \bar{A})q^2(1 - v^2) + N_C(B + \bar{B})q^2v^2, \\
 H_L^{VA} &= H_L^{AV} = H_L^{AA} = 0 \\
 H_F^{VV} &= \pm 2N_C(A + \bar{A})q^2, & H_F^{VA} &= 2N_C(A + \bar{C})q^2v, \\
 H_F^{AV} &= 2N_C(\bar{A} + C)q^2v, & H_F^{AA} &= \pm 2N_C(C + \bar{C})q^2v^2.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die spinabhängigen Terme H_U^{VA} , H_U^{AV} , H_F^{VV} und H_F^{AA} sind aus dem Koeffizienten von (sq) entstanden und verschwinden daher für die transversale Polarisation. Zusätzlich ergibt sich

für die transversal ebene Polarisation:

$$\begin{aligned}
H_I^{VV} &= 0, & H_I^{VA} &= \mp N_C((A + \bar{C})(1 - v^2) + Bv^2) \frac{q^2 v}{\sqrt{\xi}}, \\
H_I^{AV} &= \mp N_C((\bar{A} + C)(1 - v^2) + \bar{B}v^2) \frac{q^2 v}{\sqrt{\xi}}, & H_I^{AA} &= 0, \\
H_A^{VV} &= \mp N_C(2(A + \bar{A})(1 - v^2) + (B + \bar{B})v^2) \frac{q^2}{\sqrt{\xi}}, \\
H_A^{VA} &= H_A^{AV} = H_A^{AA} = 0,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

für die transversal normale Polarisation:

$$\begin{aligned}
H_I^{VV} &= \mp i N_C(B - \bar{B}) \frac{q^2 v^2}{\sqrt{\xi}}, & H_I^{VA} &= H_I^{AV} = H_I^{AA} = 0, \\
H_A^{VV} &= 0, & H_A^{VA} &= \pm i N_C((A + \bar{C})(1 - v^2) + Bv^2) \frac{q^2 v}{\sqrt{\xi}}, \\
H_A^{AV} &= \mp i N_C((\bar{A} + C)(1 - v^2) + \bar{B}v^2) \frac{q^2 v}{\sqrt{\xi}}, & H_A^{AA} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Die Bestimmung der rekombinierten Hadrontensoren H^1 , H^2 , H^3 und H^4 soll hier wie für die Bornsche Näherung dem übernächsten Kapitel überlassen sein. Doch läßt sich an dieser Stelle bereits die Behauptung überprüfen, die über die Imaginärteile von A und C aufgestellt wurde. Sie besagte, daß lediglich die Differenz der Imaginärteile dieser Formfaktoren beiträgt. Um dies zu zeigen, ist zunächst wichtig, daß solche Imaginärteile höchstens in den Komponenten VA oder AV auftreten können. In den übrigen Fällen liefert die Entwicklung von $(1 + A)(1 + \bar{A})$ bzw. $(1 + C)(1 + \bar{C})$ den Realteil. In den bezeichneten Komponenten taucht jedoch nach Entwicklung stets nur die Kombination $(A + \bar{C})$ oder $(\bar{A} + C)$ auf, und die Summe bzw. Differenz dieser Größen, die zu den rekombinierten Hadrontensoren führen, liefern

$$(A + \bar{C}) + (\bar{A} + C) = 2(\operatorname{Re} A + \operatorname{Re} C), \quad (A + \bar{C}) - (\bar{A} + C) = 2i(\operatorname{Im} A - \operatorname{Im} C), \tag{4.18}$$

also allenfalls die Differenz der Imaginärteile, wie behauptet.

4.3 Der Phasenraum

An der Schwelle vom bis hierher betrachteten Ausgangskanal mit zwei Teilchen zu einem mit dreien sei nun der Phasenraum betrachtet. In Fermis Goldener Regel stand für ihn symbolisch das Differential dPS . Nun soll genauer erläutert werden, wie dieses Differential von den Impulsen und Energien der auslaufenden Teilchen abhängt. In allgemeinsten Form lautet dieses Differential für einen Ausgangskanal mit n Teilchen

$$dPS_n = (2\pi)^{4-3n} \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n p_i - q \right) \prod_{i=1}^n \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_i^0) d^4 p_i. \tag{4.19}$$

Die erste (vierdimensionale) Deltadistribution beschreibt die Impulsübernahme des Bosonimpulses q durch die auslaufenden Teilchen, die Deltadistributionen unter den Produktzeichen die Massenschalenbedingung der einzelnen äußeren Linien und die Thetadistribution die Positivität ihrer Energie. Im Einzelfall ist es jedoch einfacher, die Massenschalenbedingung gleich mit einfließen zu lassen und dafür auf die vierdimensionale Schreibweise teilweise zu verzichten.

4.3.1 Der Phasenraum für zwei Teilchen

Für $n = 2$ ist die Berechnung des Phasenfaktors noch relativ einfach. Zur Umwandlung der Deltadistributionen verwendet man die Regel

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x)|} \sum_{i=1}^p \delta(x - x_i) \quad \text{mit } f(x_i) = 0, f'(x_i) \neq 0. \quad (4.20)$$

Denn ist $U = \bigcup_{i=1}^p U(x_i)$ die Vereinigung der Umgebungen der Nullstellen x_i der Funktion f , so gilt für eine frei gewählte Testfunktion g

$$\begin{aligned} \int_U \delta(f(x)) f'(x) g(f(x)) dx &= p \int_{\dot{U}(0)} \delta(f) g(f) df = n g(0) = \\ &= \sum_{i=1}^p g(f(x_i)) = \sum_{i=1}^p \int_{U(x_i)} \delta(x - x_i) g(f(x)) dx. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Mit dieser Regel gilt

$$\begin{aligned} \delta(p^2 - m^2) &= \delta(E^2 - \vec{p}^2 - m^2) = \\ &= \frac{1}{2E} \left(\delta(E - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) + \delta(E + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

und die Thetadistribution sorgt schließlich dafür, daß nur der erste Anteil überlebt. Es ist daher

$$\int \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) d^4 p = \int \frac{d^3 p}{2E} \quad \text{mit } E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (4.23)$$

Diese Eigenschaft soll zunächst nur für den Phasenraum des ersten Teilchens verwendet werden. Für den Phasenraum der zwei auslaufenden Teilchen gleicher Masse gilt daher

$$dPS_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(p_1 + p_2 - q) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \delta(p_2^2 - m^2) \theta(p_2^0) d^4 p_2. \quad (4.24)$$

Nun wird die Impulserhaltung benutzt, also die erste Deltadistribution verwendet. Die Integration über den vierdimensionalen Phasenraum des zweiten Teilchens ergibt

$$dPS_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta((q - p_1)^2 - m^2) \theta(q^0 - E_1^0) \frac{d^3 p_1}{2E_1}. \quad (4.25)$$

Die weitere Rechnung soll im Schwerpunktsystem vollzogen werden. Wieder werden die Nullstellen des Argumentes der verbleibenden Deltadistribution, diesmal bezüglich der Energie E_1 , gesucht. Mit $q = \sqrt{q^2}(1; 0, 0, 0)$ gilt $q_0 = \sqrt{q^2}$ und $p_1 q = E_1 \sqrt{q^2}$, also

$$\begin{aligned} \delta((q - p_1)^2 - m^2) &= \delta(q^2 - 2p_1 q) = \delta(q^2 - 2E_1 \sqrt{q^2}) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{q^2}} \delta(E_1 - \frac{1}{2} \sqrt{q^2}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ferner soll die Integration über den dreidimensionalen Phasenraum des ersten Teilchens nun in Polarkoordinaten durchgeführt werden, es ergibt sich also für das Integrationsmaß unter Verwendung von $E_1^2 = \vec{p}_1^2 + m^2 \Rightarrow 2E_1 dE_1 = 2|\vec{p}_1| d|\vec{p}_1|$ die Form

$$d^3 p_1 = |\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1| d\chi d(\cos \theta) = E_1 \sqrt{E_1^2 - m^2} dE_1 d\chi d(\cos \theta). \quad (4.27)$$

Die Integration über die Energie E_1 ist mit der Deltadistribution erneut trivial ausführbar, ebenso spielt im Zerfall in zwei Teilchen der Azimutalwinkel keine Rolle. Daher ergibt sich nun letztendlich

$$\begin{aligned} dPS_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\sqrt{q^2}} \delta(E_1 - \frac{1}{2}\sqrt{q^2}) \theta(\sqrt{q^2} - E_1) \frac{1}{2} \sqrt{E_1^2 - m^2} dE_1 d\chi d(\cos \theta) = \\ &= \frac{2\pi}{4(2\pi)^2 \sqrt{q^2}} \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - m^2} d(\cos \theta) = \frac{v}{16\pi} d(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.28)$$

mit der Geschwindigkeit v der auslaufenden Teilchen.

4.3.2 Der Phasenraum für drei Teilchen

Für einen Endzustand aus drei Teilchen wird der Phasenraum etwas komplexer. Durch die Impulserhaltung läßt sich einer der Impulse eliminieren, und hier sei dies der zuletzt aufgeführte Impuls, also der Impuls p_3 des Gluons, welches die Masse $\sqrt{\Lambda q^2}$ besitze. Auf den physikalischen Hintergrund soll erst im nächsten Abschnitt eingegangen werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} dPS_3 &= \frac{1}{(2\pi)^5} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - q) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta(p_3^2 - \Lambda q^2) \theta(E_3) d^4 p_3 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \delta((q - p_1 - p_2)^2 - \Lambda q^2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \delta(q^2 - 2p_1 q - 2p_2 q + 2m^2 + 2p_1 p_2 - \Lambda q^2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Statt der Energien sollen zunächst die dimensionslosen Parameter x_1 und x_2 mit

$$2p_1 q = x_1 q^2, \quad 2p_2 q = x_2 q^2 \quad (4.30)$$

Verwendung finden, im Schwerpunktsystem ist dann $E_1 = \frac{1}{2}x_1\sqrt{q^2}$ und $E_2 = \frac{1}{2}x_2\sqrt{q^2}$. Mit diesen Parametern ergibt sich

$$\begin{aligned} dPS_3 &= \frac{1}{(2\pi)^5} \delta \left(2p_1 p_2 - (x_1 + x_2 - 1 - \frac{1}{2}\xi + \Lambda) q^2 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{8} q^2 \sqrt{x_1^2 - \xi} dx_1 d\chi_1 d(\cos \theta_1) \frac{1}{8} q^2 \sqrt{x_2^2 - \xi} dx_2 d\chi_2 d(\cos \theta_2). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Achsen der Koordinatensysteme sind beliebig gewählt. So läßt sich die z_2 -Achse des zweiten Systems auf die Richtung des Quarks legen, die durch $\chi := \chi_1$ und $\theta := \theta_1$ gegeben ist, über die erst später integriert werden soll. Dann bedeuten χ_2 und θ_2 relative Winkel, und die Integration über χ_2 liefert das triviale Ergebnis 2π . Die Integration über θ_2 ergibt

zusammen mit der Deltadistribution die Beschränkung des Integrationsbereiches für x_1 und x_2 , denn es ist

$$\begin{aligned} 2p_1p_2 &= 2E_1E_2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta_2 = \\ &= \frac{1}{2}q^2x_1x_2 - \frac{1}{2}q^2\sqrt{x_1^2 - \xi}\sqrt{x_2^2 - \xi}\cos\theta_2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

und daher mit der Regel $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x)$

$$dPS_3 = \frac{q^2}{32(2\pi)^4} \delta\left(\frac{x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 2 + \xi - 2\Lambda}{\sqrt{x_1^2 - \xi}\sqrt{x_2^2 - \xi}} - \cos\theta_2\right) dx_1dx_2d\chi d(\cos\theta). \quad (4.33)$$

Damit der Integrand nicht verschwindet, muß aber $|\cos\theta_2| \leq 1$ sein. Kinematisch entspricht dies der Forderung $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \leq |\vec{p}_1||\vec{p}_2|$. Unter dieser Bedingung ergibt sich dann schließlich

$$dPS_3 = \frac{q^2}{32(2\pi)^4} dx_1dx_2d\chi d(\cos\theta). \quad (4.34)$$

Bei Wahl von x_1 und x_2 als Phasenraumparameter ergeben sich jedoch relativ unübersichtliche Ausdrücke für die Integrationsgrenzen. Daher werden im Folgenden geeignetere Parametersätze zur Verfügung gestellt, die zudem an das jeweilige Problem angepaßt sind.

4.4 Der Sektor weicher Gluonen

Zweiteilchen- und Dreiteilchenzerfälle sind oberhalb einer genügend groß gewählten Energieschwelle gut zu unterscheiden, denn sie liefern eine unterschiedliche Anzahl von Jets, die in den Detektoren nachgewiesen werden können. Ist jedoch die Energie des Gluons sehr klein, so lassen sich Ereignisse mit zwei und drei Jets nicht mehr physikalisch trennen. Die nicht nachweisbaren Gluonen werden als „weiche Gluonen“ bezeichnet, ihre Maximalenergie $\lambda\sqrt{q^2}$ wird als Abschneideparameter verwendet, und die Größe von λ ist abhängig von der Empfindlichkeit der Detektoren. Während dieser Parameter also einen physikalischen Hintergrund besitzt, ist die Gluonmasse $\sqrt{\Lambda q^2}$ lediglich ein Regularisierungsparameter. Sie ist daher so zu wählen, daß sie jederzeit gegen die Gluonenergie vernachlässigt werden kann. Es gilt damit

$$\sqrt{\Lambda} \ll \lambda \ll 1. \quad (4.35)$$

Bereits mit der Beschränkung auf den Sektor weicher Gluonen im Phasenraum tritt eine Kürzung der Infrarotdivergenzen dieser Baumgraphen gegen diejenigen der Schleifengraphen erster Ordnung auf. Die allgemeine Gültigkeit dieses Prinzips haben Lee und Nauenberg [20, 21] gezeigt. Damit kann in der Summe von virtuellen Beiträgen und reellen Beiträgen weicher Gluonen der Grenzübergang $\Lambda \rightarrow 0$ vollzogen werden, die Beiträge harter Gluonen, also die Beiträge aus dem Rest des Phasenraums, sind (für massive Quarks) von jeglichen Infrarotdivergenzen frei.

4.4.1 Näherung weicher Gluonen

Die exakte Berechnung des hadronischen Anteils von Graphen wie derjenige der beiden in Abbildung 4.3 gezeigten unterscheidet sich von der Berechnung des Bornschen Graphen

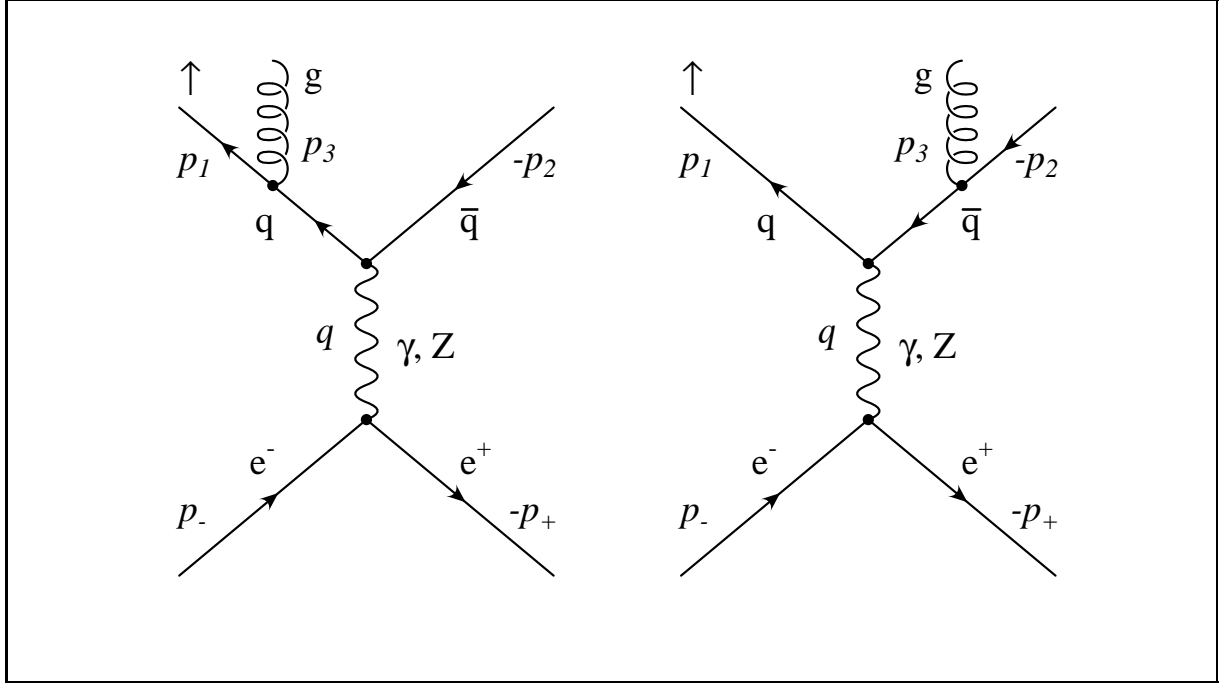


Abbildung 4.3: Baumgraphen als Graphen mit reellen Gluonen, die Vorzeichen der Impulse sind an die Pfeilrichtungen angepaßt.

dadurch, daß einer äußeren Linie ein Quark-Gluon-Vertex sowie der Propagator eines virtuellen Quarks beigelegt wird. Für den linken Graphen beispielsweise ergibt dies die Ersetzung

$$\bar{u}(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_1) (-ig_s \gamma_\alpha \frac{1}{2} \lambda^a) \frac{i}{\not{p}_1 - \not{p}_3 - m}. \quad (4.36)$$

Bei der Summation des Betragsquadrates des Matrixelementes über die Quark- und Gluonspins sowie -farben finden die Indizes α und a auf den Linien des entsprechenden komplex konjugierten Graphen ihr Gegenstück. So liefert die Summation über die Matrizen T^a

$$\sum_{a=1}^8 T^a T^a = C_F, \quad (4.37)$$

über den Index α , der kontra- wie kovariant auftaucht, ist zu summieren, und die „aneinandergeklebten“ äußeren Linien werden durch Ausdrücke wie $(\not{p}_1 + m)$ und $(\not{p}_2 - m)$ repräsentiert. Für die oben erwähnte Ersetzung gilt (mit $(p_1 - p_3)^2 - m^2 = -2(p_1 p_3)$ und $(p_2 - p_3)^2 - m^2 = -2(p_2 p_3)$ bei zu vernachlässigender Gluonmasse)

$$\begin{aligned} (\not{p}_1 + m) &\rightarrow \frac{-1}{2(p_1 p_3)} (\not{p}_1 + m) \gamma_\alpha (\not{p}_1 - \not{p}_3 + m), \\ (\not{p}_2 - m) &\rightarrow \frac{-1}{2(p_2 p_3)} (-\not{p}_2 - \not{p}_3 + m) \gamma_\alpha (\not{p}_2 - m). \end{aligned} \quad (4.38)$$

In der *Näherung weicher Gluonen* kann man den Viererimpuls des Gluons im Zähler vernachlässigen (*Eikonalnäherung*). Doch dann führt eine einfache Umformung direkt auf die Bornsche Form, der ein Faktor vorangestellt ist,

$$(\not{p}_1 + m) \gamma_\alpha (\not{p}_1 + m) = 2p_{1\alpha} (\not{p}_1 + m) - \gamma_\alpha (p_1^2 - m^2) = 2p_{1\alpha} (\not{p}_1 + m). \quad (4.39)$$

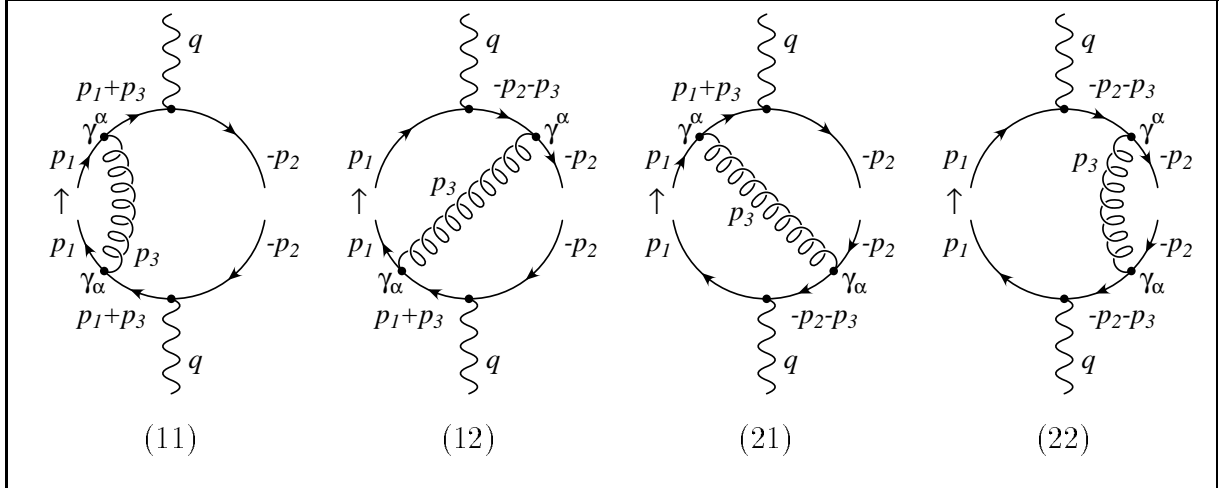


Abbildung 4.4: Die vier Beiträge zum Matrixquadrat der Baumgraphen, die Vorzeichen der Impulse sind an die Pfeilrichtungen angepaßt.

Das Betragsquadrat liefert nun insgesamt $2 \times 2 = 4$ verschiedene Beiträge, die in Abbildung 4.4 dargestellt sind. Ihre Summe ergibt also für jede Komponente $H_{\mu\nu}^i$ des Hadrontensors

$$\begin{aligned}
 H_{\mu\nu}^i(\text{soft}) &= g_s^2 C_F \left(\frac{p_{1\alpha}}{(p_1 p_3)} - \frac{p_{2\alpha}}{(p_2 p_3)} \right) \left(\frac{p_1^\alpha}{(p_1 p_3)} - \frac{p_2^\alpha}{(p_2 p_3)} \right) H_{\mu\nu}^i(\text{born}) = \\
 &= g_s^2 C_F \left(\frac{p_1^2}{(p_1 p_3)^2} - \frac{2(p_1 p_2)}{(p_1 p_3)(p_2 p_3)} + \frac{p_2^2}{(p_2 p_3)^2} \right) H_{\mu\nu}^i(\text{born}). \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Wird dieser Hadrontensor über den dreidimensionalen Phasenraum integriert, so beschränken sich die Integrationen über x_1 und x_2 auf den Vorfaktor. Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts mit weichen Gluonen muß also lediglich dieser Vorfaktor integriert und mit dem Wirkungsquerschnitt für den Bornschen Fall multipliziert werden. Jedoch ist als Phasenraumfaktor der *relative Drei/Zweiteilchen-Phasenraumfaktor* dPS_{32} zu verwenden, da der Wirkungsquerschnitt des Bornschen Falls ja den Zweiteilchenphasenraumfaktor beinhaltet. Die Aufspaltung liefert

$$dPS_3 = \frac{q^2}{4(2\pi)^3 v} dx_1 dx_2 d\chi \cdot \frac{v}{16\pi} d(\cos\theta) = dPS_{32} \cdot dPS_2, \quad (4.41)$$

und da die Integration über den Azimutalwinkel χ trivial wird, ist schließlich

$$h := \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2 v} \int h(x_1, x_2) dx_1 dx_2 := \frac{g_s^2 C_F q^2}{16\pi^2 v} \int \left(\frac{p_1^2}{(p_1 p_3)^2} - \frac{2(p_1 p_2)}{(p_1 p_3)(p_2 p_3)} + \frac{p_2^2}{(p_2 p_3)^2} \right) dx_1 dx_2 \quad (4.42)$$

mit $\sigma(\text{soft}) = h\sigma(\text{born})$ zu bestimmen. h meint der Einfachheit halber in jeder Parametrisierung sowohl den Integranden als auch das Integral, und es sei die Vereinbarung getroffen, daß nur die Anzahl der Argumente darauf schließen läßt, über welche Parameter bereits integriert wurde. Die Integration läuft dabei nur bis zur maximalen Gluonenergie $\lambda\sqrt{q^2}$. Da in den Phasenraumparametern x_1 und x_2 diese Grenze schlecht einzubauen ist, muß als nächster Schritt eine Parametertransformation erfolgen.

4.4.2 Wahl geeigneter Phasenraumparameter

Als Phasenraumparameter sollen

$$x := \frac{1}{q^2}(p_3q) = \frac{E_3}{\sqrt{q^2}} \quad \text{und} \quad w := \frac{1}{q^2}(p_1 - p_2)q \quad (4.43)$$

Verwendung finden. Sie stehen über $2x = 2 - x_1 - x_2$ und $2w = x_1 - x_2$ mit den anfangs gewählten Parametern in Beziehung. Für das Integrationsmaß ergibt sich aus dieser Relation $dx_1 dx_2 = 2dx dw$, für die einzelnen Skalarprodukte die Beziehungen

$$p_1q = \frac{1}{2}(1 - x + w)q^2, \quad p_2q = \frac{1}{2}(1 - x - w)q^2 \quad \text{und} \quad p_3q = xq^2, \quad (4.44)$$

die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} p_1q &= p_1^2 + p_1p_2 + p_1p_3 = \frac{1}{2}(1 - x + w)q^2 \\ p_2q &= p_1p_2 + p_2^2 + p_2p_3 = \frac{1}{2}(1 - x - w)q^2 \\ p_3q &= p_1p_3 + p_2p_3 + p_3^2 = xq^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

liefert mit $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ und $p_3^2 = \Lambda q^2$ die Ergebnisse

$$2p_1p_2 = (1 - 2x + \Lambda)q^2 - 2m^2, \quad 2p_1p_3 = (x - \Lambda + w)q^2, \quad 2p_2p_3 = (x - \Lambda - w)q^2. \quad (4.46)$$

Dies kann nun in den Integranden $h(x, w)$ eingesetzt werden und ergibt

$$h(x, w) = 8 \frac{(1 - 2x + \lambda)(w^2 - (x - \Lambda)^2) + \xi(x - \Lambda)^2}{(w^2 - (x - \Lambda)^2)^2} \quad (4.47)$$

(der zusätzliche Faktor 2 stammt vom Integrationsmaß). Dieser Integrand besitzt Nullstellen für die Werte $w = \pm w_0$ mit

$$w_0^2 = (x - \Lambda)^2 - \frac{\xi(x - \Lambda)^2}{1 - 2x + \Lambda} = (x - \Lambda)^2 \frac{1 - 2x + \Lambda - \xi}{1 - 2x + \Lambda} =: (x - \Lambda)^2 \eta(x)^2. \quad (4.48)$$

Mit Hilfe dieser Nullstellen, die Funktionen von x sind, schreibt sich der Integrand in eine faktorisierte Form um, die dann später einfach in Partialbrüche zerlegt und über w integriert werden kann. Sie lautet

$$h(x, w) = 8(1 - 2x + \Lambda) \frac{(w - w_0)(w + w_0)}{((x - \Lambda)^2 - w^2)^2}. \quad (4.49)$$

Bevor die Integration durchgeführt werden kann, muß als letztes Element noch die Grenze des Phasenraums bestimmt werden. Sie ergibt sich, wie bereits bemerkt, aus der Bedingung $\vec{p}_1 \vec{p}_2 \leq |\vec{p}_1| |\vec{p}_2|$. Es berechnet sich nun

$$\begin{aligned} p_1^0 &= \frac{1}{\sqrt{q^2}} p_1q = \frac{1}{2} \sqrt{q^2} (1 - x + w) & |\vec{p}_1| &= \frac{1}{2} \sqrt{q^2} \sqrt{(1 - x + w)^2 - \xi} \\ p_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{q^2}} p_2q = \frac{1}{2} \sqrt{q^2} (1 - x - w) & |\vec{p}_2| &= \frac{1}{2} \sqrt{q^2} \sqrt{(1 - x - w)^2 - \xi} \end{aligned} \quad (4.50)$$

und damit

$$(x^2 + 2x - 1 - w_+^2 - 2\Lambda + \xi)^2 = ((1 - x + w_+)^2 - \xi)((1 - x - w_+)^2 - \xi) \quad (4.51)$$

als Bestimmungsgleichungen für die Begrenzungskurven $w = \pm w_+(x)$ mit

$$w_+^2 = (x^2 - \Lambda) \frac{1 - 2x - \xi + \Lambda}{1 - 2x + \Lambda} = (x^2 - \Lambda)\eta(x)^2. \quad (4.52)$$

Der volle Integrationsbereich wird also beschrieben durch

$$\sqrt{\Lambda} \leq x \leq \frac{1}{2}(1 - \xi + \Lambda), \quad -w_+(x) \leq w \leq w_+(x), \quad (4.53)$$

wobei angemerkt sei, daß im allgemeinen $w_+ \neq w_0$ ist. Nun kann die Integration über w durchgeführt werden. Auch diesmal werden die Rechnungen hier ausführlich dargestellt, um sie später auf ähnliche Fälle anwenden zu können. Die Partialbruchzerlegung ist in allen in dieser Arbeit auftretenden Integrationen ein nützliches, ja unverzichtbares Hilfsmittel, ebenso wie eine geeignete Substitution. So gilt zunächst für den w -abhängigen Anteil des Integranden

$$4 \frac{(w - w_0)(w + w_0)}{((x - \Lambda)^2 - w^2)^2} = (1 - \eta^2) \left(\frac{1}{(x - \Lambda + w)^2} + \frac{1}{(x - \Lambda - w)^2} \right) + \quad (4.54)$$

$$- \frac{1 + \eta^2}{x - \Lambda} \left(\frac{1}{x - \Lambda + w} + \frac{1}{x - \Lambda - w} \right),$$

somit

$$h(x) := \int_{-w_+}^{w_+} h(x, w) dw = 2(1 - 2x + \Lambda) \int_{-w_+}^{w_+} \frac{(w - w_0)(w + w_0)}{((x - \Lambda)^2 - w^2)^2} dw =$$

$$= 2(1 - 2x + \Lambda) \int_{-w_+}^{w_+} \left[(1 - \eta^2) \left(\frac{1}{(x - \Lambda + w)^2} + \frac{1}{(x - \Lambda - w)^2} \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{1 + \eta^2}{x - \Lambda} \left(\frac{1}{x - \Lambda + w} + \frac{1}{x - \Lambda - w} \right) \right] dw. \quad (4.55)$$

Nun wird die Integrationsvariable w transformiert, und zwar jeweils für den ersten Summanden in den runden Klammern zu $w' = x - \Lambda + w$, für den zweiten Summanden zu $w' = x - \Lambda - w$. Dies liefert beidesmal den Integrationsbereich $x - \Lambda - w_+ < w' < x - \Lambda + w_+$. So ergibt sich

$$h(x) = 2(1 - 2x + \Lambda) \left[(1 - \eta^2) \int_{x - \Lambda - w_+}^{x - \Lambda + w_+} \frac{2dw'}{w'^2} - \frac{1 + \eta^2}{x - \Lambda} \int_{x - \Lambda - w_+}^{x - \Lambda + w_+} \frac{2dw'}{w'} \right] =$$

$$= 4(1 - 2x + \Lambda) \left[(1 - \eta^2) \left(\frac{1}{x - \Lambda - w_+} - \frac{1}{x - \Lambda + w_+} \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{1 + \eta^2}{x - \Lambda} (\ln(x - \Lambda + w_+) - \ln(x - \Lambda - w_+)) \right] =$$

$$= 4(1 - 2x + \Lambda) \left[(1 - \eta^2) \frac{2w_+}{(x - \Lambda)^2 - w_+^2} - \frac{1 + \eta^2}{x - \Lambda} \ln \left(\frac{x - \Lambda + w_+}{x - \Lambda - w_+} \right) \right] \quad (4.56)$$

und mit

$$1 - \eta^2(x) = \frac{\xi}{1 - 2x + \Lambda}, \quad 1 + \eta^2(x) = \frac{2 - 4x - 2\Lambda - \xi}{1 - 2x - \Lambda} \quad (4.57)$$

schließlich

$$h(x) = 4 \left(\frac{2w_+\xi}{(x-\Lambda)^2 - w_+^2} - \frac{2 - 4x - 2\Lambda - \xi}{x - \Lambda} \ln \left(\frac{x - \Lambda + w_+}{x - \Lambda - w_+} \right) \right). \quad (4.58)$$

Nun soll auch für den Phasenraum zur Geltung kommen, daß lediglich mit weichen Gluonen gearbeitet wird. War w bisher noch keinen Einschränkungen unterworfen, so wird x nun nicht über den gesamten Phasenraumbereich integriert, sondern nur bis $x = \lambda$, was der Maximalenergie des Gluons entspricht. Diese neue obere Grenze ist so niedrig gewählt, daß x in Summen gegen 1 vernachlässigt werden kann. Ferner kann Λ sowohl gegen x (nicht jedoch x^2 wegen der unteren Grenze) als auch gegen 1 fortgelassen werden. Damit ergibt sich

$$w_+(x) \approx \sqrt{(x^2 - \Lambda)(1 - \xi)} = v\sqrt{x^2 - \Lambda} \quad (4.59)$$

und

$$h(x) = 4 \left(\frac{2v\xi\sqrt{x^2 - \Lambda}}{x^2 - v^2(x^2 - \Lambda)} - \frac{2 - \xi}{x} \ln \left(\frac{x + v\sqrt{x^2 - \Lambda}}{x - v\sqrt{x^2 - \Lambda}} \right) \right). \quad (4.60)$$

Das Gesamtintegral H teilt sich auf in zwei Anteile, deren Nomenklatur die Polstruktur angibt,

$$h = \frac{\alpha_s C_F}{\pi v} (2v\mathcal{H}(0, -1) - (2 - \xi)\mathcal{H}_l(-1)). \quad (4.61)$$

Der Index l weist auf den Logarithmus im Integranden hin, das andere Integral enthält nur rationale Funktionen. Letzteres soll nun ausgerechnet werden. Dazu werden nacheinander die Substitutionen

$$x(\zeta) = \sqrt{\Lambda} \cosh \zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta(x) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - \Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \right), \quad (4.62)$$

$$dx = \sqrt{\Lambda} \sinh \zeta d\zeta, \quad \zeta(\sqrt{\Lambda}) = 0, \quad \zeta(\lambda) \approx \ln \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\Lambda}} \right) \quad \text{sowie}$$

$$\tau(\zeta) = e^{2\zeta} \quad \Rightarrow \quad d\zeta = \frac{d\tau}{2\tau}, \quad \tau(0) = 1, \quad \tau \left(\ln \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\Lambda}} \right) \right) = \frac{4\lambda^2}{\Lambda} \quad (4.63)$$

vorgenommen. Es ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(0, -1) &= \int_{\sqrt{\Lambda}}^{\lambda} \frac{\xi \sqrt{x^2 - \Lambda} dx}{x^2 - v^2(x^2 - \Lambda)} = \int_0^{\ln(2\lambda/\sqrt{\Lambda})} \frac{\xi \Lambda \sinh^2 \zeta d\zeta}{\Lambda(v^2 + \xi \cosh^2 \zeta)} = \\ &= \int_0^{\ln(2\lambda/\sqrt{\Lambda})} \frac{\xi \sinh^2 \zeta d\zeta}{1 + \xi \sinh^2 \zeta} = \int_1^{4\lambda^2/\Lambda} \frac{\xi(\tau - 1)^2 d\tau}{2\tau(4\tau + \xi(\tau - 1)^2)}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Der Nenner des Integranden kann faktorisiert werden. Damit liegt wieder eine Partialbruchzerlegung nahe, sie hat die Form

$$\frac{\xi(\tau - 1)^2}{\tau(4\tau + \xi(\tau - 1)^2)} = \frac{1}{\tau} + \frac{\xi}{v} \left(\frac{1}{\xi\tau + (1+v)^2} + \frac{1}{\xi\tau + (1-v)^2} \right). \quad (4.65)$$

Damit ergibt sich in der Näherung $\Lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{H}(0, -1) &= \int_1^{4\lambda^2/\Lambda} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{\xi}{v} \int_1^{4\lambda^2/\Lambda} \left(\frac{d\tau}{\xi\tau + (1+v)^2} - \frac{d\tau}{\xi\tau + (1-v)^2} \right) = \\
&= \ln \left(\frac{4\lambda^2}{\Lambda} \right) + \frac{1}{v} \ln \left(\frac{\xi\tau + (1+v)^2}{\xi\tau + (1-v)^2} \right) \Big|_1^{4\lambda^2/\Lambda} = \\
&= \ln \left(\frac{4\lambda^2}{\Lambda} \right) + \frac{1}{v} \ln \left(\frac{\xi + (1-v)^2}{\xi + (1+v)^2} \right) = \ln \left(\frac{4\lambda^2}{\Lambda} \right) + \frac{1}{v} \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Die Berechnung des zweiten Integralanteils geschieht mit Hilfe derselben Substitutionen. Allerdings wird dies jetzt in einem Schritt vollzogen,

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - \Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \right)^2 \Rightarrow x(\tau) = \frac{\Lambda(\tau + 1)}{2\sqrt{\Lambda\tau}}, \\
\sqrt{x^2 - \Lambda} &= \frac{\Lambda(\tau - 1)}{2\sqrt{\Lambda\tau}}, \quad dx = \frac{\Lambda(\tau - 1)}{4\tau\sqrt{\Lambda\tau}} d\tau.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

4.4.3 Einige hilfreiche Integralformeln

Bevor jedoch der zweite Integralanteil in Angriff genommen wird, sollen zuvor einige hilfreiche Integralformeln für logarithmische Interanden aufgeführt sein. $\text{li}_2(z)$ ist dabei die *unbestimmte Dilogarithmusfunktion*, die mit $\text{Li}_2(z)$ durch $\text{Li}_2(z) = \text{li}_2(z) - \text{li}_2(0)$ in Verbindung steht. Für sie vereinfachen sich die Umformungen, da keine konstanten Summanden auftreten. Es gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned}
\int \tau \ln(\alpha\tau + \beta) d\tau &= \frac{1}{2} \left(\tau^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \ln(\alpha\tau + \beta) - \frac{1}{4}\tau^2 + \frac{\beta\tau}{2\alpha} \\
\int \ln(\alpha\tau + \beta) d\tau &= \left(\tau + \frac{\beta}{\alpha} \right) \ln(\alpha\tau + \beta) - \tau \\
\int \ln(\alpha\tau + \beta) \frac{d\tau}{\tau} &= \ln \beta \ln \tau - \text{li}_2 \left(-\frac{\alpha}{\beta} \tau \right) \\
\int \ln(\alpha\tau + \beta) \frac{d\tau}{\tau^2} &= \frac{\alpha}{\beta} \ln \tau - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \ln(\alpha\tau + \beta) \\
\int \ln(\alpha\tau + \beta) \frac{2 d\tau}{\tau^3} &= -\frac{\alpha}{\beta\tau} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \ln \tau - \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \ln(\alpha\tau + \beta)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
\int \ln \tau d\tau &= \tau \ln \tau - \tau \\
\int \ln \tau \frac{d\tau}{\tau} &= \frac{1}{2} \ln^2 \tau \\
\int \ln \tau \frac{d\tau}{\tau^2} &= -\frac{1}{\tau} \ln \tau - \frac{1}{\tau} \\
\int \ln \tau \frac{2 d\tau}{\tau^3} &= -\frac{1}{\tau^2} \ln \tau - \frac{1}{2\tau^2}
\end{aligned}$$

4.4.4 Berechnung von $\mathcal{H}_l(-1)$

Mit Hilfe der bereits erwähnten Substitution ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_l(-1) &= \int_{\sqrt{\Lambda}}^{\lambda} \ln \left(\frac{x + v\sqrt{x^2 - \Lambda}}{x - v\sqrt{x^2 - \Lambda}} \right) \frac{dx}{x} = \\
&= \int_1^{4\lambda^2/\Lambda} \ln \left(\frac{(\tau + 1) + v(\tau - 1)}{(\tau + 1) - v(\tau - 1)} \right) \frac{(\tau - 1)d\tau}{2\tau(\tau + 1)} = \\
&= \int_1^{4\lambda^2/\Lambda} \ln \left(\frac{(1 + v)\tau + (1 - v)}{(1 - v)\tau + (1 + v)} \right) \left(\frac{d\tau}{\tau + 1} - \frac{d\tau}{2\tau} \right) = \quad (4.69) \\
&= \int_2^{4\lambda^2/\Lambda} \ln \left(\frac{(1 + v)\tau' - 2v}{(1 - v)\tau' + 2v} \right) \frac{d\tau'}{\tau} - \frac{1}{2} \int_1^{4\lambda^2/\Lambda} \ln \left(\frac{(1 + v)\tau + (1 - v)}{(1 - v)\tau + (1 + v)} \right) \frac{d\tau}{\tau},
\end{aligned}$$

wobei im ersten Anteil $\tau' = \tau + 1$ substituiert wurde. Nun werden die eben vorgestellten Integrationsformeln (4.68) sowie die Regel (3.75) in ihrer unbestimmten Form verwendet. Letztere dient dazu, den Dilogarithmus an der Grenze $\tau \rightarrow \infty$ in einen Dilogarithmus bei 0 zu verwandeln. Die logarithmischen Ausdrücke können zu Logarithmen mit positivem Argument zusammengezogen werden. Es ist also weiter

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_l(-1) &= \left[\ln(-2v) \ln \tau - \text{li}_2 \left(\frac{(1 + v)\tau}{2v} \right) - \ln(2v) \ln \tau + \text{li}_2 \left(-\frac{(1 - v)\tau}{2v} \right) \right]_2^{4\lambda^2/\Lambda} + \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\ln(1 - v) \ln \tau - \text{li}_2 \left(-\frac{1 + v}{1 - v} \tau \right) - \ln(1 + v) \ln \tau + \text{li}_2 \left(-\frac{1 - v}{1 + v} \tau \right) \right]_1^{4\lambda^2/\Lambda} = \\
&= \left[\ln(-2v) \ln \tau + \text{li}_2 \left(\frac{2v}{(1 + v)\tau} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{1 + v}{2v} \tau \right) + \right. \\
&\quad \left. - \ln(2v) \ln \tau - \text{li}_2 \left(\frac{-2v}{(1 - v)\tau} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1 - v}{2v} \tau \right) \right]_2^{4\lambda^2/\Lambda} + \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\ln(1 - v) \ln \tau + \text{li}_2 \left(-\frac{1 - v}{(1 + v)\tau} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1 + v}{1 - v} \tau \right) + \right. \\
&\quad \left. - \ln(1 + v) \ln \tau - \text{li}_2 \left(-\frac{1 + v}{(1 - v)\tau} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1 - v}{1 + v} \tau \right) \right]_1^{4\lambda^2/\Lambda} = \\
&= \left[\ln \left(\frac{1 + v}{1 - v} \right) \ln \tau + \text{li}_2 \left(\frac{2v}{(1 + v)\tau} \right) - \text{li}_2 \left(\frac{-2v}{(1 - v)\tau} \right) \right]_2^{4\lambda^2/\Lambda} + \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1 + v}{1 - v} \right) \ln \tau + \text{li}_2 \left(-\frac{1 - v}{(1 + v)\tau} \right) - \text{li}_2 \left(-\frac{1 + v}{(1 - v)\tau} \right) \right]_1^{4\lambda^2/\Lambda} = \\
&= \ln \left(\frac{1 + v}{1 - v} \right) \ln \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\Lambda}} \right) + \\
&\quad - \text{Li}_2 \left(\frac{v}{1 + v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-v}{1 - v} \right) + \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\frac{1 - v}{1 + v} \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\frac{1 + v}{1 - v} \right). \quad (4.70)
\end{aligned}$$

4.4.5 Der Formfaktor für Streuungen mit weichen Gluonen

Zum Abschluß sollen beide Integrale zum Formfaktor h zusammengesetzt werden. $\mathcal{H}_l(-1)$ läßt sich auf eine noch etwas andere Weise schreiben. Es ist bekannt, daß es oft schwierig ist, die Gleichheit zweier Ausdrücke mit verschiedenen Dilogarithmen nachzuweisen. Die Gleichheit kann aber numerisch übergeprüft werden. Das Ergebnis

$$\mathcal{H}_l(-1) = -\ln\left(\frac{1-v}{1+v}\right) \ln\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\Lambda}}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) - \frac{1}{4} \ln^2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) \quad (4.71)$$

führt schließlich zusammen mit demjenigen von $\mathcal{H}(0, -1)$ zu einem Gesamtergebnat

$$\begin{aligned} h &= -\frac{\alpha_s C_F}{\pi} \left[2 \ln\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\Lambda}}\right) + \frac{1}{v} \ln\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+v^2}{v} \left(\ln\left(\frac{1-v}{1+v}\right) \ln\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\Lambda}}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) + \frac{1}{4} \ln^2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) \right) \right] = \\ &= -\frac{\alpha_s C_F}{\pi} \left[\left(2 + \frac{1+v^2}{v} \ln\left(\frac{1-v}{1+v}\right) \right) \ln\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\Lambda}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{v} \ln\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \frac{1+v^2}{v} \left(\text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) + \frac{1}{4} \ln^2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.72)$$

das auch von anderen Autoren bestätigt worden ist [11].

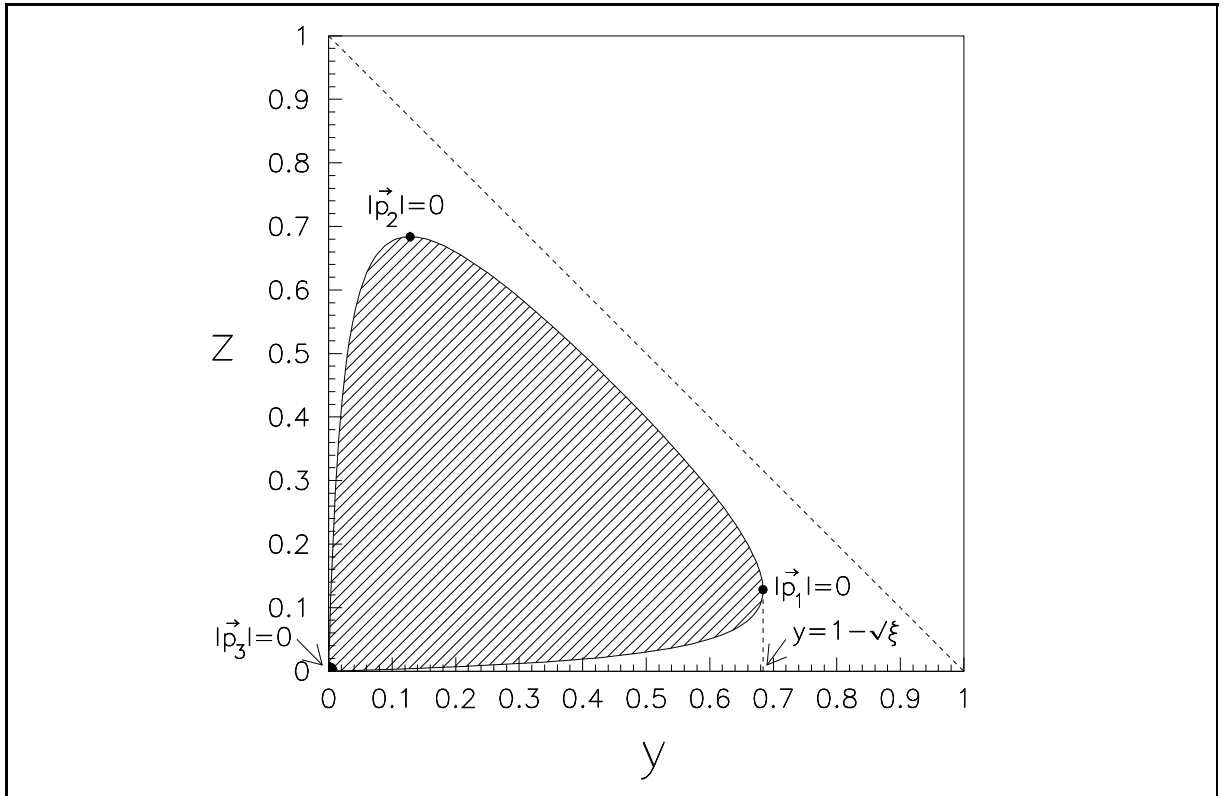


Abbildung 4.5: Der Dreiteilchen-Phasenraum für massive Quarks in den Variablen y und z . Die gepunktete Linie gibt zusammen mit den Koordinatenachsen die Phasenraumgrenze im masselosen Fall an.

Kapitel 5

Reelle Beiträge

Die Aufspaltung des Phasenraums in einen Sektor weicher und einen Sektor harter Gluonen erfolgt nach physikalischen Überlegungen bezüglich der experimentellen Auflösbarkeit von Ereignissen, die aus drei Jets bestehen. Damit wird der Wirkungsquerschnitt abhängig vom Abschneideparameter λ . Zur Berechnung der Baumbeiträge erster Ordnung ist diese Unterteilung nicht erforderlich, und es zeigt sich, daß die Integration in allen Fällen über den ganzen Phasenraum analytisch durchführbar ist. Der Berechnung dieser Beiträge soll dieses Kapitel gewidmet sein, und in ihm steckt verständlicherweise auch die Hauptarbeit, die zur Berechnung der Beiträge erster Ordnung geleistet wurde.

5.1 Neue Phasenraumvariablen

Als Phasenraumparameter werden solche gewählt, welche die Energie von Quark und Antiquark beinhalten,

$$y := 1 - 2\frac{p_1 q}{q^2} \quad \text{und} \quad z := 1 - 2\frac{p_2 q}{q^2}, \quad (5.1)$$

wobei nach wie vor p_1 und p_2 die Viererimpulse von Quark und Antiquark, q den Viererimpuls des intermediären Vektormesons bezeichnen. Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2(p_1 q) &= 2p_1^2 + 2p_1 p_2 + 2p_1 p_3 = (1 - y)q^2 \\ 2(p_2 q) &= 2p_1 p_2 + 2p_2^2 + 2p_2 p_3 = (1 - z)q^2 \\ p_1^2 + 2p_1 p_2 + 2p_1 p_3 + p_2^2 + 2p_2 p_3 + p_3^2 &= q^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

ergeben sich für $p_1^2 = p_2^2 = m^2 = \frac{1}{4}\xi q^2$ und $p_3^2 = \Lambda q^2$ die Produkte

$$p_2 p_3 = \frac{1}{2}(y - \Lambda)q^2, \quad p_1 p_3 = \frac{1}{2}(z - \Lambda)q^2, \quad p_1 p_2 = \frac{1}{2}(1 - y - z + \Lambda - \frac{1}{2}\xi)q^2. \quad (5.3)$$

Für die gewählten Parameter soll zunächst das Phasenraumelement dPS_3 bestimmt werden. Es ist $x_1 = 1 - y$ und $x_2 = 1 - z$, also $dx_1 dx_2 = dy dz$, also ergibt sich

$$dPS_3 = \frac{q^2}{32(2\pi)^4} dy dz d\chi d(\cos \theta). \quad (5.4)$$

Die Grenzen des Phasenraums ergeben sich wieder aus der Bedingung $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \leq |\vec{p}_1||\vec{p}_2|$. Wird erneut als Bezugssystem das Schwerpunktsystem mit $\vec{q} = 0$ verwendet, so ist

$$p_1^0 = \frac{1}{\sqrt{q^2}} p_1 q = \frac{1}{2}(1-y)\sqrt{q^2}, \quad p_2^0 = \frac{1}{\sqrt{q^2}} p_2 q = \frac{1}{2}(1-z)\sqrt{q^2} \quad (5.5)$$

und damit

$$\begin{aligned} |\vec{p}_1|^2 &= (p_1^0)^2 - p_1^2 = \frac{1}{4}(1-y)^2 q^2 - \frac{1}{4}\xi q^2 = \frac{1}{4}q^2((1-y)^2 - \xi), \\ |\vec{p}_2|^2 &= (p_2^0)^2 - p_2^2 = \frac{1}{4}(1-z)^2 q^2 - \frac{1}{4}\xi q^2 = \frac{1}{4}q^2((1-z)^2 - \xi), \\ \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 &= p_1^0 p_2^0 - p_1 p_2 = \frac{1}{4}(1-y)(1-z)q^2 - \frac{1}{2}(1-y-z+\Lambda - \frac{1}{2}\xi)q^2 = \\ &= \frac{1}{4}q^2(yz + y + z - 1 - 2\Lambda + \xi). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Der Phasenraum wird also durch die Ungleichung

$$(yz + y + z - 1 - 2\Lambda + \xi)^2 \leq ((1-y)^2 - \xi)((1-z)^2 - \xi) \quad (5.7)$$

beschrieben, die sich in die Form $C(y)z^2 - 2A(y)z + D(y) \leq 0$ mit

$$\begin{aligned} A(y) &= 2y - 2y^2 - \xi y + 2\Lambda y + 2\Lambda, \\ C(y) &= 4y + \xi \quad \text{und} \\ D(y) &= \xi y^2 - 4\Lambda y + 4\Lambda - 4\Lambda\xi + 4\Lambda^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

bringen läßt. Der Radikand der zugehörigen Gleichung ist $B(y)/C(y)$ mit

$$B(y)^2 = A(y)^2 - C(y)D(y) = 4((y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi)((1-y)^2 - \xi), \quad (5.9)$$

und damit ist schließlich die Einschränkung $y_- \leq y \leq y_+$ und $z_-(y) \leq z \leq z_+(y)$ des Integrationsbereiches mit

$$\begin{aligned} y_- &:= \Lambda + \sqrt{\Lambda\xi}, \quad y_+ := 1 - \sqrt{\xi}, \\ z_{\pm}(y) &:= \frac{A(y) \pm B(y)}{C(y)} = \\ &= \frac{1}{4y + \xi} \left(2y - 2y^2 - \xi y + 2\Lambda y + 2\Lambda \pm 2\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

berechnet. Der Phasenraum ist in Abbildung 4.5 für den Spezialfall $\Lambda = 0$ dargestellt. Für nichtverschwindende Gluonmasse erhält man insbesondere am Koordinatenursprung eine abgerundete Ecke, die den Ursprung nicht berührt.

5.2 Beiträge mit einem reellen Gluon

Zur Berechnung des Hadrontensors für Zerfälle in Quark, Antiquark und reelles Gluon sind zu jeder Kombination VV , VA , AV und AA der beiden gegeneinandergestellten Vertizes des hadronischen Anteils im Matrixquadrat alle vier Beiträge in Abb. 4.4 zu berechnen. Da man in dieser Anwendung nicht mehr in der Näherung weicher Gluonen rechnet, wächst der Rechenaufwand um ein Vielfaches, und es ist klar, daß damit in dieser Arbeit nicht mehr alle Zwischenschritte aufgezeigt werden können, lediglich der Weg ist hier zu skizzieren.

5.2.1 Unintegrierte Beiträge

Berechnet werden zunächst die Beiträge $(H_{\mu\nu}^i)^{11}$, $(H_{\mu\nu}^i)^{12}$, $(H_{\mu\nu}^i)^{21}$ und $(H_{\mu\nu}^i)^{22}$ der vier Diagramme in Abb. 4.4 für $i \in \{VV, VA, AV, AA\}$, die sodann addiert werden müssen.

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{VV} = & \frac{img_s^2 N_C C_F}{y^2 z^2 q^4} [2q^2(2y^2 - 2yz + \xi yz + \xi z^2 + 4yz^2)\varepsilon(\mu\nu p_1 s) + \\
& -2q^2(4yz - \xi yz + 2y^2 z - \xi z^2 - 2yz^2)\varepsilon(\mu\nu p_2 s) + \\
& +2q^2(2y^2 - 2yz + \xi yz + \xi z^2)\varepsilon(\mu\nu p_3 s) + \\
& -8y(y+z)(p_{1\mu} + p_{3\mu})\varepsilon(\nu p_1 p_2 s) + 8y(y+z)(p_{1\nu} + p_{3\nu})\varepsilon(\mu p_1 p_2 s) + \\
& -8yz(p_{1\mu} - p_{2\mu} + p_{3\mu})\varepsilon(\nu p_1 p_3 s) + 8yz(p_{1\nu} - p_{2\nu} + p_{3\nu})\varepsilon(\mu p_1 p_3 s) + \\
& +8y(y p_{1\mu} + z p_{2\mu} + y p_{3\mu})\varepsilon(\nu p_2 p_3 s) - 8y(y p_{1\nu} + z p_{2\nu} + y p_{3\nu})\varepsilon(\mu p_2 p_3 s)] + \\
& + \frac{g_s^2 N_C C_F}{y^2 z^2 q^4} [-q^4(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 4y^2 z - 2y^3 z + \xi z^2 + 4yz^2 - 2yz^3)g_{\mu\nu} + \\
& + 8q^2 y^2 z p_{1\mu} p_{1\nu} + 8q^2 y z^2 p_{2\mu} p_{2\nu} + 4q^2 \xi y z p_{3\mu} p_{3\nu} + \\
& + 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 2y^2 z + \xi z^2 + 2yz^2)(p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}) + \\
& - 2q^2 z(2y - \xi y - 2y^2 - \xi z)(p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{3\mu} p_{1\nu}) + \\
& + 2q^2 y(\xi y - 2z + \xi z + 2z^2)(p_{2\mu} p_{3\nu} + p_{3\mu} p_{2\nu})], \tag{5.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{AA} = & \frac{img_s^2 N_C C_F}{y^2 z^2 q^4} [2q^2(2y^2 - 2\xi y^2 + 2yz - \xi yz - \xi z^2 - 4yz^2)\varepsilon(\mu\nu p_1 s) + \\
& -2q^2(4yz - 3\xi yz + 2y^2 z - \xi z^2 - 2yz^2)\varepsilon(\mu\nu p_2 s) + \\
& +2q^2(2y^2 - 2\xi y^2 - 2yz + 3\xi yz + \xi z^2)\varepsilon(\mu\nu p_3 s) + \\
& -8y(y-z)(p_{1\mu} + p_{3\mu})\varepsilon(\nu p_1 p_2 s) + 8y(y-z)(p_{1\nu} + p_{3\nu})\varepsilon(\mu p_1 p_2 s) + \\
& +8yz(p_{1\mu} - p_{2\mu} + p_{3\mu})\varepsilon(\nu p_1 p_3 s) - 8yz(p_{1\nu} - p_{2\nu} + p_{3\nu})\varepsilon(\mu p_1 p_3 s) + \\
& +8y(y p_{1\mu} + z p_{2\mu} + y p_{3\mu})\varepsilon(\nu p_2 p_3 s) - 8y(y p_{1\nu} + z p_{2\nu} + y p_{3\nu})\varepsilon(\mu p_2 p_3 s)] + \\
& + \frac{g_s^2 N_C C_F}{y^2 z^2 q^4} [q^4(-\xi y^2 + \xi^2 y^2 + 4yz - 6\xi yz + 2\xi^2 yz - 4y^2 z + 4\xi y^2 z + 2y^3 z + \\
& -\xi z^2 + \xi^2 z^2 - 4yz^2 + 4\xi y z^2 + 2yz^3)g_{\mu\nu} + 8q^2 y^2 z p_{1\mu} p_{1\nu} + \\
& + 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 2y^2 z + \xi z^2 + 2yz^2)(p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}) + \\
& + 8q^2 y z^2 p_{2\mu} p_{2\nu} + 2q^2 z(-2y + \xi y + 2y^2 + \xi z)(p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{3\mu} p_{1\nu}) + \\
& + 2q^2 y(\xi y - 2z + \xi z + 2z^2)(p_{2\mu} p_{3\nu} + p_{3\mu} p_{2\nu}) - 4q^2 \xi y z p_{3\mu} p_{3\nu}], \tag{5.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{VA} = & \frac{2ig_s^2 N_C C_F}{y^2 z^2 q^4} [-q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz - 2y^2 z + \xi z^2 + 2yz^2)\varepsilon(\mu\nu p_1 p_2) + \\
& -q^2(2y^2 - \xi y^2 - 2yz + 2\xi yz + \xi z^2)\varepsilon(\mu\nu p_1 p_3) + 2\xi y^2 \varepsilon(\mu\nu p_2 p_3) + \\
& + 4y(y p_{1\mu} + z p_{2\mu} + y p_{3\mu})\varepsilon(\nu p_1 p_2 p_3) - 4y(y p_{1\nu} + z p_{2\nu} + y p_{3\nu})\varepsilon(\mu p_1 p_2 p_3)] + \\
& + \frac{mg_s^2 N_C C_F}{y^2 z^2 q^4} [-2q^2((\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 2y^2 z + \xi z^2 + 2yz^2)(p_2 s) + \\
& + (-2y^2 + \xi y^2 - 2yz + 2\xi yz + 4y^2 z + \xi z^2)(p_3 s))g_{\mu\nu} + \\
& - 8y(y + z)(p_3 s)p_{1\mu} p_{2\nu} - 8y(y - z)(p_3 s)p_{2\mu} p_{1\nu} + 16yz(p_3 s)p_{2\mu} p_{2\nu} + \\
& + 8yz((p_2 s) + (p_3 s))(p_{1\mu} p_{3\nu} - p_{3\mu} p_{1\nu}) - 8y(z(p_2 s) + y(p_3 s))(p_{2\mu} p_{3\nu} + p_{3\mu} p_{2\nu}) + \\
& - 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + \xi z^2 + 4yz^2)p_{1\mu} s_\nu + \\
& + 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 4y^2 z + \xi z^2)p_{2\mu} s_\nu - 2q^2\xi(y - z)(y + z)p_{3\mu} s_\nu + \\
& + 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 4y^2 z + \xi z^2 + 4yz^2)s_\mu(p_{1\nu} + p_{2\nu}) + \\
& + 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 4y^2 z + \xi z^2)s_\mu p_{3\nu}] \tag{5.13}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{AV} = & \frac{2ig_s^2 N_C C_F}{y^2 z^2 q^4} [-q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz - 2y^2 z + \xi z^2 + 2yz^2)\varepsilon(\mu\nu p_1 p_2) + \\
& -q^2(2y^2 - \xi y^2 - 2yz + 2\xi yz + \xi z^2)\varepsilon(\mu\nu p_1 p_3) + 2\xi y^2 \varepsilon(\mu\nu p_2 p_3) + \\
& + 4y(y p_{1\mu} + z p_{2\mu} + y p_{3\mu})\varepsilon(\nu p_1 p_2 p_3) - 4y(y p_{1\nu} + z p_{2\nu} + y p_{3\nu})\varepsilon(\mu p_1 p_2 p_3)] + \\
& + \frac{mg_s^2 N_C C_F}{y^2 z^2 q^4} [-2q^2((\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 2y^2 z + \xi z^2 + 2yz^2)(p_2 s) + \\
& + (-2y^2 + \xi y^2 - 2yz + 2\xi yz + 4y^2 z + \xi z^2)(p_3 s))g_{\mu\nu} + \\
& - 8y(y - z)(p_3 s)p_{1\mu} p_{2\nu} - 8y(y + z)(p_3 s)p_{2\mu} p_{1\nu} + 16yz(p_3 s)p_{2\mu} p_{2\nu} + \\
& - 8yz((p_2 s) + (p_3 s))(p_{1\mu} p_{3\nu} - p_{3\mu} p_{1\nu}) - 8y(z(p_2 s) + y(p_3 s))(p_{2\mu} p_{3\nu} + p_{3\mu} p_{2\nu}) + \\
& + 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 4y^2 z + \xi z^2 + 4yz^2)(p_{1\mu} + p_{2\mu})s_\nu + \\
& + 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 4y^2 z + \xi z^2)p_{3\mu} s_\nu + \\
& - 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + \xi z^2 + 4yz^2)s_\mu p_{1\nu} + \\
& + 2q^2(\xi y^2 - 4yz + 2\xi yz + 4y^2 z + \xi z^2)s_\mu p_{2\nu} - 2q^2\xi(y - z)(y + z)s_\mu p_{3\nu}]. \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Für die Rechnung wurden hier bereits die Eigenschaften $(p_1 s) = 0$ und $s^2 = -1$ ausgenutzt, die gemäß Kapitel 1 für den Spinvierervektor in jeder beliebigen Polarisationsrichtung gelten. Statt einer Entwicklung in Kovariante soll hier die Projektorenmethode verwendet werden. Dies sei zunächst im Fall longitudinal polarisierter Quarks durchgeführt.

5.3 Longitudinal polarisierte Quarks

Die longitudinale Polarisation des Quarks beschreibt Endzustände mit einem Quark, dessen Spin kollinear zu seinem Impuls ist. Dies wird erreicht durch den Ansatz $s^\mu = ap_1^\mu + bq^\mu$. Mit den beiden Skalarprodukten als Bedingungen ergibt sich

$$s^\mu = ap_1^\mu + bq^\mu \quad \text{mit} \quad b = -a \frac{p_1^2}{p_1 q} \quad \text{und} \quad a^{-2} = p_1^2 \left(1 - \frac{p_1^2 q^2}{(p_1 q)^2} \right). \quad (5.15)$$

Setzt man hier $p_1 q = \frac{1}{2} q^2 (1 - y)$ und $p_1^2 = \frac{1}{4} q^2 \xi$ ein, so erhält man

$$s^\mu = \frac{\pm 2}{\sqrt{q^2 \xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left((1-y)p_1^\mu - \frac{1}{2} \xi q^\mu \right). \quad (5.16)$$

Das Skalarprodukt mit p_2 und p_3 schließlich ergibt

$$\begin{aligned} p_2 s &= \frac{\pm \sqrt{q^2}}{\sqrt{\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left((1-y)(1-y-z) - \frac{1}{2} \xi (2-y-z) \right) \quad \text{und} \\ p_3 s &= \frac{\pm \sqrt{q^2}}{\sqrt{\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left((1-y)z - \frac{1}{2} \xi (y+z) \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Wie schon zuvor festgestellt wurde, ist hier die Masse des Gluons zunächst gleich Null gesetzt. Ihre einzige Bedeutung liegt darin, als Regulator den Phasenraum so zu deformieren, daß keine IR-Divergenzen auftreten. Sie muß also lediglich in den Integrationsgrenzen auftreten, und dies auch nur dann, wenn der Integrand kritisch ist, d.h. zu einer IR-Singularität führen würde. Mit dieser Vereinfachung können im Falle longitudinaler Polarisation die verschiedenen Projektionen bestimmt werden.

5.3.1 Die Projektion $U + L$

Die Wahl von U als Index für die erste Projektion deutet darauf hin, daß hier die unpolarisiert transversalen Beiträge berechnet werden. Diese Bezeichnung ist historisch bedingt. Sie stammt aus Experimenten mit hadronischer Photoproduktion. Im Helizitätsformalismus geschrieben [14], entspricht U dabei der Kombination $H_{++} + H_{--}$ zu unpolarisierten Photonen, T der Kombination $\frac{1}{2}(H_{+-} + H_{-+})$ zu transversal polarisierten Photonen. Einen paritätsverletzenden Beitrag $H_{++} - H_{--}$, wie er in F erscheint, tritt in der Photoproduktion nicht auf.

Nach Projektion ergeben sich zunächst die parameterabhängigen Tensorkomponenten

$$\begin{aligned} H_{U+L}^{VV}(y, z) &= 4\pi\alpha_s N_C C_F \left[-\frac{2\xi}{y^2} - \frac{\xi^2}{y^2} - \frac{8}{y} - \frac{4\xi}{y} - \frac{2\xi}{z^2} + \right. \\ &\quad \left. -\frac{\xi^2}{z^2} - \frac{8}{z} - \frac{4\xi}{z} + \frac{8}{yz} - \frac{2\xi^2}{yz} + \frac{4y}{z} + \frac{4z}{y} \right], \quad (5.18) \\ H_{U+L}^{VA}(y, z) &= H_{U+L}^{AV}(y, z) = \frac{\pm 4\pi\alpha_s N_C C_F}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left[8 - 2\xi - \frac{2\xi}{y^2} + \frac{2\xi^2}{y^2} + \right. \\ &\quad \left. -\frac{8}{y} + \frac{10\xi}{y} - \frac{2\xi}{z^2} + \frac{2\xi^2}{z^2} + \frac{2\xi y}{z^2} - \frac{2\xi y^2}{z^2} - \frac{16}{z} + \frac{12\xi}{z} + \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{8}{yz} - \frac{12\xi}{yz} + \frac{4\xi^2}{yz} + \frac{12y}{z} - \frac{2\xi y}{z} - \frac{4y^2}{z} - 4z + \frac{4z}{y} - \frac{2\xi z}{y}], \quad (5.19)$$

$$H_{U+L}^{AA}(y, z) = 4\pi\alpha_s N_C C_F \left[4\xi - \frac{2\xi}{y^2} + \frac{2\xi^2}{y^2} - \frac{8}{y} + \frac{8\xi}{y} - \frac{2\xi}{z^2} + \frac{2\xi^2}{z^2} + \right. \\ \left. - \frac{8}{z} + \frac{8\xi}{z} + \frac{8}{yz} - \frac{12\xi}{yz} + \frac{4\xi^2}{yz} + \frac{4y}{z} + \frac{2\xi y}{z} + \frac{4z}{y} + \frac{2\xi z}{y} \right]. \quad (5.20)$$

Diese Ausdrücke werden nun über den Phasenraumparameter z integriert. Integriert werden Potenzen von z , und es ergeben sich dabei Funktionen von y , die durch die Grenzen der z -Integration geliefert werden. Dies sei an dieser Stelle durchgeführt,

$$\int_{z_-(y)}^{z_+(y)} z dz = \frac{2A(y)B(y)}{C(y)^2} = \frac{(-4y^2 + 4y - 2\xi y)B(y)}{C(y)^2}, \quad (5.21)$$

$$\int_{z_-(y)}^{z_+(y)} dz = \frac{2B(y)}{C(y)}, \quad \int_{z_-(y)}^{z_+(y)} \frac{dz}{z} = \ln\left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)}\right), \quad (5.22)$$

$$\int_{z_-(y)}^{z_+(y)} \frac{dz}{z^2} = \frac{2B(y)C(y)}{A(y)^2 - B(y)^2} = \frac{2B(y)}{\xi y^2 + 4\Lambda(1 - y - \xi + \Lambda)}. \quad (5.23)$$

Lediglich für das letzte Integral bleibt die Gluonmasse in der z -Integration wichtig. Nach Durchführung dieser z -Integration ergeben sich die Komponenten

$$H_{U+L}^{VV}(y) = 4\pi\alpha_s N_C C_F \left[\left\{ 2\frac{(2+\xi)(2-\xi)}{y} - 4(2+\xi) + 4y \right\} \ln\left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ -\frac{4\xi(2+\xi)y}{\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)} + \right. \right. \\ \left. \left. - 4\frac{2+\xi}{y} - \frac{8y}{4y+\xi} + \frac{8(4-\xi)y}{(4y+\xi)^2} \right\} \right], \quad (5.24)$$

$$H_{U+L}^{VA}(y) = H_{U+L}^{AV}(y) = \frac{\pm 4\pi\alpha_s N_C C_F}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left[\left\{ 4\frac{(1-\xi)(2-\xi)}{y} + \right. \right. \\ \left. \left. - 4(4-3\xi) + 2(6-\xi)y - 4y^2 \right\} \ln\left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ -\frac{8\xi(1-\xi)y}{\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)} + \right. \right. \\ \left. \left. - 8\frac{1-\xi}{y} + 16 - 6y - \frac{4(4+\xi)y}{4y+\xi} + \frac{2(4-\xi)^2 y}{(4y+\xi)^2} \right\} \right], \quad (5.25)$$

$$H_{U+L}^{AA}(y) = 4\pi\alpha_s N_C C_F \left[\left\{ 4\frac{(1-\xi)(2-\xi)}{y} - 8(1-\xi) + 2(2+\xi)y \right\} \ln\left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ -\frac{8\xi(1-\xi)y}{\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)} + \right. \right. \\ \left. \left. - 8\frac{1-\xi}{y} - \frac{4(2-3\xi)y}{4y+\xi} + \frac{4(2+\xi)(4-\xi)y}{(4y+\xi)^2} \right\} \right]. \quad (5.26)$$

5.3.2 Die Projektion L

Zu unterscheiden ist deutlich zwischen der longitudinalen Polarisation, mit der sich dieser Abschnitt beschäftigt, und der „longitudinalen“ Projektion L in diesem Unterabschnitt. Letztere soll einfach als Projektion L bezeichnet werden. Auch hier seien zunächst die parameterabhängigen Komponenten des Hadrontensors niedergeschrieben,

$$H_L^{VV} = \frac{4\pi\alpha_s N_C C_F}{(1-y)^2 - \xi} \left[8 + 4\xi - \frac{\xi^2}{y^2} + \frac{\xi^3}{y^2} - \frac{4\xi}{y} + \frac{6\xi^2}{y} - 8y - \frac{\xi^2}{z^2} + \frac{\xi^3}{z^2} + \frac{2\xi^2 y}{z^2} - \frac{12\xi}{z} + \frac{8\xi^2}{z} + \frac{4\xi}{yz} - \frac{6\xi^2}{yz} + \frac{2\xi^3}{yz} + \frac{6\xi y}{z} - 8z - \frac{2\xi z}{y} \right], \quad (5.27)$$

$$H_L^{VA} = H_L^{AV} = \frac{\pm 4\pi\alpha_s N_C C_F}{((1-y)^2 - \xi)^{3/2}} \left[8 - 12\xi + 4\xi^2 - 16y + 8\xi y + 3\xi^2 y + 8y^2 + 8\xi y^2 + \frac{\xi^2 y^3}{z^2} - \frac{2\xi y}{z} + \frac{2\xi^2 y}{z} - \frac{2\xi y^2}{z} + \frac{3\xi^2 y^2}{z} + \frac{4\xi y^3}{z} - 8z + 10\xi z + \xi^2 z - \frac{2\xi z}{y} + \frac{2\xi^2 z}{y} + 8yz + 4\xi yz \right], \quad (5.28)$$

$$H_L^{AA} = \frac{4\pi\alpha_s N_C C_F}{(1-y)^2 - \xi} \left[8 - 8\xi + \xi^2 - 8y + 4\xi y + 4\xi y^2 + \frac{\xi^2 y^2}{z^2} - \frac{4\xi y}{z} + \frac{2\xi^2 y}{z} + \frac{2\xi y^3}{z} - 8z + 4\xi z + 2\xi yz \right]. \quad (5.29)$$

Zu erkennen ist jetzt schon, daß sowohl in den Projektionen H_L^{VA} und H_L^{AV} als auch in H_L^{AA} keine IR-Divergenzen für die Integration auftauchen werden. Auch hier wird zunächst wieder die Integration über z durchgeführt, es ergibt sich

$$H_L^{VV}(y) = \frac{4\pi\alpha_s N_C C_F}{(1-y)^2 - \xi} \left[2\xi \left\{ \frac{(1-\xi)(2-\xi)}{y} - 2(3-2\xi) + 3y \right\} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ -\frac{4\xi^2(1-\xi)y}{\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)} + \right. \right. \\ \left. \left. -4\xi \frac{1-\xi}{y} + 16\xi - 4y + \frac{4(4-\xi)y}{4y+\xi} \right\} \right], \quad (5.30)$$

$$H_L^{VA}(y) = H_L^{AV}(y) = \frac{\pm 4\pi\alpha_s N_C C_F y}{((1-y)^2 - \xi)^{3/2}} \left[-\xi \left\{ 2(1-\xi) + (2-3\xi)y - 4y^2 \right\} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ -8 + 3\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + 2(2+5\xi)y + \frac{(2-\xi)(4-\xi)^2}{2(4y+\xi)} \right\} \right], \quad (5.31)$$

$$H_L^{AA}(y) = \frac{4\pi\alpha_s N_C C_F y}{(1-y)^2 - \xi} \left[2\xi \left\{ -(2-\xi) + y^2 \right\} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ -4 + 7\xi - \xi^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3\xi y + (4-3\xi - \frac{5}{4}\xi^2) \frac{4-\xi}{4y+\xi} + \frac{\xi(4-\xi)^3}{4(4y+\xi)} \right\} \right]. \quad (5.32)$$

5.3.3 Die Projektion F

Der Buchstabe „ F “ steht hier für die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie (engl.: “forward-backward asymmetry”), geht diese Projektion doch mit einem Faktor $\cos \theta$ in den Wirkungsquerschnitt ein. Hier ist

$$H_F^{VV}(y, z) = \frac{\pm 4\pi\alpha_s N_C C_F}{(1-y)^2 - \xi} \left[8 - \frac{2\xi}{y^2} + \frac{2\xi^2}{y^2} - \frac{8}{y} + \frac{12\xi}{y} - 2\xi y - \frac{2\xi}{z^2} + \frac{2\xi^2}{z^2} + \frac{4\xi y}{z^2} - \frac{4\xi y^2}{z^2} + \frac{2\xi y^3}{z^2} - \frac{24}{z} + \frac{16\xi}{z} + \frac{8}{yz} - \frac{12\xi}{yz} + \frac{4\xi^2}{yz} + \frac{28y}{z} - \frac{2\xi y}{z} - \frac{16y^2}{z} + \frac{2\xi y^2}{z} + \frac{4y^3}{z} - 2\xi z + \frac{4z}{y} - \frac{2\xi z}{y} - 4yz \right], \quad (5.33)$$

$$H_F^{VA}(y, z) = H_F^{AV}(y, z) = \frac{4\pi\alpha_s N_C C_F}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left[-\frac{2\xi}{y^2} + \frac{2\xi^2}{y^2} - \frac{8}{y} + \frac{10\xi}{y} - \frac{2\xi}{z^2} + \frac{2\xi^2}{z^2} + \frac{2\xi y}{z^2} - \frac{16}{z} + \frac{12\xi}{z} + \frac{8}{yz} - \frac{12\xi}{yz} + \frac{4\xi^2}{yz} + \frac{12y}{z} - \frac{4y^2}{z} + 4z + \frac{4z}{y} \right], \quad (5.34)$$

$$H_F^{AA}(y, z) = \frac{\pm 4\pi\alpha_s N_C C_F}{(1-y)^2 - \xi} \left[8 - 8\xi - 2\xi^2 - \frac{2\xi}{y^2} + \frac{4\xi^2}{y^2} - \frac{2\xi^3}{y^2} - \frac{8}{y} + \frac{20\xi}{y} - \frac{12\xi^2}{y} + \frac{2\xi y}{z^2} - \frac{2\xi}{z^2} + \frac{4\xi^2}{z^2} - \frac{2\xi^3}{z^2} + \frac{4\xi y}{z^2} - \frac{4\xi^2 y}{z^2} - \frac{4\xi y^2}{z^2} + \frac{2\xi^2 y^2}{z^2} + \frac{2\xi y^3}{z^2} - \frac{24}{z} + \frac{40\xi}{z} - \frac{16\xi^2}{z} + \frac{8}{yz} - \frac{20\xi}{yz} + \frac{16\xi^2}{yz} - \frac{4\xi^3}{yz} + \frac{28y}{z} - \frac{26\xi y}{z} + \frac{2\xi^2 y}{z} + \frac{16y^2}{z} - \frac{10\xi y^2}{z} + \frac{4y^3}{z} - 10\xi z + \frac{4z}{y} - \frac{2\xi z}{y} - \frac{2\xi^2 z}{y} - 4yz \right]. \quad (5.35)$$

Die z -Integration liefert in diesem Fall

$$H_F^{VV}(y) = \frac{\pm 4\pi\alpha_s N_C C_F}{(1-y)^2 - \xi} \left[\left\{ 4 \frac{(1-\xi)(2-\xi)}{y} - 8(3-2\xi) + 2(14-\xi)y - 2(8-\xi)y^2 + 4y^3 \right\} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ -\frac{8\xi(1-\xi)y}{\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)} + \right. \right. \quad (5.36)$$

$$\left. \left. -8\frac{1-\xi}{y} + 32 - (18+\xi)y + 10y^2 - \frac{(20+3\xi)(4-\xi)y}{2(4y+\xi)} + \frac{(4-\xi)^3 y}{2(4y+\xi)^2} \right\} \right],$$

$$H_F^{VA}(y) = H_F^{AV}(y) = \frac{8\pi\alpha_s N_C C_F}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left[\left\{ 2 \frac{(1-\xi)(2-\xi)}{y} + \right. \right. \quad (5.37)$$

$$\left. \left. -2(4-3\xi) + 6y - 2y^2 \right\} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ -\frac{4\xi(1-\xi)y}{\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. -4\frac{1-\xi}{y} + 8 - y - \frac{16y}{4y+\xi} + \frac{(4-\xi)^2 y}{(4y+\xi)^2} \right\} \right],$$

$$\begin{aligned}
H_F^{AA}(y) = & \frac{\pm 4\pi\alpha_s N_C C_F}{(1-y)^2 - \xi} \left[\left\{ 4 \frac{(1-\xi)^2(2-\xi)}{y} - 8(3-2\xi)(1-\xi) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(14-13\xi+\xi^2)y - 2(8-5\xi)y^2 + 4y^3 \right\} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ - \frac{8\xi(1-\xi)^2 y}{\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)} + \right. \right. \\
& \left. \left. - 8 \frac{(1-\xi)^2}{y} + 32(1-\xi) - (18-11\xi)y + 10y^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{5(4-\xi)^2 y}{2(4y+\xi)} + \frac{(4-\xi)^3 y}{2(4y+\xi)^2} \right\} \right]. \tag{5.38}
\end{aligned}$$

5.4 Integrationstechniken

Ein Teil der Integrale ist bereits vorher berechnet worden, so beispielsweise in einer Arbeit von Jürgen G. Körner, Apostolos Pilaftsis und Michael M. Tung [22], wobei die Doktorarbeit des Letztgenannten, aus der heraus dieser Artikel entstand, dem Autor als wichtiges Hilfsmittel während seiner eigenen Arbeiten diente. So wurden hier erstmalig die spinabhängigen Projektionskomponenten H_{U+L}^{VA} und H_{U+L}^{AV} der Beiträge reeller Gluonen zur ersten Ordnung berechnet. Die Integrale wurden dort mit den Buchstaben I und S für spinunabhängige bzw. spinabhängige Beiträge klassifiziert. Als nächstes waren nun die Beiträge aus der Projektion L zu bestimmen. Hierfür boten sich die Buchstaben J (für spinunabhängig) und T (für spinabhängig) als Fortsetzung dieser Notation an.

Im Gegensatz zur relativ willkürlichen Numerierung der Integrale in [22] (die im übrigen die Integrale noch vor der z -Integration einordnet) soll hier jedoch eine Indizierung gewählt werden, welche die Polstruktur der Integranden wiedergibt. Es seien

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(n, m) & := \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}}{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}} \frac{y^{m-1} dy}{(4y+\xi)^n}, \\
\mathcal{S}(n, m) & := \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}}{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}} \frac{y^{m-1} dy}{(4y+\xi)^n}, \tag{5.39} \\
\mathcal{J}(n, m) & := \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \frac{y^{m-1} dy}{(4y+\xi)^n} \quad \text{und} \\
\mathcal{T}(n, m) & := \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}-\varepsilon} \frac{\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}}{(1-y)^2 - \xi} \frac{y^{m-1} dy}{(4y+\xi)^n}
\end{aligned}$$

zunächst die Integrale mit nichtlogarithmischem Integranden. Die Konvention für m ist gerade so gewählt, daß negative Werte einen Pol des Integranden bei $y = 0$ entsprechen, also eine IR-Singularität, die durch die Gluonmasse regularisiert wird. Für die Integraltypen gilt jeweils eine Rekursionsformel, die gleichlautend ist und beispielsweise im Fall der Integrale $\mathcal{I}(n, m)$ die Form

$$4\mathcal{I}(n, m) = \mathcal{I}(n-1, m-1) - \xi\mathcal{I}(n, m-1) \tag{5.40}$$

besitzt. Für die Integrale des Typs \mathcal{T} muß ein weiterer Parameter ε verwendet werden, der die obere Grenze, welche für alle übrigen Integraltypen unkritisch ist, regularisiert. Die so regularisierte Singularität hat keine physikalische Bedeutung, entsteht aber durch die Partialbruchzerlegung des Integranden im Verlauf der Rechnung. Daher wäre es ein Problem, feile die Regularisierung nachher nicht heraus. Es zeigt sich aber, daß genau dies der Fall ist, wenn sämtliche Baumbeiträge erster Ordnung zusammenfaßt werden. Neben diesen Integraltypen gibt es die logarithmischen Integraltypen

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_l(m) &:= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)}\right) y^m dy, \\
\mathcal{S}_l(m) &:= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)}\right) \frac{y^m dy}{\sqrt{(1-y)^2-\xi}}, \\
\mathcal{J}_l(m) &:= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)}\right) \frac{y^m dy}{(1-y)^2-\xi} \quad \text{und} \\
\mathcal{T}_l(m) &:= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}-\varepsilon} \ln\left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)}\right) \frac{y^m dy}{((1-y)^2-\xi)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Um einen Einblick in die Integrationstechniken zu bekommen, seien hier nur die Rechnungen zum Integraltyp \mathcal{J} in den wichtigsten Fällen explizit durchgeführt. Der Rest erschließt sich dann durch immer wieder gleiche Techniken, die Tabelle der berechneten Integrale in Anhang B vervollständigt diese Arbeiten. Es sei erwähnt, daß aufgrund der Rekursions-eigenschaft nur ein „Rand“ in der „ (n, m) -Ebene“ berechnet zu werden braucht.

5.4.1 Die global gültige Substitution

Für alle Integrationen läßt sich eine Substitution angeben, die in den allermeisten Fällen verwendet werden kann. Lediglich bei der Berechnung des divergenten Anteils der entsprechenden divergenten Integrale muß anders substituiert werden. Die Substitution hat die Form

$$\begin{aligned}
1-y &=: \sqrt{\xi} \frac{1+z^2}{1-z^2} \Rightarrow \\
\sqrt{(1-y)^2-\xi} &= \sqrt{\xi} \frac{2z}{1-z^2}, \quad dy = -\sqrt{\xi} \frac{4z dz}{(1-z^2)^2}, \\
z(y) &= \sqrt{\frac{1-y-\sqrt{\xi}}{1-y+\sqrt{\xi}}} \Rightarrow \\
z(0) &= \sqrt{\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}} =: w, \quad z(1-\sqrt{\xi}-\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\xi}}} =: \varepsilon'.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Die Integrale werden außer von ξ und $v = \sqrt{1-\xi}$ also weiterhin von den Hilfsgrößen

$$w = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}} \quad \text{sowie} \quad a := 2 + \sqrt{\xi} \quad \text{und} \quad b := 2 - \sqrt{\xi} \tag{5.43}$$

abhängig sein. An dieser Stelle seien daher noch ein paar Umrechnungen angegeben, welche auftretende Terme in diesen Größen vereinfachen. So ist

$$\begin{aligned}
a + b &= 4, & a - b &= 2\sqrt{\xi}, & ab &= 4 - \xi, \\
a^2 + b^2 &= 2(4 + \xi), & a^2 - b^2 &= 8\sqrt{\xi}, & b^2 - a^2w^2 &= \frac{2\xi\sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \\
1 + \frac{a}{b} &= \frac{4}{2 - \xi}, & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &= 2\frac{4 + \xi}{4 - \xi}, & \frac{1}{w} + w &= \frac{2}{v}, \\
\frac{a}{a - b} - \frac{a}{a + b} &= \frac{4 - \xi}{4\sqrt{\xi}}, & \frac{a}{a - b} + \frac{a}{a + b} &= \frac{(2 + \xi)^2}{4\sqrt{\xi}} \\
\ln\left(\frac{\varepsilon'}{w}\right) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\varepsilon(1 - \sqrt{\xi})}{2\sqrt{\xi}(1 + \sqrt{\xi})}\right) =: \frac{1}{2}t_0, \\
\ln\left(\frac{b^2 - a^2w^2}{b^2}\right) &= \ln\left(\frac{2\xi\sqrt{\xi}}{(2 - \sqrt{\xi})^2(1 + \sqrt{\xi})}\right) =: t_1, \\
\ln(1 - w^2) &= \ln\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}\right) =: t_2 \\
\ln\left(\frac{1 + w}{1 - w}\right) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + v}{1 - v}\right) =: \frac{1}{2}t_3, & \ln\left(\frac{b + aw}{b - aw}\right) &= \frac{3}{2}t_3.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Während t_0 nach aus oben angegebenen Gründen verschwindet, bilden t_1 , t_2 und t_3 die ersten drei sogenannten *Zerfallsratenterme*, die schließlich in den Endausdrücken die Integrale ersetzen werden.

5.4.2 Berechnung der Integrale $\mathcal{J}(n, m)$

Zu berechnen sind die Integrale $\mathcal{J}(0, -1)$, $\mathcal{J}(0, 0)$, $\mathcal{J}(0, 1)$, $\mathcal{J}(0, 2)$, $\mathcal{J}(1, 0)$ und $\mathcal{J}(2, 0)$. Zur Integration wird dabei stets die Standardsubstitution sowie meist eine geeignete Partialbruchzerlegung verwendet. Die Integrale lassen sich dann in einfachere Integrale zerlegen. Für später seien dabei die etwas schwierigen Integrale $\mathcal{J}(0, -1)$ und $\tilde{\mathcal{J}}(0, -1)$ aufgehoben. Der Pfeil drückt in den Formeln den Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$ aus.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(0, 0) &= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} dy}{y\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \rightarrow \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} = \\
&= \int_0^w \frac{4\sqrt{\xi}z(1-z^2)dz}{2\sqrt{\xi}z(1-z^2)^2} = \int_0^w \frac{2dz}{1-z^2} = \\
&= \int_0^w \frac{dz}{1+z} + \int_0^w \frac{dz}{1-z} = \int_1^{1+w} \frac{dz'}{z'} - \int_1^{1-w} \frac{dz''}{z''} = \\
&= \ln(1+w) - \ln(1-w) = \ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \frac{1}{2}t_3
\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(0,1) - \mathcal{J}(0,0) &= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{(y-1)^2 \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} dy}{y \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \rightarrow \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{(y-1)dy}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} = \\
&= \sqrt{\xi} \left(\frac{1}{1+w} - \frac{1}{1-w} \right) = -\frac{2w\sqrt{\xi}}{1-w^2} = -v \quad (5.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(0,2) - 2\mathcal{J}(0,1) + (1-\xi)\mathcal{J}(0,0) &= \\
&= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} dy}{y} \rightarrow \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} dy = \\
&= -\frac{\xi}{4} \left(\ln \left(\frac{1+w}{1-w} \right) - \frac{2w(1+w^2)}{(1-w^2)^2} \right) = -\frac{\xi}{2} t_3 + \frac{v}{2} \quad (5.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(1,0) &= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} dy}{y(4y+\xi)\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \rightarrow \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{(4y+\xi)\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} = \\
&= \frac{1}{ab} \left(\int_0^w \frac{a dz}{b+az} + \int_0^w \frac{a dz}{b-az} \right) = \frac{1}{ab} \ln \left(\frac{b+aw}{b-aw} \right) = \frac{3}{2(4-\xi)} t_3 \quad (5.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(2,0) &= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} dy}{y(4y+\xi)^2 \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \rightarrow \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{(4y+\xi)^2 \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} = \\
&= \frac{1}{2a^2b^2} \left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \ln \left(\frac{b+aw}{b-aw} \right) + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \left(\frac{b}{b-aw} - \frac{b}{b+aw} \right) \right) = \\
&= \frac{3(4+\xi)}{2(4-\xi)^3} t_3 + \frac{4v}{\sqrt{\xi}(4-\xi)^2} \quad (5.49)
\end{aligned}$$

5.4.3 Berechnung des Integrals $\mathcal{J}(0, -1)$

Das Integral $\mathcal{J}(0, -1)$ ist singularär an der unteren Grenze, denn für den Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$ ist

$$\mathcal{J}(0, -1) = \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}}{y^2 \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} dy \rightarrow \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{y \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \quad (5.50)$$

($\lambda := \sqrt{\Lambda\xi} + \Lambda$). Es ist zur Integration in einen divergenten Anteil \mathcal{D} und einen konvergenten Anteil \mathcal{C} zu zerlegen. Der divergente Anteil ergibt sich, wenn man den Grenzfall für kleine Werte von y betrachtet, denn nur in diesem Bereich trägt die Singularität bei. Man erhält bei Vernachlässigung unwichtiger Potenzen von Λ

$$\mathcal{D} = \int_{\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{y^2 - \Lambda\xi}}{y^2 \sqrt{1-\xi}} dy \rightarrow \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{y \sqrt{1-\xi}}. \quad (5.51)$$

Mit der Substitution $y = \sqrt{\Lambda\xi} \cosh \zeta$ ergibt sich (mit $\ln \sqrt{\eta} := \ln(2(1 - \sqrt{\xi})/\sqrt{\Lambda\xi})$)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \int_0^{\ln \sqrt{\eta}} \frac{\sqrt{\Lambda\xi} \sinh \zeta}{\Lambda\xi \cosh^2 \zeta} \sqrt{\Lambda\xi} \sinh \zeta d\zeta = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \int_0^{\ln \sqrt{\eta}} \tanh^2 \zeta d\zeta \quad (5.52)$$

und mit der Substitution $z = \tanh \zeta$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \left(\int_0^{\ln \sqrt{\eta}} d\zeta - \int_0^1 dz \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \left(\ln \left(2 \frac{1-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\Lambda\xi}} \right) - 1 \right). \quad (5.53)$$

Der konvergente Anteil ergibt sich durch Differenzbildung mit dem divergenten Anteil und Grenzwertbildung $\Lambda \rightarrow 0$ im Integranden dieser Differenz. Hier erhält man mit der angegebenen Substitution

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \left(\frac{1}{y\sqrt{(1-y)^2-\xi}} - \frac{1}{y\sqrt{1-\xi}} \right) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{1-\xi} - \sqrt{(1-y)^2-\xi}}{y\sqrt{(1-y)^2-\xi}} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \lim_{w' \rightarrow w} \int_0^{w'} \frac{2(\sqrt{1-\xi}(1-z^2) - 2\sqrt{\xi}z) dz}{(1+\sqrt{\xi})(1-z^2)(w^2-z^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \left(-\int_0^w \frac{dz}{1+z} + \int_0^w \frac{dz}{1-z} + 2 \int_0^w \frac{dz}{w+z} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \left(-\ln(1+w) - \ln(1-w) + 2 \ln \left(\frac{w+w}{w} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} (2 \ln 2 - \ln(1-w^2)) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \ln \left(\frac{2(1+\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} \right). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Zusammengenommen ergibt sich

$$\mathcal{J}(0, -1) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \left(-\ln \Lambda^{1/2} + \ln \left(\frac{4(1-\xi)}{\xi} \right) - 1 \right) =: \frac{1}{2v} (-\ln \Lambda^{1/2} + t_{12} - 1). \quad (5.55)$$

5.4.4 Berechnung des Integrals $\tilde{\mathcal{J}}(0, -1)$

Auch das Integral

$$\tilde{\mathcal{J}}(0, -1) = \int_{\frac{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\xi \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} dy}{(\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)) \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \rightarrow \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{y \sqrt{(1-y)^2 - \xi}}, \quad (5.56)$$

welches für $\Lambda \rightarrow 0$ in das Integral $\mathcal{J}(0, -1)$ überzugehen scheint, aber dennoch einen anderen endlichen Beitrag liefert, ist in einen divergenten und einen konvergenten Anteil zu zerlegen. Der divergente Anteil ergibt sich durch Substitution des Nenners für kleine Werte von y , geeignete Näherung für kleine Werte von Λ und anschließende Rücksubstitution,

$$\mathcal{D} = \int_{\frac{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\xi \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} dy}{(\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)) \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\xi\sqrt{y^2 - \Lambda\xi} dy}{(\xi(y + \Lambda)^2 + 4\Lambda(1 - y - \xi + \Lambda))\sqrt{1 - \xi}} = \\
&= \int_1^{(1-\sqrt{\xi})/\sqrt{\Lambda\xi}} \frac{\xi\sqrt{\Lambda\xi^2 y^2 - 1} dy}{(\xi(\sqrt{\Lambda\xi}y + \Lambda)^2 + 4\Lambda(1 - \sqrt{\Lambda\xi}y - \xi))\sqrt{1 - \xi}} = \\
&= \int_1^{(1-\sqrt{\xi})/\sqrt{\Lambda\xi}} \frac{\Lambda\xi^2\sqrt{y^2 - 1} dy}{(\Lambda\xi^2 y^2 - 4\Lambda(1 - \xi))\sqrt{1 - \xi}} = \\
&= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{\xi^2\sqrt{y^2 - \Lambda\xi} dy}{(\xi^2 y^2 + 4\Lambda\xi(1 - \xi))\sqrt{1 - \xi}} \rightarrow \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{y\sqrt{1 - \xi}}. \tag{5.57}
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $y = \sqrt{\Lambda\xi} \cosh \zeta$ (und $\ln \sqrt{\eta} := \ln(2(1 - \sqrt{\xi})/\sqrt{\Lambda\xi})$) ergibt sich auch hier eine Möglichkeit, den vorletzten Ausdruck zu integrieren.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \frac{\xi^2}{\sqrt{1 - \xi}} \int_0^{\ln \sqrt{\eta}} \frac{\sqrt{\Lambda\xi} \sinh \zeta}{\Lambda\xi \cosh^2 \zeta + 4(1 - \xi)} \sqrt{\Lambda\xi} \sinh \zeta d\zeta = \\
&= \frac{\xi^2}{\sqrt{1 - \xi}} \int_0^{\ln \sqrt{\eta}} \frac{(e^{4\zeta} - 2e^{2\zeta} + 1)d\zeta}{\xi^2(e^{4\zeta} + 2e^{2\zeta} + 1) + 16(1 - \xi)e^{2\zeta}} \tag{5.58}
\end{aligned}$$

und mit der Substitution $z = e^{2\zeta}$

$$\mathcal{D} = \frac{\xi^2}{2\sqrt{1 - \xi}} \int_1^{\eta} \frac{(z^2 - 2z + 1)dz}{z(\xi^2 z^2 + (16 - 16\xi + 2\xi^2)z + \xi^2)}. \tag{5.59}$$

Eine Partialbruchzerlegung führt schließlich auf

$$\mathcal{D} = \frac{\ln \sqrt{\eta}}{\sqrt{1 - \xi}} - \frac{(2 - \xi)}{4(1 - \xi)} \left[\ln \left(\frac{2\xi^2 z + (16 - 16\xi + 2\xi^2) - 8v(2 - \xi)}{2\xi^2 z + (16 - 16\xi + 2\xi^2) + 8v(2 - \xi)} \right) \right]_1^{\eta}. \tag{5.60}$$

Dabei wurde die Formel Nr.40b aus der Sammlung „Bronstein, Taschenbuch der Mathematik“ [23] mit $\Delta = -64(1 - \xi)(2 - \xi)^2$ verwendet. Im zweiten Anteil kann nun $\Lambda \rightarrow 0$ und damit die obere Grenze gegen Unendlich laufen. So ist schließlich

$$\mathcal{D} = \frac{1}{v} \ln \left(\frac{2(1 - \sqrt{\xi})}{\sqrt{\Lambda\xi}} \right) - \frac{(2 - \xi)}{2v^2} \ln \left(\frac{1 + v}{1 - v} \right). \tag{5.61}$$

Der konvergente Anteil ergibt sich mit der Substitution zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - y)^2 - \xi}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi}} \right) dy = \\
&= \frac{1}{v} \lim_{w' \rightarrow w} \int_0^{w'} \left(\frac{2w}{w^2 - z^2} - \frac{2(1 - w^2)z}{(1 - z^2)(w^2 - z^2)} \right) dz = \\
&= \frac{1}{v} \int_0^w \left(\frac{2}{w + z} - \frac{1}{1 + z} + \frac{1}{1 - z} \right) dz = \\
&= \frac{1}{v} \ln \left(\frac{4}{1 - w^2} \right) = \frac{1}{v} \ln \left(\frac{2(1 + \sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} \right) \tag{5.62}
\end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{J}}(0, -1) &= \frac{1}{v} \left(-\ln \Lambda^{1/2} + \ln \left(\frac{4(1-\xi)}{\xi} \right) - \frac{2-\xi}{2v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\ &= \mathcal{J}(0, -1) + \mathcal{J}_a \quad \text{mit} \quad \mathcal{J}_a := \frac{1}{v} \left(1 - \frac{2-\xi}{2v} t_3 \right).\end{aligned}\quad (5.63)$$

5.4.5 Berechnung der Integrale $\mathcal{J}_l(m)$

Zu berechnen sind die Integrale $\mathcal{J}_l(-1)$, $\mathcal{J}_l(0)$, $\mathcal{J}_l(1)$, $\mathcal{J}_l(2)$ und $\mathcal{J}_l(3)$. Hier soll nur die Berechnung des zweiten und dritten Integrals durchgeführt werden. Benutzt werden die Regeln (4.68), die Behandlung des schwierigeren Integrals $\mathcal{J}_l(-1)$ wird auch hier zunächst zurückgestellt.

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_l(0) &= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}-\varepsilon^2} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) \frac{dy}{(1-y)^2 - \xi} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_{\varepsilon'}^w \ln \left(\frac{(1+z)(b+az)}{(1-z)(b-az)} \right) \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\text{Li}_2(w) - \text{Li}_2(-w) + \text{Li}_2\left(\frac{a}{b}w\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{a}{b}w\right) \right) =: \frac{1}{\sqrt{\xi}} t_4\end{aligned}\quad (5.64)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_l(1) &= \mathcal{J}_l(0) + \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}-\varepsilon^2} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) \frac{(y-1)dy}{(1-y)^2 - \xi} \\ &\rightarrow \mathcal{J}_l(0) - \int_0^w \ln \left(\frac{(1+z)(b+az)}{(1-z)(b-az)} \right) \frac{(1+z^2)dz}{z(1-z^2)} = \\ &= (1 - \sqrt{\xi})\mathcal{J}_l(0) - \int_0^w \ln \left(\frac{(1+z)(b+az)}{(1-z)(b-az)} \right) \frac{2z dz}{1-z^2}\end{aligned}\quad (5.65)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_l(1) - (1 - \sqrt{\xi})\mathcal{J}_l(0) &= \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}(2 + \sqrt{\xi})}{4(1 + \sqrt{\xi})} \right) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1+w)} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1-w)} \right) + \\ &+ \text{Li}_2 \left(\frac{1+w}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1-w}{2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{a(1+w)}{4} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{a(1-w)}{4} \right) =: t_5\end{aligned}\quad (5.66)$$

5.4.6 Berechnung des Integrals $\mathcal{J}_l(-1)$

Auch das Integrale $\mathcal{J}_l(-1)$ ist singulär in der unteren Grenze, denn für $\Lambda \rightarrow 0$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_l(-1) &= \int_{\sqrt{\Lambda\xi+\Lambda}}^{1-\sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) \frac{dy}{y((1-y)^2 - \xi)} \\ &\rightarrow \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{2(1-y) - \xi + 2\sqrt{(1-y)^2 - \xi}}{2(1-y) - \xi - 2\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \right) \frac{dy}{y((1-y)^2 - \xi)}.\end{aligned}\quad (5.67)$$

Die Zerlegung des Integrals in einen divergenten Anteil \mathcal{D} und einen konvergenten Anteil \mathcal{C} ist hier entsprechend wie bei $\mathcal{J}(0, -1)$ und $\tilde{\mathcal{J}}(0, -1)$ zu vollziehen,

$$\mathcal{D} = \frac{1}{v^2} \int_{\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{(1+v^2)y + 2v\sqrt{y^2 - \Lambda\xi}}{(1+v^2)y - 2v\sqrt{y^2 - \Lambda\xi}} \right) \frac{dy}{y} \rightarrow \frac{2}{v^2} \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \frac{dy}{y}. \quad (5.68)$$

Bis auf den Vorfaktor $1/v^2$ taucht dieses Integral in sämtlichen divergenten Anteilen der logarithmischen Integrale verschiedenen Typs auf. Es braucht also nur einmal berechnet zu werden. Dabei hilft die Substitution

$$\begin{aligned} y &=: \sqrt{\Lambda\xi} \frac{t+1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \sqrt{y^2 - \Lambda\xi} = \sqrt{\Lambda\xi} \frac{t-1}{2\sqrt{t}}, \\ dy &= \sqrt{\Lambda\xi} \frac{t-1}{4t\sqrt{t}} dt, \quad \frac{dy}{y} = \frac{(t-1)dt}{2t(t+1)} = \frac{dt}{t+1} - \frac{dt}{2t} \\ t(y) &= \frac{(y + \sqrt{y^2 - \Lambda\xi})^2}{\Lambda\xi} \Rightarrow t(\sqrt{\Lambda\xi}) = 1, \quad t(1 - \sqrt{\xi}) = \eta. \end{aligned} \quad (5.69)$$

η wurde bei der Berechnung von $\mathcal{J}(0, -1)$ und $\tilde{\mathcal{J}}(0, -1)$ bereits eingeführt. So ergibt sich

$$\mathcal{D} = \frac{1}{v^2} \int_1^\eta \ln \left(\frac{(1+v)^2 t + (1-v)^2}{(1-v)^2 t + (1+v)^2} \right) \left(\frac{dt}{t+1} - \frac{dt}{2t} \right) =: \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2, \quad (5.70)$$

$$\mathcal{D}_1 = \frac{1}{v^2} \left[2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{\eta}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2v}{(1+v)^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-2v}{(1-v)^2} \right) \right], \quad (5.71)$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{1}{v^2} \left[-\ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \eta + \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\left(\frac{1-v}{1+v} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\left(\frac{1+v}{1-v} \right)^2 \right) \right]. \quad (5.72)$$

Dabei wurde in beiden Fällen die Dilogarithmenregel (3.75) verwendet. Zusammengenommen erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{v^2} \left[\ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{(1-\sqrt{\xi})^2}{\Lambda\xi} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2v}{(1+v)^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-2v}{(1-v)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\left(\frac{1-v}{1+v} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\left(\frac{1+v}{1-v} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Für den konvergenten Anteil ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\lambda}^{1-\sqrt{\xi}} \left[\ln \left(\frac{2(1-y) - \xi + 2\sqrt{(1-y)^2 - \xi}}{2(1-y) - \xi - 2\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \right) \frac{1}{y((1-y)^2 - \xi)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{v^2 y} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right] dy. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Mit der Grundsubstitution gilt

$$\begin{aligned} -\frac{dy}{y((1-y)^2 - \xi)} &= \frac{dz}{\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})z} - \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{w+z} - \frac{1}{w-z} \right) dz, \\ \frac{dy}{v^2 y} &= -\frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-z} - \frac{1}{w+z} + \frac{1}{w-z} \right) dz. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Entsprechend ist \mathcal{C} in vier Bestandteile aufzuspalten, in denen bei zweien bereits jetzt der Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$ durchgeführt werden kann, der hier die Gestalt $w' \rightarrow w$ besitzt:

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})} \int_0^w \ln \left(\frac{(1+z)(b+az)}{(1-z)(b-az)} \right) \frac{dz}{z} = \frac{1}{\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})} t_4, \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= -\frac{1}{v^2} \lim_{w' \rightarrow w} \int_0^{w'} \ln \left(\frac{(1+z)(b+az)}{(1-z)(b-az)} \right) \left(\frac{1}{w+z} - \frac{1}{w-z} \right) dz = \\ &= -\frac{1}{v^2} \left(-2 \lim_{w' \rightarrow w} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{2w}{w-w'} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Li}_2 \left(\frac{2w}{1+w} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{-2w}{1-w} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2aw}{b+aw} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{-2aw}{b-aw} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\mathcal{C}_3 = -\frac{2}{v^2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \int_0^w \left(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-z} \right) dz = -\frac{2}{v^2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln(1-w^2), \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4 &= \frac{2}{v^2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \lim_{w' \rightarrow w} \int_0^{w'} \left(\frac{1}{w+z} - \frac{1}{w-z} \right) dz = \\ &= \frac{2}{v^2} \lim_{w' \rightarrow w} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{2(w-w')}{w} \right). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Wie gewünscht fallen die Singularitäten in \mathcal{C}_2 und \mathcal{C}_4 gegeneinander heraus, es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{t_4}{\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})} + \frac{1}{v^2} \left[\ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{4(1+\sqrt{\xi})^2}{\xi} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \text{Li}_2 \left(\frac{2w}{1+w} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-2w}{1-w} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2aw}{b+aw} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-2aw}{b-aw} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Divergender und konvergenter Anteil zusammengenommen ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_l(-1) &= \frac{t_4}{\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})} + \frac{1}{v^2} \left[2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \left(-\ln \Lambda^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{2(1-\xi)}{\xi} \right) \right) + \right. \\ &\quad - \text{Li}_2 \left(\frac{2w}{1+w} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-2w}{1-w} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2aw}{b+aw} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-2aw}{b-aw} \right) + \\ &\quad - \text{Li}_2 \left(\frac{2v}{(1+v)^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-2v}{(1-v)^2} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(- \left(\frac{1-v}{1+v} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(- \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Die in Anhang B angegebene Formel für $\mathcal{J}_l(-1)$ ist, das sei hier angemerkt, auf einem anderen Weg erreicht worden. Durch eine geeignete Erweiterung konnte $\mathcal{J}_l(-1)$ dort mittels $\mathcal{I}_l(-1)$, $\mathcal{J}_l(0)$ und $\mathcal{J}_l(1)$ geschrieben werden. Dieser Weg wurde gewählt, um die Zahl der Zerfallsratenterme (zu finden in Anhang B.5) möglichst niedrig zu halten.

Kapitel 6

Beiträge erster Ordnung

In diesem Kapitel sollen die Beiträge mit virtuellen und reellen Gluonen zu Beiträgen erster Ordnung im Entwicklungsparameter α_s zusammengefügt werden. Es wird sich dabei erweisen, daß die Infrarot-Singularität, die sich durch den Subtraktionsparameter Λ ausdrückt, vollständig aufhebt. Dies ist, wie bereits erwähnt, eine Konsequenz eines Theorems, das T. Kinoshita, T.D. Lee und M. Nauenberg [20, 21] zwischen 1962 und 1964 aufstellten und das nach ihnen benannt ist.

6.1 Entwicklung in Zerfallsratenterme

Die Vielzahl der im letzten Kapitel zu berechnenden Integrale und die zugleich auffällige Parallelität in der Berechnung dieser Integraltypen brachte den Autor dazu, diese Integrale durch eine kleinere Klasse von Termen auszudrücken, die er „Zerfallsratenterme“ nannte. Es erwies sich, daß im Fall der Beiträge von Graphen mit reellen Gluonen sämtliche Integrale durch zehn solcher Terme auszudrücken waren, zwei weitere kamen durch die Beiträge mit virtuellen Gluonen hinzu. Der Satz von zwölf Zerfallsratentermen ist jedoch sicherlich nicht endgültig. Numerisch kann gezeigt werden, daß zwischen diesen Termen lineare Abhängigkeiten bestehen, die aufgrund fehlender Beziehungen zwischen den auftretenden Dilogarithmen bisher nicht aufgedeckt werden konnten. Dieses Vorhaben soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

6.1.1 Vorgehen anhand des Beispiels der Projektion L

Die Schritte bis hin zu Ausdrücken in den Zerfallsratentermen sollen hier wieder nur an einem Beispiel, nämlich der Projektion L , vorgeführt werden. Weggelassen sei vorerst der generelle Faktor $4\pi\alpha_s N_C C_F$. Die Terme (5.30)–(5.32) liefern nach Integration über die Phasenraumvariable y zunächst

$$\begin{aligned} H_L^{VV}(tree) &= 2\xi(1-\xi)(2-\xi)\mathcal{J}_l(-1) - 8\xi(1-\xi)\mathcal{J}(0,-1) - 4\xi(1-\xi)\mathcal{J}_a + & (6.1) \\ &- 4\xi(3-2\xi)\mathcal{J}_l(0) + 6\xi\mathcal{J}_l(1) + 16\xi\mathcal{J}(0,0) - 4\mathcal{J}(0,1) + 4(4-\xi)\mathcal{J}(1,1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_L^{VA}(tree) &= H_L^{AV}(tree) = -2\xi(1-\xi)\mathcal{T}_l(1) - \xi(2-3\xi)\mathcal{T}_l(2) + 4\xi\mathcal{T}_l(3) + & (6.2) \\ &- \frac{1}{2}(2-\xi)(8+\xi)\mathcal{T}(0,1) + 2(2+5\xi)\mathcal{T}(0,2) + \frac{1}{2}(2-\xi)(4-\xi)^2\mathcal{T}(1,1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{AA}(tree) &= -2\xi(2-\xi)\mathcal{J}_l(1) + 2\xi\mathcal{J}_l(3) - (4-7\xi+\xi^2)\mathcal{J}(0,1) + 3\xi\mathcal{J}(0,2) + \\
&\quad + (4-\xi)(4-3\xi-\frac{5}{4}\xi^2)\mathcal{J}(1,1) + \frac{1}{4}\xi(4-\xi)^3\mathcal{J}(2,1).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Setzt man die Integrale gemäß Anhang B ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
H_L^{VV}(tree) &= 2\xi \ln \Lambda \left(2v - (2-\xi) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) + 4(1+\xi)v - 8\xi v t_{12} + 2\xi(2-\xi)t_9 + \\
&\quad + 2\xi(1+\xi)t_5 - 2\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})(1+2\sqrt{\xi}-\xi)t_4 + 2\xi(5-\xi)t_3,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{VA}(tree) &= H_L^{AV}(tree) = 2(1-\sqrt{\xi})(2-6\sqrt{\xi}+13\xi) + \\
&\quad + \xi(10+3\xi)t_6 - 26\xi v t_3 - \xi(12-\frac{7}{2}\xi)(t_1-t_2) \quad \text{und}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{AA}(tree) &= (4-19\xi+\frac{3}{2}\xi^2)v + 2\xi(1+2\xi)t_5 + \\
&\quad - 2\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})(1+2\sqrt{\xi}+2\xi)t_4 + \xi(8-2\xi+\frac{3}{4}\xi^2)t_3.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Die Zerfallsratenterme t_i sind in Anhang B.5 zu finden.

6.1.2 Der relative Phasenraumfaktor

Neben dem weggelassenen Faktor $4\pi\alpha_s N_C C_F$ fehlt in den Ausdrücken noch der Phasenraumfaktor. Dieser fehlte auch bei den berechneten Termen der Bornschen Näherung wie der Graphen mit einem virtuellen Gluon. Einigt man sich darauf, den Phasenraumfaktor des Zweiteilcherzerfalls erst ganz am Ende in den Wirkungsquerschnitt einfließen zu lassen, so müssen die eben berechneten Terme mit einem *relativen Phasenraumfaktor*

$$dPS_{32} = dPS_3/dPS_2 = \frac{q^2}{4(2\pi)^3 v} dy dz d\chi \tag{6.7}$$

(vgl. Gleichung (4.41)) versehen werden, wobei die Integrationen über y und z ja bereits ausgeführt wurden. Im Falle longitudinaler Projektion kann auch die Integration über den Azimutalwinkel χ sofort durchgeführt werden, da die einzelnen Terme des Integranden nicht von χ abhängen. Es ergibt sich dann

$$4\pi\alpha_s N_C C_F dPS_{32} = 4\pi\alpha_s N_C C_F \frac{q^2}{16\pi^2 v} dy dz = \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} dy dz. \tag{6.8}$$

6.1.3 Zusammenfassung mit den virtuellen Beiträgen

Das Kapitel über virtuelle Beiträge ergab das Verschwinden der Komponenten $H_L^{VA}(loop)$, $H_L^{AV}(loop)$ und $H_L^{AA}(loop)$, für die VV -Komponente aber

$$\begin{aligned}
H_L^{VV}(loop) &= 2N_C q^2 \xi \operatorname{Re} A + 2N_C q^2 v^2 \operatorname{Re} B = \\
&= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[-2\xi \ln \left(\frac{4\Lambda}{\xi} \right) \left(2v - (2-\xi) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. -4\xi(2-\xi)L(v) + 6\xi v^2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - 8\xi v - 2\xi v^2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[-2\xi \ln \Lambda \left(2v - (2 - \xi) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) - 8\xi v - 4\xi v \ln \left(\frac{4}{\xi} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2\xi(2 - \xi) \ln \left(\frac{4}{\xi} \right) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - 4\xi(2 - \xi)L(v) + 4\xi v^2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right] = \\
&= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[-2\xi \ln \Lambda \left(2v - (2 - \xi) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. - 8\xi v - 4\xi v t_{10} - 2\xi(2 - \xi)t_8 + 4\xi v^2 t_3 \right]. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Dabei wurden neue Zerfallsratenterme t_8 und t_{10} eingeführt und die Korrespondenzformel (3.55) benutzt. Leicht läßt sich nun erkennen, daß sich die Λ -Singularitäten in den Anteilen H_L^{VV} für reale und virtuelle Gluonen gegenseitig aufheben, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
H_L^{VV}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[4v^3 - 8\xi v t_{12} - 4\xi v t_{10} - 2\xi(2 - \xi)(t_8 - t_9) + \right. \\
&\quad \left. + 2\xi(1 + \xi)t_5 - 2\sqrt{\xi}(1 - \sqrt{\xi})(1 + 2\sqrt{\xi} - \xi)t_4 + 2\xi(7 - 3\xi)t_3 \right], \tag{6.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{VA}(\alpha_s) &= H_L^{AV}(\alpha_s) = \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[2(1 - \sqrt{\xi})(2 - 6\sqrt{\xi} + 13\xi) + \right. \\
&\quad \left. + \xi(10 + 3\xi)t_6 - 26\xi v t_3 - \xi(12 - \frac{7}{2}\xi)(t_1 - t_2) \right] \quad \text{und} \tag{6.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{AA}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[(4 - 19\xi + \frac{3}{2}\xi^2)v + 2\xi(1 + 2\xi)t_5 + \right. \\
&\quad \left. - 2\sqrt{\xi}(1 - \sqrt{\xi})(1 + 2\sqrt{\xi} + 2\xi)t_4 + \xi(8 - 2\xi + \frac{3}{4}\xi^2)t_3 \right]. \tag{6.12}
\end{aligned}$$

6.2 Polarisierte und unpolarisierte Terme

In diesem Abschnitt sollen zwei Neukombinationen benutzt werden. Zum einen werden die Linearkombinationen

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^1 &= \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VV} + H_{\mu\nu}^{AA}), & H_{\mu\nu}^2 &= \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VV} - H_{\mu\nu}^{AA}), \\
H_{\mu\nu}^3 &= \frac{i}{2}(H_{\mu\nu}^{VA} - H_{\mu\nu}^{AV}), & H_{\mu\nu}^4 &= \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VA} + H_{\mu\nu}^{AV}) \tag{6.13}
\end{aligned}$$

gebildet, zum anderen wird zwischen polarisierten und unpolarisierten Termen unterschieden. Die hierbei gewählte Schreibweise bietet zudem die Möglichkeit, die Polarisationsrichtung anzugeben. So wird die longitudinale Polarisation mit dem geschwungenen kleinen ℓ , die transversal ebene Polarisation mit \perp und die transversal normale Polarisation mit N gekennzeichnet. Man definiert für $m \in \{\ell, \perp, N\}$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu}^{im} &:= H_{\mu\nu}^i(s^m) - H_{\mu\nu}^i(-s^m) \quad \text{und} \\
H_{\mu\nu}^i &:= H_{\mu\nu}^i(s^m) + H_{\mu\nu}^i(-s^m), \tag{6.14}
\end{aligned}$$

wobei die explizite Spinabhängigkeit des Hadrontensors angegeben wurde. Zu beachten ist, daß klarerweise die zweite Gleichung, also diejenige für die unpolarisierten Terme,

unabhängig von der Wahl der Polarisationsrichtung ist. Um die unpolarisierten Beiträge von den bisher verwendeten spinabhängigen Beiträgen unterscheiden zu können, soll bei Letzteren nun die Spinabhängigkeit wie vorher gezeigt mit angegeben werden.

6.2.1 Unpolarisierte Beiträge

Die Gesamtbeiträge erster Ordnung sollen in den folgenden Unterabschnitten zusammen mit den Beiträgen in Bornscher Näherung und den Schleifenbeiträgen gezeigt und anschließend aus ihnen der Wirkungsquerschnitt berechnet werden. Zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt tragen klarerweise nur die spinunabhängigen Anteile des Hadrontensors bei. Aufgeführt seien hier lediglich die nichtverschwindenden Terme.

Bornsche Beiträge:

$$\begin{aligned}
H_U^1(\text{born}) &= 2N_C q^2(1+v^2) & H_U^2(\text{born}) &= 2N_C q^2(1-v^2) \\
H_L^1(\text{born}) &= H_L^2(\text{born}) = N_C q^2(1-v^2) \\
H_F^4(\text{born}) &= 4N_C q^2
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Schleifenbeiträge erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
H_U^1(\text{loop}) &= 4N_C q^2(\text{Re } A + v^2 \text{Re } C) & H_U^2(\text{loop}) &= 4N_C q^2(\text{Re } A - v^2 \text{Re } C) \\
H_L^1(\text{loop}) &= H_L^2(\text{loop}) = 2N_C q^2(\xi \text{Re } A + v^2 \text{Re } B) \\
H_F^3(\text{loop}) &= -4N_C q^2 v(\text{Im } A - \text{Im } C) & H_F^4(\text{loop}) &= 4N_C q^2 v(\text{Re } A + \text{Re } C)
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Gesamtbeiträge erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
H_U^1(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[2(2+7\xi)v - 16(2-\xi)vt_{12} - 8(2-\xi)vt_{10} - 4(2-\xi)^2(t_8-t_9) + \right. \\
&\quad \left. -2\xi(2+3\xi)t_5 + 2\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})(2+4\sqrt{\xi}-3\xi)t_4 + (48-48\xi+7\xi^2)t_3 \right]
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
H_U^2(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \xi \left[12v - 16vt_{12} - 8vt_{10} - 4(2-\xi)(t_8-t_9) + \right. \\
&\quad \left. +2\xi t_5 + 2\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})t_4 + 2(6-\xi)t_3 \right]
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
H_L^1(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[(8-23\xi + \frac{3}{2}\xi^2)v - 8\xi vt_{12} - 4\xi vt_{10} - 2\xi(2-\xi)(t_8-t_9) + \right. \\
&\quad \left. +2\xi(2+3\xi)t_5 - 2\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})(2+4\sqrt{\xi}-3\xi)t_4 + \xi(22-8\xi + \frac{3}{4}\xi^2)t_3 \right]
\end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
H_L^2(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \xi \left[\frac{3}{2}(10-\xi)v - 8vt_{12} - 4vt_{10} - 2(2-\xi)(t_8-t_9) + \right. \\
&\quad \left. -2\xi t_5 - 2\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})t_4 + (6-4\xi - \frac{3}{4}\xi^2)t_3 \right]
\end{aligned} \tag{6.20}$$

$$H_F^3(\alpha_s) = \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[-8\pi\xi v \right] \quad (6.21)$$

$$H_F^4(\alpha_s) = \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[-16\sqrt{\xi}(1 - \sqrt{\xi}) - 16v^2 t_{11} - 16v^2 t_{10} + \right. \\ \left. + 8(2 - \xi)v(t_7 - t_8) - 4(4 - 5\xi)t_6 + 8(2 - 3\xi)vt_3 - 16(t_1 - t_2) \right] \quad (6.22)$$

Aus dem Phasenraumfaktor (4.28) und dem Vergleich von (2.26) mit (2.44), (2.27) und (1.49) ergibt sich mit

$$\sigma_p^i := \frac{2\pi\alpha^2 v}{3q^4} (H_p^i(\text{born}) + H_p^i(\alpha_s)), \quad p = U, L, F, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6.23)$$

(α ist die Feinstrukturkonstante der QED) schließlich

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{3}{8}(1 + \cos^2\theta)(g_{11}\sigma_U^1 + g_{12}\sigma_U^2) + \quad (6.24) \\ + \frac{3}{4}\sin^2\theta(g_{11}\sigma_L^1 + g_{12}\sigma_L^2) + \frac{3}{4}\cos\theta(g_{43}\sigma_F^3 + g_{44}\sigma_F^4).$$

Hinzuweisen bleibt hier besonders auf das Auftreten des Anteils σ_F^3 . Er ergibt sich aus den Imaginärteilen der Formfaktoren A , B und C der Vertexkorrektur. Solche Terme werden im Falle transversaler Polarisation einen entscheidenden Beitrag liefern. Die Unterscheidung zwischen reellen und imaginären Anteilen soll jedoch im Folgenden nicht mehr getroffen werden.

6.2.2 Longitudinal polarisierte Beiträge

Zum polarisierten Wirkungsquerschnitt tragen die spinabhängigen Anteile des Hadrontensors bei. Für die longitudinale Polarisation sind dies

Bornsche Beiträge:

$$H_U^{4\ell}(\text{born}) = 4N_C q^2 v \\ H_L^{4\ell}(\text{born}) = 0 \\ H_F^{1\ell}(\text{born}) = 2N_C q^2(1 + v^2) \quad H_F^{2\ell}(\text{born}) = 2N_C q^2(1 - v^2) \quad (6.25)$$

Schleifenbeiträge erster Ordnung:

$$H_U^{3\ell}(\text{loop}) = -4N_C q^2 v(\text{Im} A - \text{Im} C) \quad H_U^{4\ell}(\text{loop}) = 4N_C q^2 v(\text{Re} A + \text{Re} C) \\ H_L^{4\ell}(\text{loop}) = 0 \\ H_F^{1\ell}(\text{loop}) = 4N_C q^2(\text{Re} A + v^2 \text{Re} C) \quad H_F^{2\ell}(\text{loop}) = 4N_C q^2(\text{Re} A - v^2 \text{Re} C) \quad (6.26)$$

Gesamtbeiträge erster Ordnung:

$$H_U^{3\ell}(\alpha_s) = \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[-8\pi\xi v \right] \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}
H_U^{4\ell}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[-2(1 - \sqrt{\xi})(2 - 6\sqrt{\xi} + 29\xi) - 16v^2 t_{11} - 16v^2 t_{10} + \right. \\
&\quad + 8(2 - \xi)v(t_7 - t_8) - 2(8 + 2\xi + 3\xi^2)t_6 + 4(4 + 9\xi)vt_3 + \\
&\quad \left. - (16 - 30\xi + \frac{17}{2}\xi^2)(t_1 - t_2) \right] \tag{6.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{4\ell}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[4(1 - \sqrt{\xi})(2 - 6\sqrt{\xi} + 13\xi) + 2\xi(10 + 3\xi)t_6 + \right. \\
&\quad \left. - 52\xi vt_3 - \xi(24 - 7\xi)(t_1 - t_2) \right] \tag{6.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_F^{1\ell}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \left[-4(2 + 3\xi)v - 16(2 - \xi)vt_{12} - 8(2 - \xi)vt_{10} + \right. \\
&\quad - 4(2 - \xi)^2(t_8 - t_9) + 2\xi(10 - \xi)t_5 + 2\sqrt{\xi}(1 - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi})(4 + \sqrt{\xi})t_4 + \\
&\quad \left. + 2(24 - 12\xi + \xi^2)t_3 \right] \tag{6.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_F^{2\ell}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \xi \left[12v - 16vt_{12} - 8vt_{10} - 4(2 - \xi)(t_8 - t_9) + \right. \\
&\quad \left. + 2\xi t_5 + 2\sqrt{\xi}(1 - \sqrt{\xi})t_4 + 2(6 - \xi)t_3 \right] \tag{6.31}
\end{aligned}$$

Wichtig ist hier, daß zu $H_L^{4\ell}(\alpha_s)$ nur die Baumgraphen erster Ordnung beitragen. Die entsprechende Winkelverteilung der Polarisation erhält also erst in erster Ordnung nichtverschwindende Anteile, die dementsprechend klein ausfallen. Mit den Projektionen

$$\sigma_p^{im} := \frac{2\pi\alpha^2 v}{3q^4} (H_p^{im}(born) + H_p^{im}(\alpha_s)), \tag{6.32}$$

die hier allgemeiner für $m \in \{\ell, \perp, N\}$ und $p \in \{U, L, F, I, A\}$ definiert ist, ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt bei longitudinaler Polarisation

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^\ell}{d\cos\theta} &= \frac{3}{8}(1 + \cos^2\theta) (g_{13}\sigma_U^{3\ell} + g_{14}\sigma_U^{4\ell}) + \frac{3}{4}\sin^2\theta (g_{13}\sigma_L^{3\ell} + g_{14}\sigma_L^{4\ell}) + \\
&\quad + \frac{3}{4}\cos\theta (g_{41}\sigma_F^{1\ell} + g_{42}\sigma_F^{2\ell}). \tag{6.33}
\end{aligned}$$

Der Anteil $\sigma_L^{3\ell}$ ist hinzugefügt, obwohl sein Beitrag verschwindet. In höheren Ordnungen der Störungsreihe kann jedoch auch er Beiträge zum differentiellen Wirkungsquerschnitt liefern.

6.2.3 Transversal eben polarisierte Beiträge

Wie in (2.30) deutlich wird, besitzt der Spin in x -Richtung, nach der hier gewählten Konvention also in transversal ebener Richtung, relativ zu den Viererimpulsen p_1 , p_2 und p_3 eine explizite Abhängigkeit vom Azimuthalwinkel χ in Form trigonometrischer Funktionen. Bei der Integration über diesen Winkel fallen also alle Beiträge heraus, die nur ein einzelnes Skalarprodukt des Spins mit einem der Impulse besitzen. Klarerweise verschwinden sämtliche spinabhängigen Beiträge zu den Projektionen U , L und F , denn die

Projektoren enthalten keine weitere Spinabhängigkeit. Dagegen werden die Projektionen I und A wichtig, welche diese Spinabhängigkeit tragen.

Bornsche Beiträge:

$$H_I^{4\perp}(\text{born}) = -2N_C q^2 \sqrt{\xi} \quad H_A^{1\perp}(\text{born}) = -2N_C q^2 \sqrt{\xi} \quad (6.34)$$

Schleifenbeiträge erster Ordnung:

$$\begin{aligned} H_I^{3\perp}(\text{loop}) &= 2N_C q^2 \sqrt{\xi} (v(\text{Im } A - \text{Im } C) + \frac{v^3}{\xi} \text{Im } B) \\ H_I^{4\perp}(\text{loop}) &= -2N_C q^2 \sqrt{\xi} (v(1 + \text{Re } A + \text{Re } C) + \frac{v^3}{\xi} \text{Re } B) \\ H_A^{1\perp}(\text{loop}) &= H_A^2(\text{loop}) = -2N_C q^2 \sqrt{\xi} ((1 + 2 \text{Re } A) + \frac{v^2}{\xi} \text{Re } B) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Gesamtbeiträge erster Ordnung:

$$H_I^{3\perp}(\alpha_s) = \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \sqrt{\xi} [2\pi(1 + \xi)v] \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} H_I^{4\perp}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \sqrt{\xi} [(1 - \sqrt{\xi})(48 - 14\sqrt{\xi} + 3\xi) + 8v^2 t_{11} + 8v^2 t_{10} + \\ &\quad -4(2 - \xi)v(t_7 - t_8) + (16 + 7\xi)t_6 - 2(21 + 2\xi)vt_3 + \\ &\quad -\frac{1}{4}(4 - \xi)(10 + 3\xi)(t_1 - t_2)] \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} H_A^{1\perp}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \sqrt{\xi} [(8 - 3\xi)v + 16vt_{12} + 8vt_{10} + 4(2 - \xi)(t_8 - t_9) + \\ &\quad - (8 + \xi)t_5 + (1 - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi})(4 + \sqrt{\xi})t_4 - (36 - 19\xi + \frac{3}{2}\xi^2)t_3] \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} H_A^{2\perp}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \sqrt{\xi} [- (20 - 3\xi)v + 16t_{12} + 8vt_{10} + 4(2 - \xi)(t_8 - t_9) + \\ &\quad - \xi t_5 + \xi(1 - \sqrt{\xi})t_4 - (16 - 7\xi - \frac{3}{2}\xi^2)t_3] \end{aligned} \quad (6.39)$$

Mit der Formel (6.32) berechnen sich nun die Projektionen $\sigma_I^{3\perp}$, $\sigma_I^{4\perp}$, $\sigma_A^{1\perp}$ und $\sigma_A^{2\perp}$, und diese wiederum tragen zum Wirkungsquerschnitt bei transversal ebener Polarisation bei,

$$\frac{d\sigma^\perp}{d\cos\theta} = \frac{3}{4} \sin 2\theta (g_{13}\sigma_I^{3\perp} + g_{14}\sigma_I^{4\perp}) + \frac{3}{4} \sin\theta (g_{41}\sigma_A^{1\perp} + g_{42}\sigma_A^{2\perp}). \quad (6.40)$$

6.2.4 Transversal normal polarisierte Beiträge

Wie vorher verschwinden die Beiträge von U , L und F vollständig, es bleiben auch hier nur Beiträge von I und A zurück.

Bornscher Beitrag:

$$H_A^{3N}(\text{born}) = -2N_C q^2 v \sqrt{\xi} \quad (6.41)$$

Schleifenbeiträge erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
H_I^{1N}(\text{loop}) &= 2N_C q^2 \frac{v^2}{\sqrt{\xi}} \text{Im } B \\
H_A^{3N}(\text{loop}) &= -2N_C q^2 \sqrt{\xi} (v(1 + \text{Re } A + \text{Re } C) + \frac{v^3}{\xi} \text{Re } B) \\
H_A^{4N}(\text{loop}) &= -2N_C q^2 \sqrt{\xi} (v(\text{Im } A - \text{Im } C) + \frac{v^3}{\xi} \text{Im } B)
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Gesamtbeiträge erster Ordnung:

$$H_I^{1N}(\alpha_s) = H_I^{2N}(\alpha_s) = \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \sqrt{\xi} [2\pi v^2] \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned}
H_A^{3N}(\alpha_s) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \sqrt{\xi} \left[-(1 - \sqrt{\xi})(20 - 6\sqrt{\xi} + 3\xi) + 8v^2 t_{11} + 8v^2 t_{10} + \right. \\
&\quad \left. -4(2 - \xi)v(t_7 - t_8) + (8 - 13\xi)t_6 - 2(1 - 6\xi)vt_3 + \right. \\
&\quad \left. + (6 - \frac{1}{2}\xi - \frac{3}{4}\xi^2)(t_1 - t_2) \right]
\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$H_A^{4N}(\alpha_s) = \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi v} \sqrt{\xi} [-2\pi(1 + \xi)v] \tag{6.45}$$

Auch hier berechnen sich die Projektionen σ_I^{1N} , σ_I^{2N} , σ_A^{3N} und σ_A^{4N} analog mit (6.32), der Wirkungsquerschnitt ist

$$\frac{d\sigma^N}{d\cos\theta} = \frac{3}{4} \sin 2\theta (g_{11}\sigma_I^{1N} + g_{12}\sigma_I^{2N}) + \frac{3}{4} \sin\theta (g_{43}\sigma_A^{3N} + g_{44}\sigma_A^{4N}). \tag{6.46}$$

6.3 Polarisationen

Läßt man die Polarisation des Quarkspins außer Acht, so kann der totale Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie gemessen werden. Ihm soll der erste Unterabschnitt gewidmet sein. Die *Polarisation* ergibt sich, wie bereits in den Anfangskapiteln angesprochen, aus dem Verhältnis

$$P = \frac{\sigma(\uparrow) - \sigma(\downarrow)}{\sigma(\uparrow) + \sigma(\downarrow)}. \tag{6.47}$$

Von dieser Polarisation gibt es entsprechend den Spinrichtungen drei verschiedene Ausführungen. Ferner kann die Polarisation sowohl in ihrer Abhängigkeit von der Energie des Quarks als auch in ihrer Winkelabhängigkeit beschrieben werden. Beide Abhängigkeiten lassen sich in Streuexperimenten nachweisen. Diese Abhängigkeiten sollen daher in den daran anschließenden Unterabschnitten behandelt werden. Da in diesem Abschnitt Diagramme gezeigt, also konkrete Rechnungen für das bottom- und das top-Quark präsentiert werden, muß auch etwas zur Energieabhängigkeit der zu renormierenden Größen wie Masse und Kopplungskonstante gesagt werden. Dies sei im letzten Unterabschnitt getan.

6.3.1 Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes

Bei Integration des unpolarisierten, differentiellen Wirkungsquerschnittes über den Polarwinkel θ ergibt sich wegen der geeignet gewählten Normierung der Winkelanteile mit

$$\int_{-1}^1 \frac{3}{8}(1 + \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \int_{-1}^1 \frac{3}{4} \sin^2 \theta d(\cos \theta) = 1, \quad \int_{-1}^1 \frac{3}{4} \cos \theta d(\cos \theta) = 0 \quad (6.48)$$

der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = (g_{11}\sigma_U^1 + g_{12}\sigma_U^2) + (g_{11}\sigma_L^1 + g_{12}\sigma_L^2) = g_{11}\sigma_{U+L}^1 + g_{12}\sigma_{U+L}^2. \quad (6.49)$$

Zum Erstellen des Diagramms ist der Umrechnungsfaktor von „natürlichen Einheiten“ in SI-Einheiten zu berücksichtigen. Es ist

$$\frac{1}{1 \text{ GeV}^2} \hat{=} \frac{\hbar^2 c^2}{e^2} \frac{10^{22}}{\text{V}^2} = 3.894 \cdot 10^{-32} \text{ m}^2 = 3.894 \cdot 10^8 \text{ pb}. \quad (6.50)$$

Die Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnittes von der Schwerpunktsenergie ist für das top-Quark in Abbildung 6.1 und für das bottom-Quark in Abbildung 6.2 gegeben. In beiden Fällen steigt der Wirkungsquerschnitt nach Überschreiten der Schwelle, die der zweifachen Quarkmasse entspricht, stark an, um danach wieder abzufallen. Da aber die Masse des bottom-Quarks leichter ist als die halbe Masse des Z^0 -Bosons, zeigt die entsprechende Kurve auch den Z^0 -Pol. Die Skala ist hier logarithmisch gewählt, um diesen darstellen zu können. Eine Detailstudie, die der Autor für den Energiebereich bis 50 GeV durchführte, zeigte ein qualitativ ähnliches Schwellenverhalten wie für das top-Quark. Diese Detailstudie ist ebenfalls in Abbildung 6.2 dargestellt. Auf die punktierte Linie in Abbildung 6.1 wird erst im nächsten Unterabschnitt Bezug genommen.

6.3.2 Die Abhängigkeit der Polarisation vom Polarwinkel

Zur Angabe der Polarisationen sollen drei verschiedene Schwerpunktsenergien vorgegeben werden. Wir wählen dazu $\sqrt{q^2} = 370 \text{ GeV}$, 500 GeV und 1000 GeV . Der unterste Energiewert ist deutlich höher als derjenige der Schwellenenergie des top-Quarks von 350 GeV gewählt. Nur dort macht die Störungstheorie einen Sinn, knapp oberhalb der Schwelle hingegen kann es zu quasi gebundenen Zuständen kommen, die sich nicht mehr mit der Störungstheorie behandeln lassen. Dargestellt werden in den Abbildungen 6.4 bis 6.6 die Winkelabhängigkeit der Polarisationen

$$P^m(\cos \theta) = \frac{d\sigma^m/d\cos \theta}{d\sigma/d\cos \theta} \quad \text{für } m \in \{\ell, \perp, N\}. \quad (6.51)$$

Zuvor soll jedoch in Abbildung 6.3 am Beispiel der transversal ebenen Polarisation für das top-Quark ein Vergleich zwischen den Bornschen Beiträgen und den Beiträgen erster Ordnung gezogen werden. Zu erkennen ist die nur schwache Abweichung, welche selbst für die höchste Energie unter einem Wert von relativen 10% liegt. Dies gilt ebenso für das bottom-Quark, für die longitudinale Polarisationsrichtung ergibt sich sogar eine Abweichung von nur 2%. Ein Vergleich mit der punktierten Linie in Abbildung 6.1, die den Bornschen Beitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt zeigt, liefert das Ergebnis, daß sich die Abweichungen im Nenner und Zähler des Polarisationsbruches nahezu gegeneinander

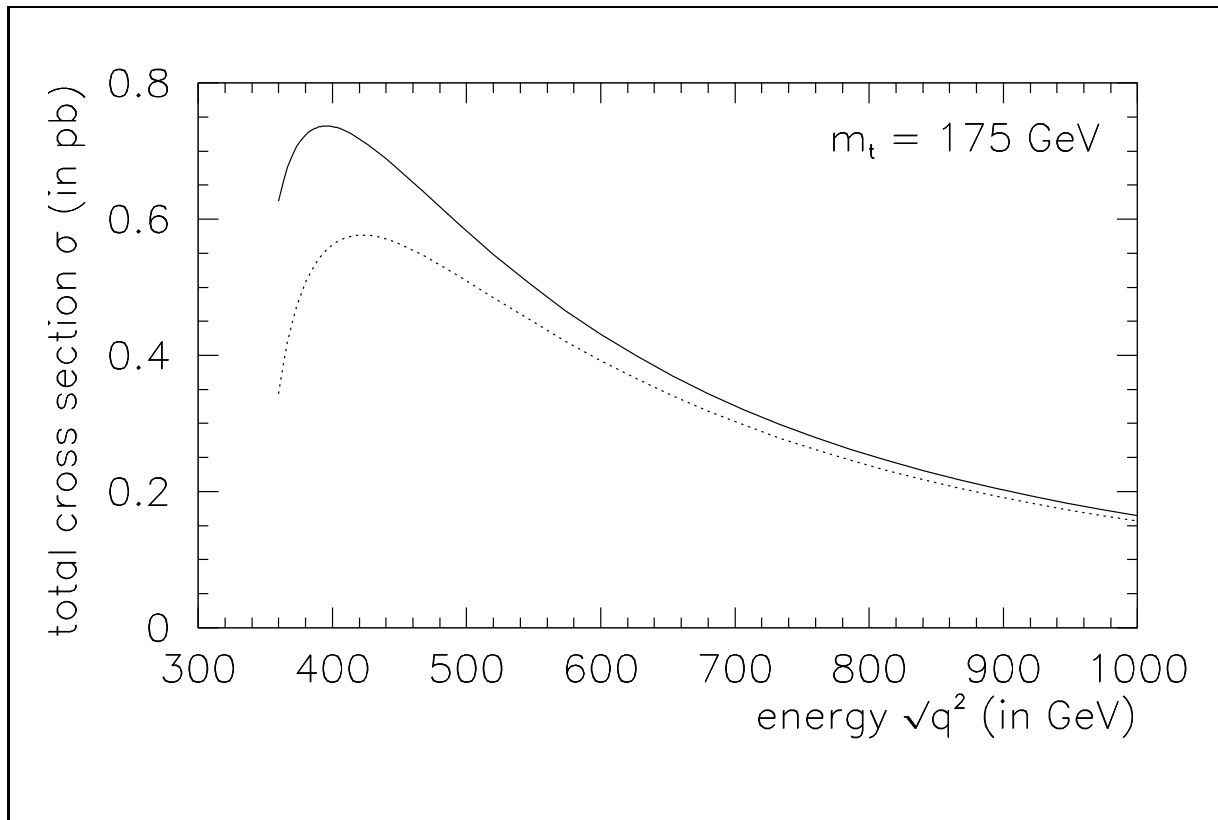


Abbildung 6.1: Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes für das top-Quark

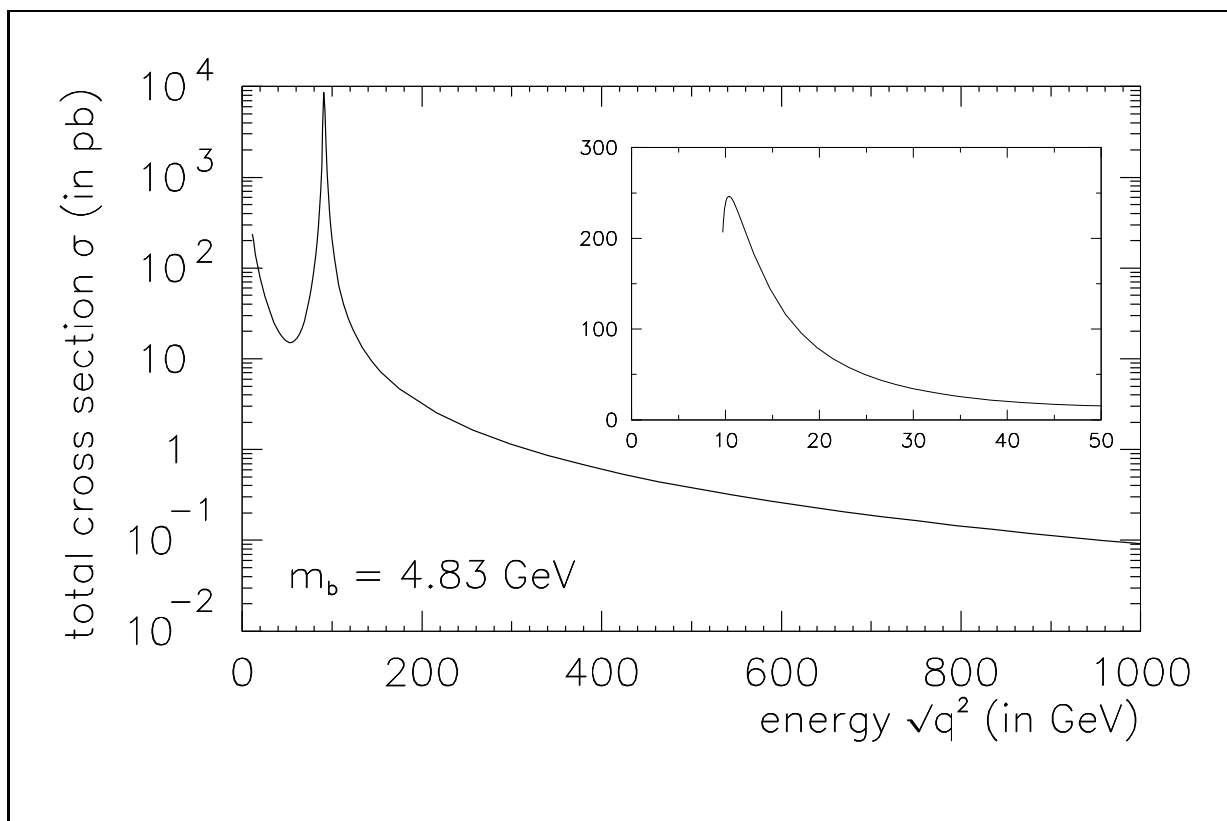


Abbildung 6.2: Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes für das bottom-Quark

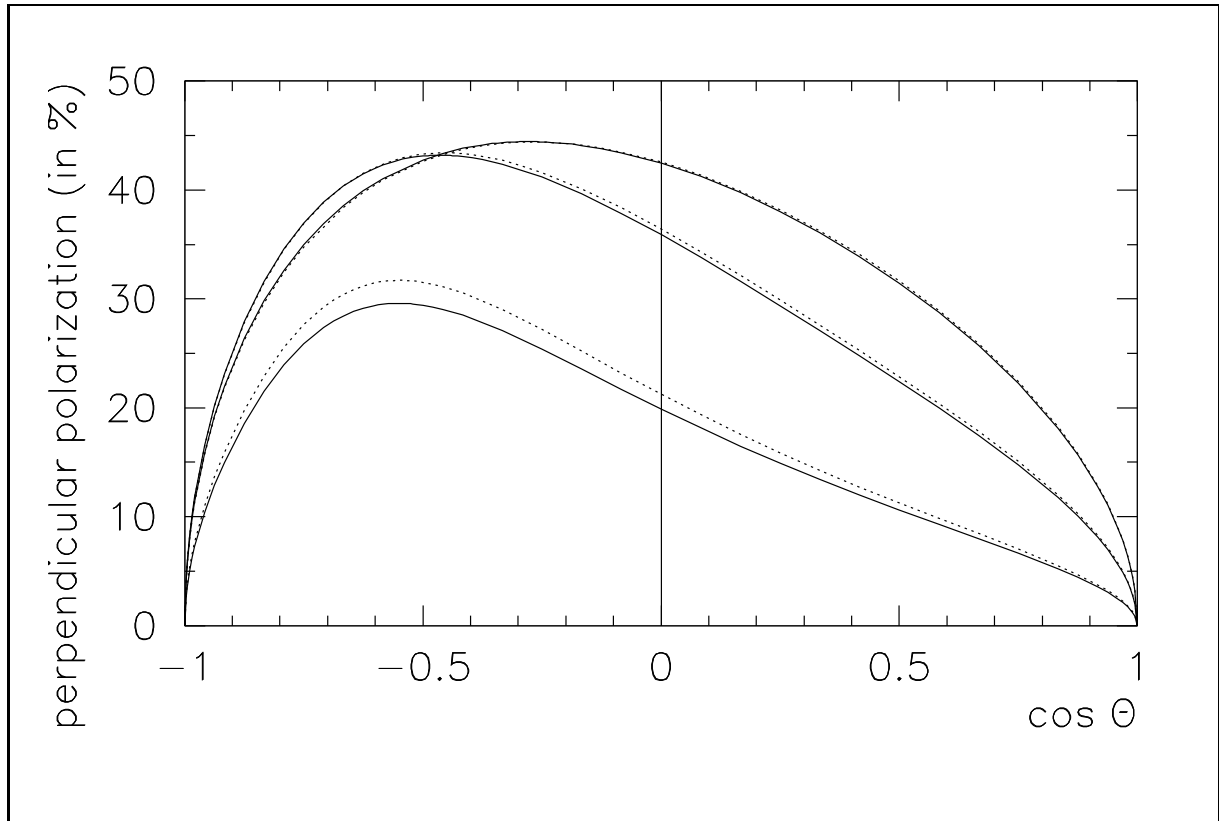


Abbildung 6.3: Winkelabhängigkeit der transversal ebenen Polarisation für das top-Quark, Bornsche Beiträge (punktiert) und Beiträge erster Ordnung (durchgezogene Linien)

herausheben. Dies ist nach den Überlegungen mit den Beiträgen weicher Gluonen, die ja proportional zum Bornschen Term waren, verständlich. Für die transversal normale Polarisation dagegen verschwinden die Bornschen Beiträge fast vollständig gegenüber den Beiträgen erster Ordnung, der Graph der Polarisation verschmilzt mit der Abszisse.

Die Abbildungen 6.4 bis 6.6 sind einheitlich gehalten. Es ist jeweils oben die Winkelabhängigkeit für das top-Quark, unten für das bottom-Quark angegeben. Ferner steht die ...

- durchgezogene Linie für $\sqrt{q^2} = 370 \text{ GeV}$,
- gestrichelte Linie für $\sqrt{q^2} = 500 \text{ GeV}$ und die
- strichpunktierte Linie für $\sqrt{q^2} = 1000 \text{ GeV}$.

Zu erkennen ist in den Abbildungen zum einen eine mehr oder weniger ausgeprägte Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie, die bei der longitudinalen Polarisation für das top-Quark sogar zu einem Vorzeichenwechsel der Polarisation führt, zum anderen die Abnahme der transversalen Polarisation mit steigender Schwerpunktsenergie. Das hängt mit dem Faktor $\sqrt{\xi}$ zusammen, der sich in den hadronischen Komponenten wiederfindet. Interessant ist auch ein Vergleich mit der Polarisation des bottom-Quarks auf der Z^0 -Resonanz. Sie ist in den Abbildungen 6.7 und 6.8 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, daß die longitudinale Polarisation eine wesentlich schwächere Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie aufweist als beim top-Quark in Abbildung 6.4 oben.

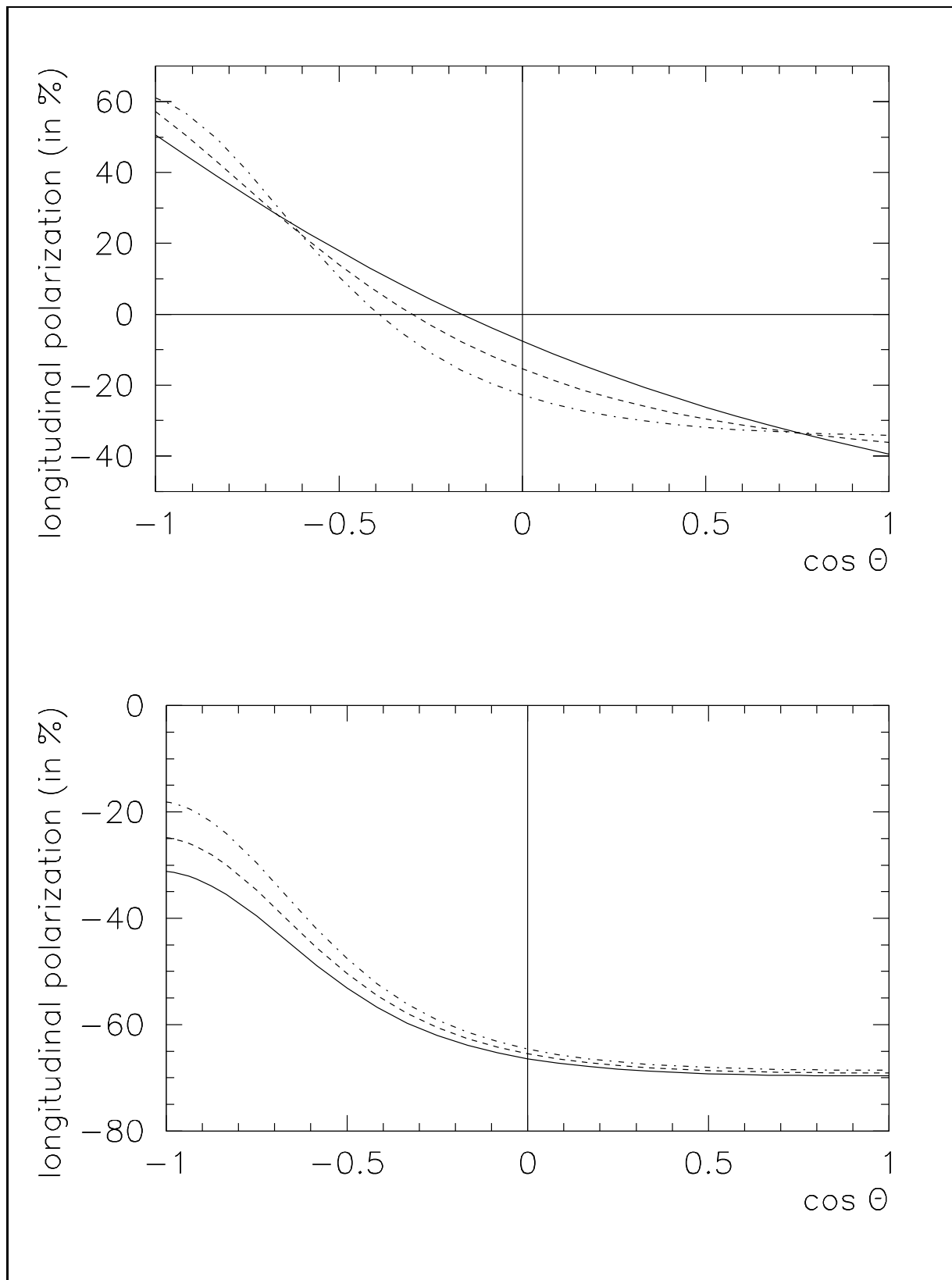


Abbildung 6.4: Winkelabhängigkeit der longitudinalen Polarisation für das top-Quark (oberes Diagramm) und das bottom-Quark (unteres Diagramm)

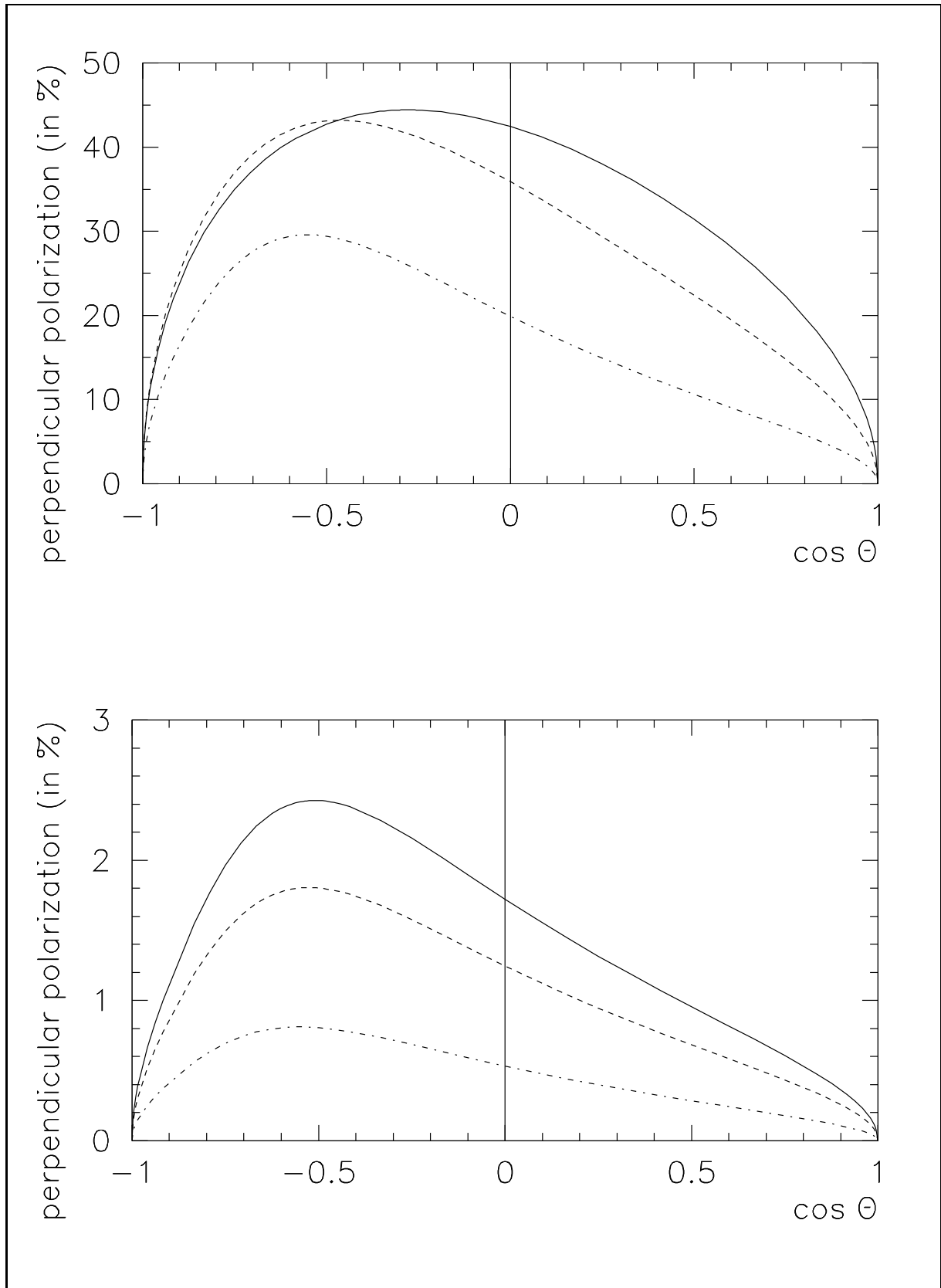


Abbildung 6.5: Winkelabhängigkeit der transversal ebenen Polarisation für das top-Quark (oberes Diagramm) und das bottom-Quark (unteres Diagramm)

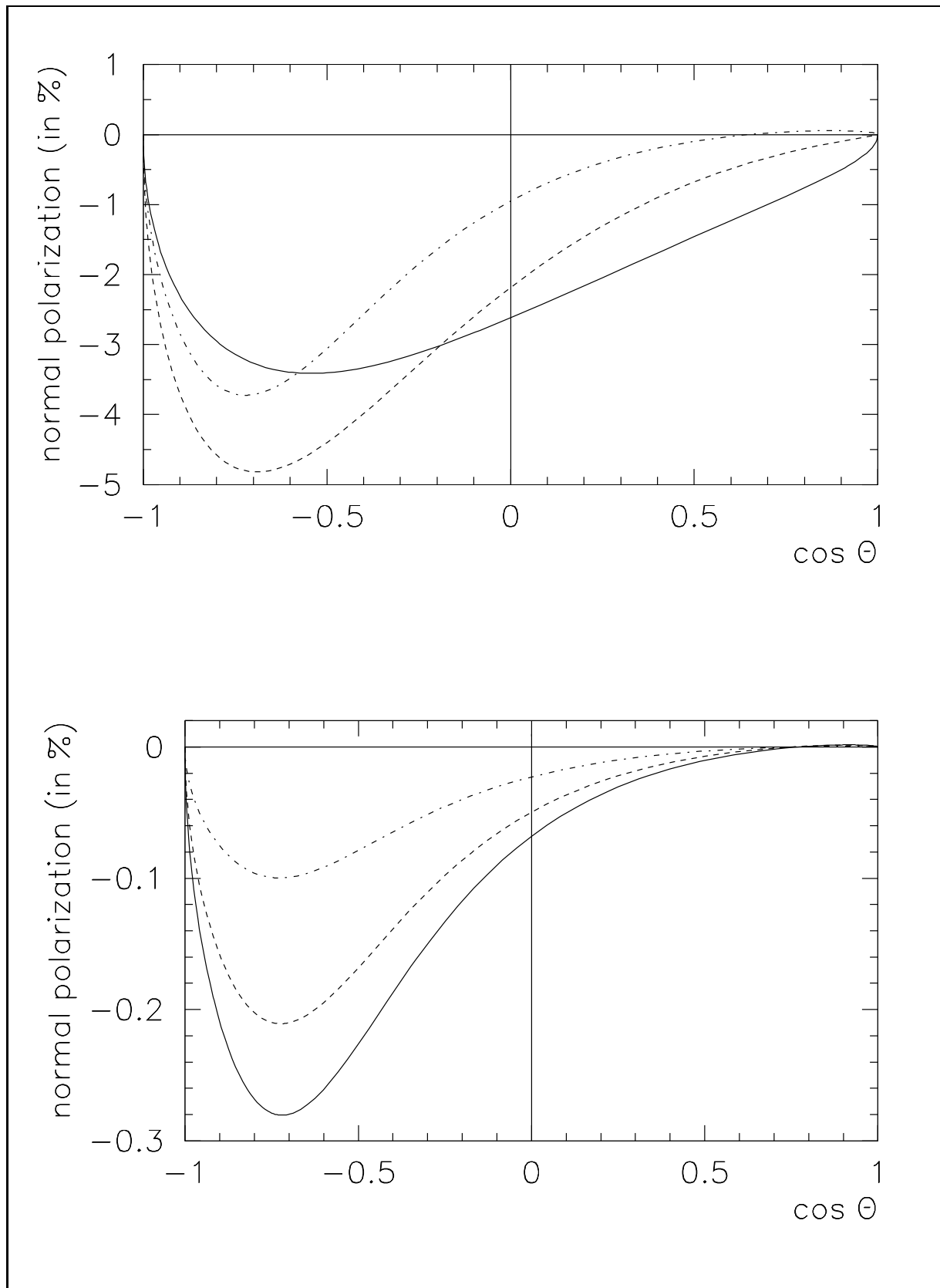


Abbildung 6.6: Winkelabhängigkeit der transversal normalen Polarisation für das top-Quark (oberes Diagramm) und das bottom-Quark (unteres Diagramm)

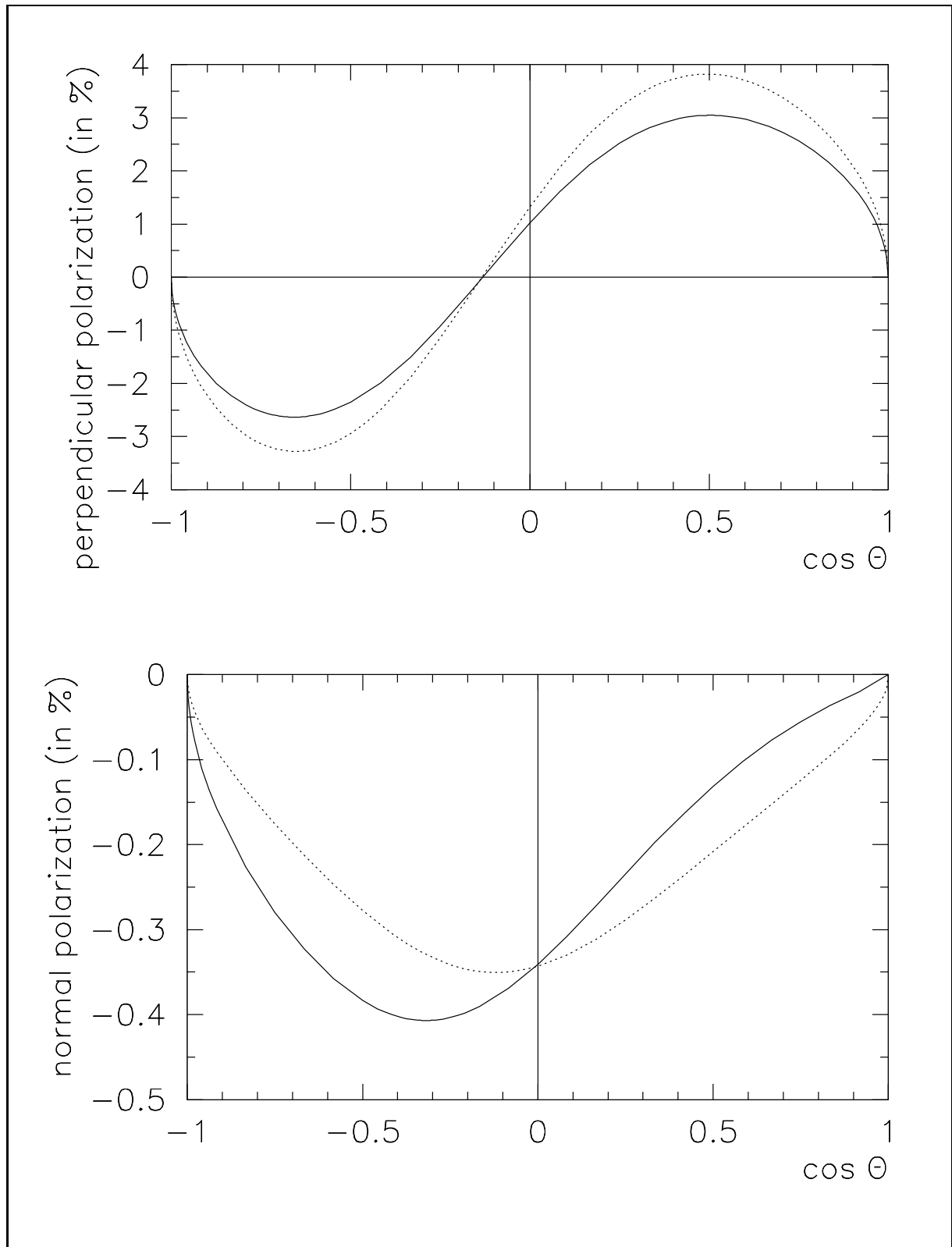


Abbildung 6.7: Winkelabhängigkeit der transversal ebenen Polarisation (oberes Diagramm) und der transversal normalen Polarisation (unteres Diagramm) für das bottom-Quark auf der Z_0 -Resonanz, dargestellt sind Bornsche Beiträge (punktiert) und Beiträge erster Ordnung (durchgezogene Linie)

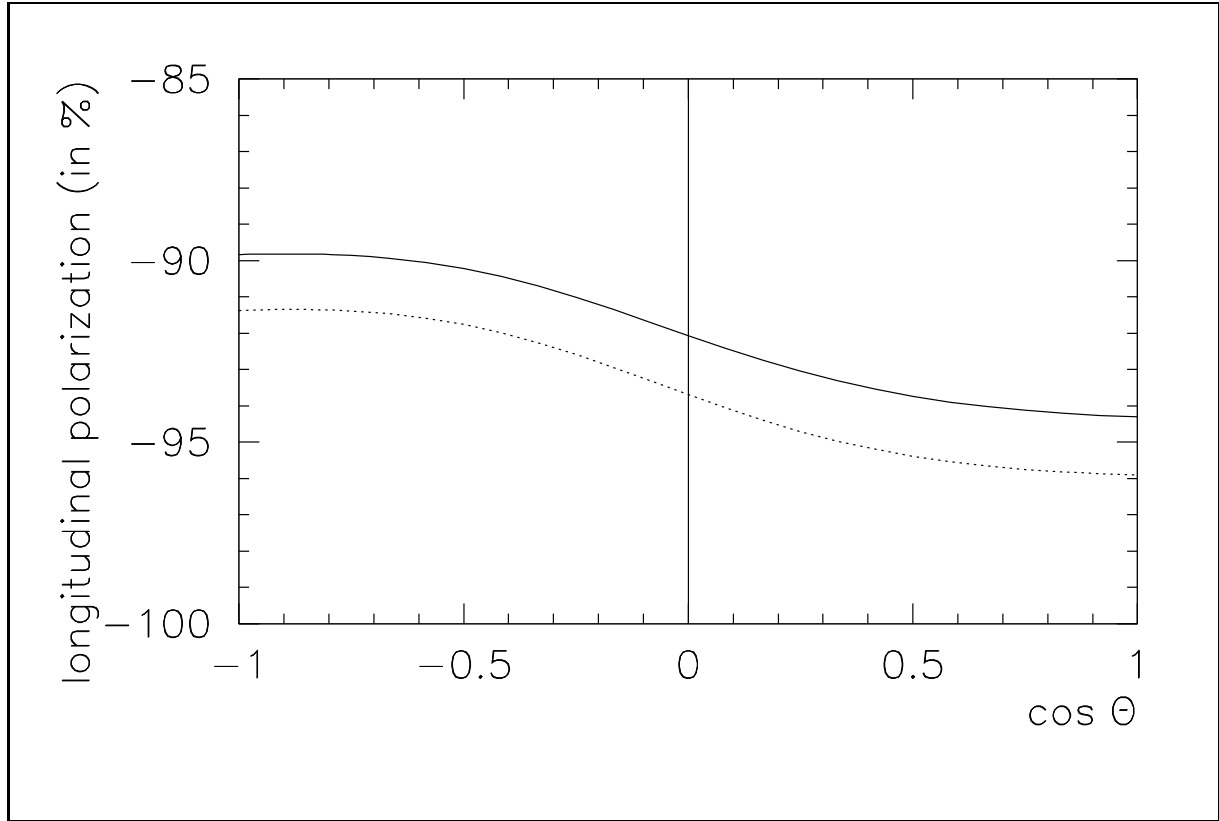


Abbildung 6.8: Winkelabhängigkeit der longitudinalen Polarisation für das bottom-Quark auf der Z_0 -Resonanz, dargestellt sind Bornsche Beiträge (punktiert) und Beiträge erster Ordnung (durchgezogene Linie)

6.3.3 Die Abhängigkeit der Polarisation von der Quarkenergie

Für die Bestimmung der Abhängigkeit der Polarisation von der Energie des Quarks ist lediglich die Integration über den Phasenraumparameter z , also im wesentlichen die Energie des Antiquarks, auszuführen. Die Abhängigkeit von der Energie des Quarks ist dann in dem verbleibenden Parameter y gegeben, denn es ist

$$1 - y = \frac{2p_1 \cdot q}{q^2} = \frac{2E_q}{E_{\text{Boson}}} \quad (6.52)$$

im Ruhesystem des intermediären Bosons. Für $E_q = m_q$, also für $1 - y = \sqrt{\xi}$, zeigt sich in den Kurven ein Schwellenverhalten. Betrachtet werden hier die über den gesamten Winkelbereich gemittelten Polarisationen in ihrer Abhängigkeit von y , erneut für die drei Werte $\sqrt{q^2} = 370 \text{ GeV}$, 500 GeV und 1000 GeV für die Schwerpunktsenergie. Hinzu tritt in diesem Unterabschnitt eine um drei Größenordnungen höhere Energie von 1000 TeV , die den hochenergetischen Grenzfall annähert (punktierte Linien). Betrachtet werden sollen hier lediglich longitudinal polarisierte Quarks als Endzustände. Neben der eigentlichen gemittelten Polarisation

$$P_{U+L}^\ell := \langle P^\ell(\cos \theta) \rangle = \frac{g_{14}\sigma_{U+L}^{A\ell}}{g_{11}\sigma_{U+L}^1 + g_{12}\sigma_{U+L}^2} \quad (6.53)$$

werden auch die zu den Projektionen U , L und F gehörigen *Momente*

$$\begin{aligned}
P_U^\ell &:= \langle (-1 + 5 \cos^2 \theta) P^\ell(\cos \theta) \rangle = \frac{g_{14} \sigma_U^{4\ell}}{g_{11} \sigma_{U+L}^1 + g_{12} \sigma_{U+L}^2}, \\
P_L^\ell &:= \langle (2 - 5 \cos^2 \theta) P^\ell(\cos \theta) \rangle = \frac{g_{14} \sigma_L^{4\ell}}{g_{11} \sigma_{U+L}^1 + g_{12} \sigma_{U+L}^2} \quad \text{und} \\
P_F^\ell &:= \langle 2 \cos \theta P^\ell(\cos \theta) \rangle = \frac{g_{41} \sigma_F^{1\ell} + g_{42} \sigma_F^{2\ell}}{g_{11} \sigma_{U+L}^1 + g_{12} \sigma_{U+L}^2}
\end{aligned} \tag{6.54}$$

zu betrachten sein. Doch sollen zuvor die Werte dieser Polarisierungen an den beiden Phasenraumgrenzen $y = 0$ und $y = 1 - \sqrt{\xi}$ angegeben werden. Für $y \rightarrow 0$ ergibt sich mit

$$\ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) \rightarrow 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \tag{6.55}$$

für die verschiedenen hadronischen Projektionen

$$\begin{aligned}
H_{U+L}^1(y) &\rightarrow 4\pi\alpha_s N_C C_F \left[4 \frac{(4-\xi)(2-\xi)}{y} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - \frac{8(4-\xi)}{y} v \right] = \\
&= \frac{16\pi\alpha_s N_C C_F}{y} (4-\xi) \left[(2-\xi) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - 2v \right] \\
H_{U+L}^2(y) &\rightarrow \frac{48\pi\alpha_s N_C C_F}{y} \xi \left[(2-\xi) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - 2v \right] \\
H_{U+L}^{4\ell}(y) &\rightarrow \frac{64\pi\alpha_s N_C C_F}{y} v \left[(2-\xi) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - 2v \right] \\
H_L^{4\ell}(y) &\rightarrow 0 \\
H_F^{1\ell}(y) &\rightarrow \frac{32\pi\alpha_s N_C C_F}{y} (2-\xi) \left[(2-\xi) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - 2v \right] \\
H_F^{2\ell}(y) &\rightarrow \frac{32\pi\alpha_s N_C C_F}{y} \xi \left[(2-\xi) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - 2v \right].
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist in allen Projektionen gleich, er fällt daher ebenso heraus wie der Faktor zur Umrechnung der hadronischen Projektionen in die Projektionen σ_p^{im} . Es ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
P_{U+L}^\ell(y \rightarrow 0) &= \frac{4v g_{14}}{(4-\xi)g_{11} + 3\xi g_{12}} = P_U^\ell(y \rightarrow 0) \\
P_L^\ell(y \rightarrow 0) &= 0 \\
P_F^\ell(y \rightarrow 0) &= \frac{2(2-\xi)g_{41} + 2\xi g_{42}}{(4-\xi)g_{11} + 3\xi g_{12}}.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Im Grenzfall $y \rightarrow 1 - \sqrt{\xi}$ werden Quark und Antiquark an der Schwelle erzeugt. Auch hier soll der Grenzwert der Polarisation bestimmt werden. Dazu wird y mittels der Formel

$$y = 1 - \sqrt{\xi} \left(1 + \frac{(2 - \sqrt{\xi})^2 \varepsilon^2}{2} \right) \tag{6.58}$$

„von links“ dem Grenzpunkt angenähert (ε ist Entwicklungsparameter, der Faktor vor ε^2 vereinfacht die Berechnung). Zu bestimmen ist zunächst das Verhalten von

$$\ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) = \ln \left(\frac{2 - 2y - \xi + 2\sqrt{(1-y)^2 - \xi}}{2 - 2y - \xi - 2\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \right), \quad (6.59)$$

welches sich mittels

$$\begin{aligned} 2 - 2y - \xi &= 2 - 2 + \sqrt{\xi}(2 + (2 - \sqrt{\xi})^2 \varepsilon^2) - \xi = \\ &= \sqrt{\xi}(2 - (2 - \sqrt{\xi})^2 \varepsilon^2 - \sqrt{\xi}) = \\ &= \sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})(1 + (2 - \sqrt{\xi})\varepsilon^2) \quad \text{und} \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(1-y)^2 - \xi} &= \sqrt{\xi(2 + (2 - \sqrt{\xi})^2 \varepsilon^2)^2 - 4\xi} = \\ &\approx \sqrt{\xi(4 + 4(2 - \sqrt{\xi})^2 \varepsilon^2 - 4)} = \\ &= \sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})2\varepsilon \end{aligned} \quad (6.61)$$

leicht abschätzen läßt zu

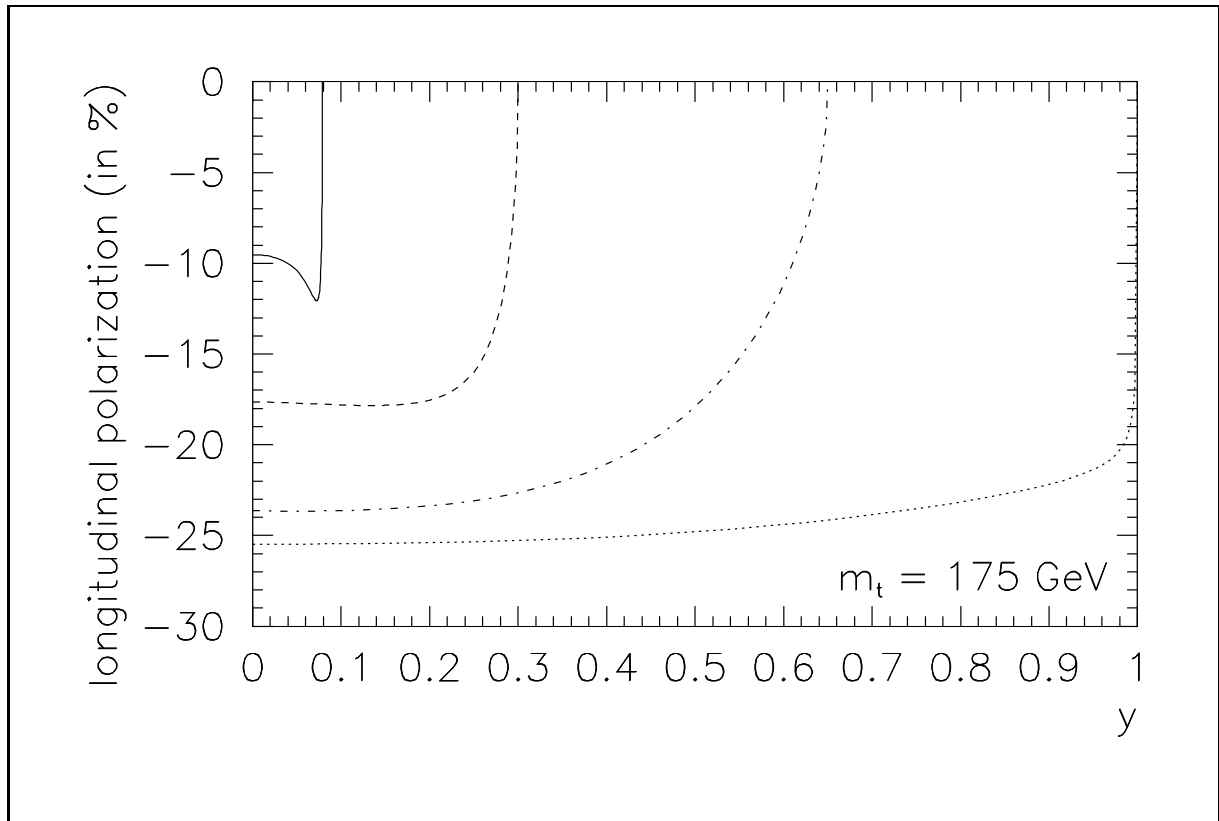
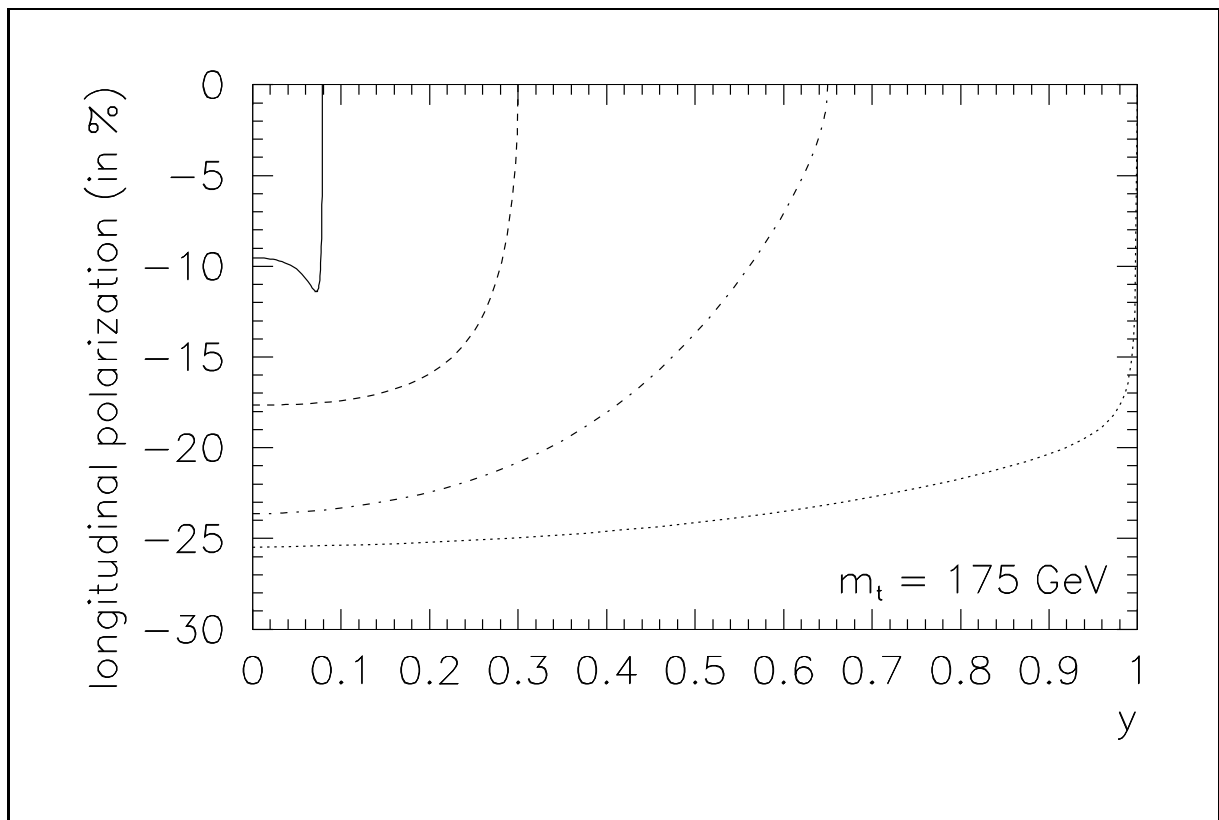
$$\ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) = \ln \left(\frac{1 + 2\varepsilon + (2 - \sqrt{\xi})\varepsilon^2}{1 - 2\varepsilon + (2 - \sqrt{\xi})\varepsilon^2} \right) = \ln \left(\frac{1 + 2\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \right) = \ln(1 + 4\varepsilon) \approx 4\varepsilon. \quad (6.62)$$

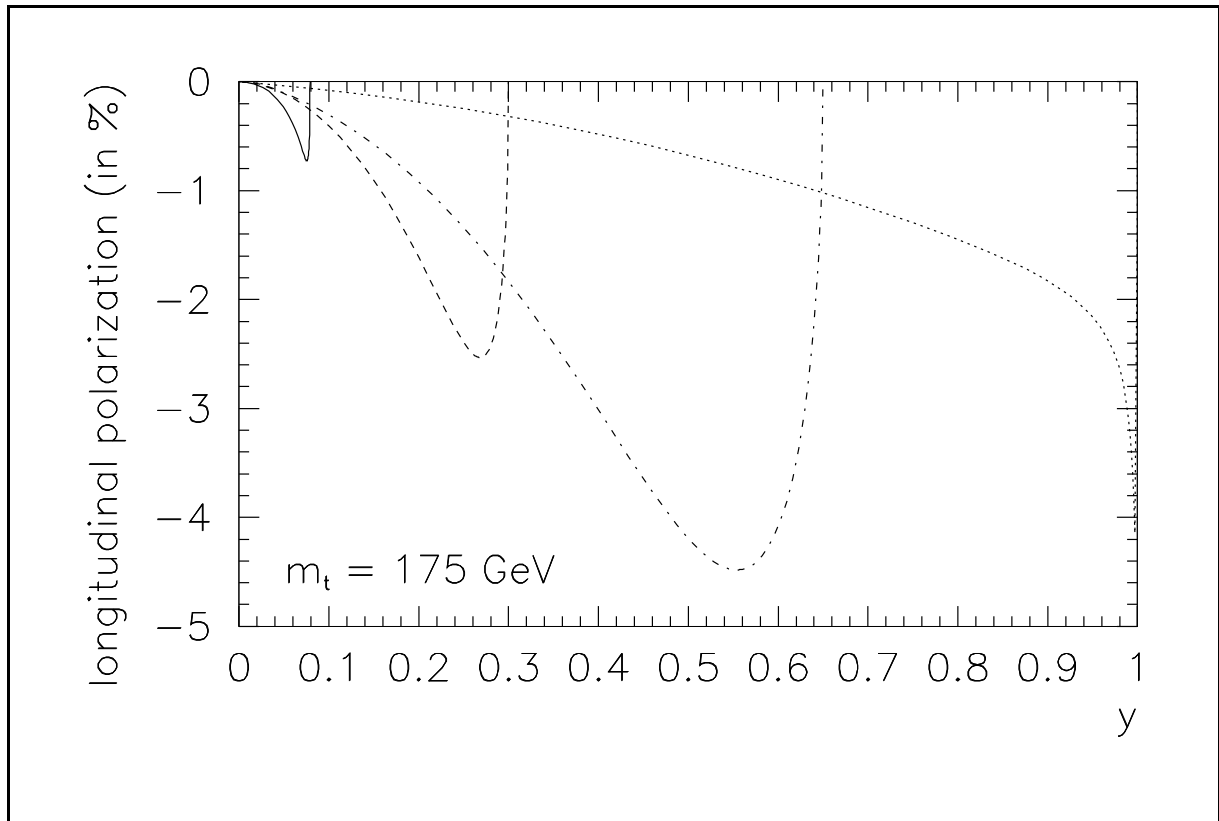
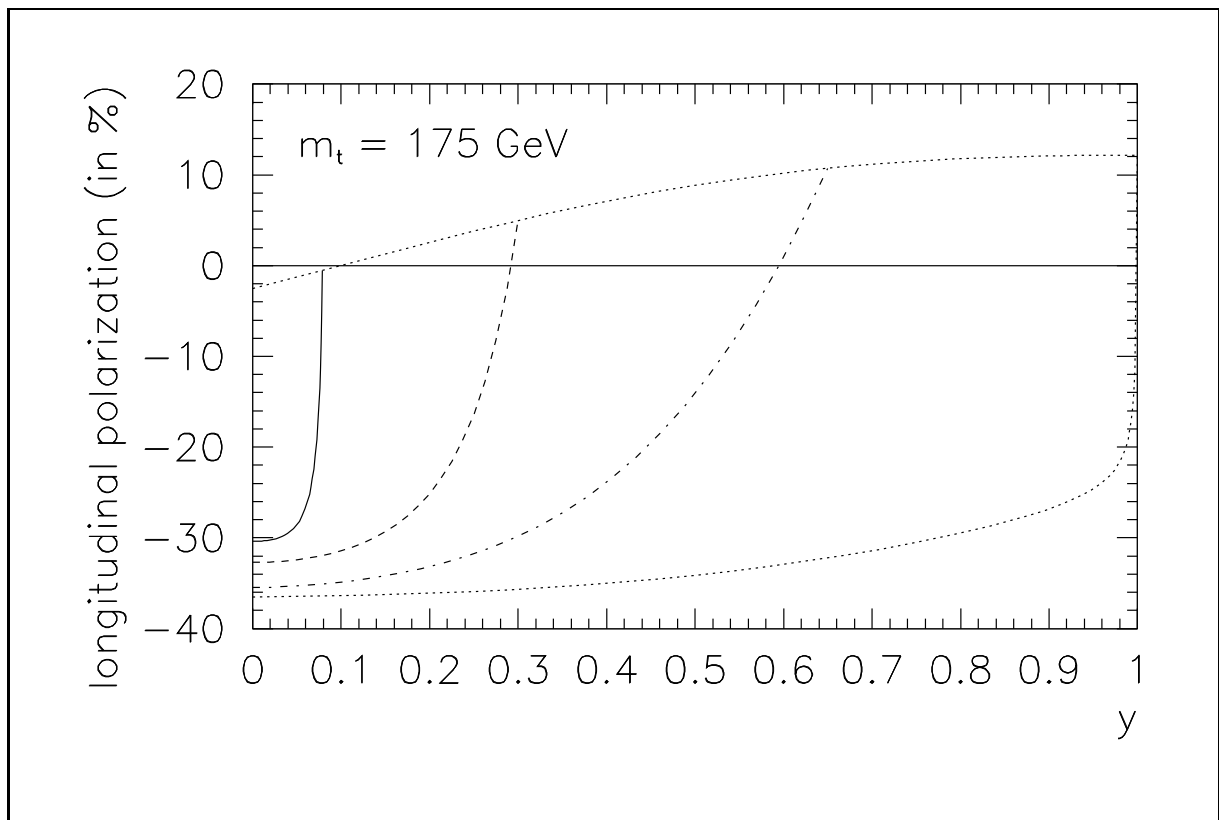
Zur weiteren Rechnung, die ziemlich umfangreich ist und daher hier nicht durchgeführt werden soll, wird bis zur fünften Ordnung in ε entwickelt. Dennoch ergeben sich die überraschend einfachen Ergebnisse

$$\begin{aligned} P_{U+L}^\ell(y \rightarrow 1 - \sqrt{\xi}) &= \frac{4(2 - \xi\sqrt{\xi})g_{14}\varepsilon}{3(1 - \sqrt{\xi})((4 - 4\sqrt{\xi} + 3\xi)g_{11} - \xi g_{12})} \\ P_U^\ell(y \rightarrow 1 - \sqrt{\xi}) &= \frac{4(4 + 2\sqrt{\xi} + 9\xi - 10\xi\sqrt{\xi})g_{14}\varepsilon}{15(1 - \sqrt{\xi})((4 - 4\sqrt{\xi} + 3\xi)g_{11} - \xi g_{12})} \\ P_L^\ell(y \rightarrow 1 - \sqrt{\xi}) &= \frac{4(6 + 4\sqrt{\xi} - 5\xi)g_{14}\varepsilon}{15((4 - 4\sqrt{\xi} + 3\xi)g_{11} - \xi g_{12})} \quad \text{und} \\ P_F^\ell(y \rightarrow 1 - \sqrt{\xi}) &= -\frac{2((2 - 2\sqrt{\xi} - \xi)g_{41} + \xi g_{42})}{3((4 - 4\sqrt{\xi} + 3\xi)g_{11} - \xi g_{12})}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Der Entwicklungsparameter ε wurde beibehalten, um eine auffällige Eigenschaft der Projektion F zu illustrieren. Während die übrigen Polarisationen am Phasenraumrand gegen Null gehen, ist dies für P_F^ℓ durchaus nicht der Fall. Hier ergibt sich ein nichtverschwindender Wert, der über $\sqrt{\xi} = 1 - y$ in eine Abhängigkeit von y gebracht und dargestellt werden kann. In Abbildung 6.12 ist er als punktierte Einhüllende der Kurvenschar nach oben hin zu erkennen.

Die im ersten Teil der Arbeit betrachteten Baum- und Schleifengraphen erster Ordnung enthalten keine Graphen mit Gluonselbstwechselwirkung. Die QCD kann in dieser Störungsordnung daher als eine Modifikation der QED behandelt werden. Das hat zur Konsequenz, daß sich die Ergebnisse auf die radiativen QED-Korrekturen erster Ordnung zur Leptonpolarisation in $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ anwenden lassen [24], für die nach Kenntnisstand des Autors die Rechnungen unter Einbeziehung der Masseneffekte im Ausgangskanal noch nicht veröffentlicht wurden.

Abbildung 6.9: Die Polarisation $P_{U+L}^\ell(y)$ für das top-QuarkAbbildung 6.10: Die Polarisation $P_V^\ell(y)$ für das top-Quark

Abbildung 6.11: Die Polarisation $P_L^l(y)$ für das top-QuarkAbbildung 6.12: Die Polarisation $P_F^l(y)$ für das top-Quark

6.3.4 Die laufende Kopplungskonstante

Die Kopplungskonstante α_s ist wie Masse, Ladung und Wellenfunktion in Kapitel 3 eine Größe, die renormiert werden muß und kann, um die Störungstheorie endlich zu machen. Wie Gell-Mann und Low [25] 1954 feststellten, besitzt die Kopplungskonstante ein Evolutionsverhalten und damit eine Abhängigkeit von der gewählten Schwerpunktsenergie. Bereits hier zeigte sich, daß die Renormierung der verschiedenen Parameter miteinander in Beziehung stehen. Dieses Prinzip wurde 1970 in Form der Callan-Symanzik-Gleichungen [26] formuliert und schließlich im Jahre 1973 von 't Hooft und Weinberg [27] auf beliebige Greensfunktionen verallgemeinert. Die *Renormierungsgruppengleichung* löste die Callan-Symanzik-Gleichungen ab.

In Kapitel 10 wird diese Gleichung hergeleitet. Hier sei nur ihre Form präsentiert und eine Lösung genannt. Die Renormierungsgruppengleichung

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \alpha_s \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + m \gamma_m(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial m} \right) \Gamma(\mu, \alpha_s, m) = 0 \quad (6.64)$$

führt auf Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \bar{\alpha}_s(t) = \bar{\alpha}_s \beta(\bar{\alpha}_s), \quad \frac{d}{dt} \bar{m}(t) = -\bar{m}(1 + \gamma_m(\alpha_s)) \quad (6.65)$$

für *laufende Parameter* mit der zusätzlichen Randbedingung $\bar{\alpha}_s(0) = \alpha_s$ und $\bar{m}(0) = m$. Dabei ist $t = \frac{1}{2} \ln(\mu^2/\Lambda^2)$ die Umparametrisierung der Schwerpunktsenergie $\sqrt{q^2}$ auf einen Abschneideparameter Λ , der von der Art des gewählten Subtraktionsverfahrens abhängig ist. Gewählt werden soll hier das minimale Subtraktionsschema. Die Funktionen β und γ_m lassen sich durch eine Störungsreihe bestimmen, es ergibt sich [28]

$$\beta(\alpha_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \beta_n \quad \text{mit} \quad \beta_1 = -22 + \frac{4}{3} N_f, \quad \beta_2 = -204 + \frac{76}{3} N_f, \quad \dots \quad (6.66)$$

$$\gamma_m(\alpha_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \gamma_n \quad \text{mit} \quad \gamma_1 = 8, \quad \gamma_2 = \frac{404}{3} - \frac{40}{9} N_f, \quad \dots \quad (6.67)$$

wobei N_f die Zahl der Flavours (Aromen) der Quarks angibt, die bei der gewählten Subtraktionsskala μ existieren können. Als Lösungen findet man in erster Ordnung in $\ln t/t$ [29]

$$\bar{\alpha}_s(t) = -\frac{4\pi}{2\beta_1 t} \left(1 + \frac{\beta_2}{2\beta_1^2} \frac{\ln t}{t} \right), \quad \bar{m}(t) = -m \left(\frac{t}{2} \right)^{\gamma_1/\beta_1} \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1^3} \frac{\ln t + 1}{t} + \frac{2\gamma_2}{\beta_1^2 t} \right). \quad (6.68)$$

Die renormierte Theorie ergibt sich dann, indem α_s durch $\bar{\alpha}_s$ und die Subtraktionsskala μ durch die Schwerpunktsenergie $\sqrt{q^2}$ ersetzt wird. In dieser Arbeit wird dies bei α_s für die hochenergetischen Rechnungen getan, wobei $N_f = 6$ und $\Lambda_{\text{MS}} = 226 \text{ MeV}$ gewählt wird. Dieser Wert für Λ_{MS} ergibt sich aus der Anpassung an den Wert $\alpha_s = 0.118$ auf der Z_0 -Resonanz ($\sqrt{q^2} = 91.187 \text{ GeV}$) für $N_f = 5$ aktive Flavours. Da die Renormierung auf der Massenschale durchgeführt wurde, wird dagegen die Masse nicht als mit der Schwerpunktsenergie laufender Parameter angenommen. Gewählt werden hier $m_t = 175 \text{ GeV}$ und $m_b = 4.83 \text{ GeV}$.

6.4 Beiträge erster Ordnung für masselose Quarks

Ein Vergleich der in Abschnitt 6.2 erhaltenen Beiträge erster Ordnung im Grenzfall verschwindender Quarkmasse mit den Beiträgen, die sich im masselosen Fall ergeben, erscheint interessant. Denn es ist durchaus nicht klar, daß die Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte von der Masse im Punkt $m = 0$ stetig sein muß, und es kann gezeigt werden, daß dies tatsächlich nicht der Fall ist. Die Rechnungen im masselosen Fall vereinfachen sich, aber es treten auch neue Probleme wie dasjenige des γ_5 auf. Der Beitrag der virtuellen Quarks wurde bereits in Kapitel 3 vorbereitet, indem dort die entsprechende Vertexkorrektur erster Ordnung (samt der Korrektur für die äußeren Quarklinien) in dimensionaler Regularisierung bestimmt wurde. Der Hadrontensor ergibt sich dann, indem $\tilde{\Gamma}_\mu^V$ aus Gleichung (3.129) bzw. $\tilde{\Gamma}_\mu^A$ aus Gleichung (3.130) in Spuren eingesetzt werden, von denen die einfachste (des unpolarisierten Bornschen Falls) in (1.42) gegeben ist.

Auch für die Baumbeiträge erster Ordnung wird in dimensionaler Regularisierung gerechnet, wobei hier ebenfalls eine Spur in einer Dimension $n \neq 4$ gebildet wird. An dieser Stelle erscheint jedoch eine Subtilität, die in der Literatur als „ γ_5 -Problem“ bekannt ist [30].

6.4.1 Das γ_5 -Problem und seine Lösungsverfahren

Für vier Raumzeitdimensionen bekannt ist die Eigenschaft einer Spur, zyklisch vertauschbar zu sein. So kann man eine Spur auf eine geringere Zahl von Diracmatrizen reduzieren, indem man eine Matrix durch paarweises Vertauschen einmal in der Spur „umlaufen“ läßt. Ebenso ist der Weg, auf dem zwei Diracmatrizen mit kontrahierten Indizes einander zugeführt werden, freigestellt. Nicht so in $n \neq 4$ Dimensionen. Würde man hier diese Regeln wirken lassen, so würde sich einerseits

$$\text{Sp}(\gamma_5 \gamma^\alpha \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = n \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) \quad (6.69)$$

ergeben, andererseits aber

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma_5 \gamma^\alpha \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= -\text{Sp}(\gamma^\alpha \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = \\ &= -2 \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) + \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma^\alpha \gamma_\sigma) = \dots \\ &= -2 \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) + 2 \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma) - 2 \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma) + 2 \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) + \\ &\quad - \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = \dots = (8 - n) \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Dieses Ergebnis würde es verbieten, für die Dimension einen von vier abweichenden Wert anzunehmen. Es gibt jedoch zwei Vorgehensweisen, die versuchen, dieses Problem zu lösen. Das eine Schema stammt von 't Hooft und Veltman [17] auf der einen und Breitenlohner und Maison [31] auf der anderen Seite. Es erlaubt Abweichungen von der in vier Dimensionen bekannten Antivertauschungsrelation $[\gamma_\alpha, \gamma_5]_+ = \gamma_\alpha \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\alpha = 0$ und definiert für einen zwischen 0 und n „gleitenden“ Index α

$$\begin{aligned} \gamma_5 \gamma_\alpha &= -\gamma_\alpha \gamma_5 & \text{für } \alpha \in [0, 4[, \\ \gamma_5 \gamma_\alpha &= \gamma_\alpha \gamma_5 & \text{für } \alpha \in [4, n[. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Unter der Annahme, daß die Indizes μ, ν, ρ und σ nach wie vor nur ganzzahlige Werte annehmen, kann (durch Integration über α) gezeigt werden, daß dies das Problem mit

der Spurbildung löst. Allerdings entstehen aus seiner Anwendung eine ganze Reihe von Anomalien, die äußerst verwirrend sind und nur durch Subtraktionsterme beseitigt werden können. So ergeben sich in [32] beispielsweise nicht die naiven Ward-Identitäten, sondern diese können erst mit Hilfe eines von Hand in die Lagrangedichte eingefügten Zusatzterms reproduziert werden.

In dieser Arbeit soll dagegen auf ein Verfahren zurückgegriffen werden, welches auf Dirk Kreimer [33] zurückgeht. Es verwendet folgende Regeln:

- Es gelten weiterhin die Antivertauschungsregeln $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_+ = 2g_{\alpha\beta}$ und $[\gamma_\alpha, \gamma_5]_+ = 0$.
- Die Spurregeln gelten wie in vier Dimensionen mit denselben Vorfaktoren.
- Für eine ungerade Zahl von γ_5 -Matrizen in der Spur darf deren Zyklizität nicht mehr verwendet werden.
- Tragen verschiedene Diagramme zu einem Prozeß bei, so muß die Spur am selben Vertex, dem *Lesepunkt*, starten. Diese Regel gilt auch für Spuren, die durch quadrierte fermionische Amplituden (wie im Hadrontensor) entstehen.
- In Theorien mit anomalem Axialstrom muß der Lesepunkt auf dem Axialvektorvertex liegen, um die Konvention für erhaltene Ströme zu erfüllen. Sind mehrere Axialvektorvertices vorhanden, so muß die Wahl des Lesepunktes symmetrisiert werden.

Gemäß der ersten Regel wird ein solches γ_5 als „naiv antivertauschendes γ_5 “ bezeichnet. Als Lesepunkt wird hier der Vertex μ gewählt, der sich auf den ersten Index des Hadrontensors bezieht.

6.4.2 Borsche Beiträge

Wie bereits bei der Berechnung des Leptontensors im ersten Kapitel erwähnt, ist im Fall masseloser Quarks der Projektionsoperator $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{\epsilon})$ durch $\frac{1}{2}(1 + h\gamma_5)$ zu ersetzen, wobei $h = \pm 1$ den in jedem Experiment zu messenden Grad der longitudinalen Polarisation des Quarks angibt. Die Komponenten des Hadrontensors schreiben sich dann als

$$\begin{aligned}
 H_{\mu\nu}^{VV}(h) &= \frac{1}{2} N_C \text{Sp}(\gamma_\mu \not{\epsilon}_2 \gamma_\nu (1 + h\gamma_5) \not{\epsilon}_1) \\
 H_{\mu\nu}^{VA}(h) &= \frac{1}{2} N_C \text{Sp}(\gamma_\mu \not{\epsilon}_2 \gamma_\nu \gamma_5 (1 + h\gamma_5) \not{\epsilon}_1) \\
 H_{\mu\nu}^{AV}(h) &= \frac{1}{2} N_C \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_5 \not{\epsilon}_2 \gamma_\nu (1 + h\gamma_5) \not{\epsilon}_1) \\
 H_{\mu\nu}^{AA}(h) &= \frac{1}{2} N_C \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_5 \not{\epsilon}_2 \gamma_\nu \gamma_5 (1 + h\gamma_5) \not{\epsilon}_1).
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

Für die verschiedenen Projektionen ergeben sich

$$\begin{aligned}
 H_U^1(\text{born}) &= H_U^{4\ell}(\text{born}) = 4N_C q^2 \\
 H_L^1(\text{born}) &= H_L^{4\ell}(\text{born}) = 0 \\
 H_F^{1\ell}(\text{born}) &= H_F^4(\text{born}) = 4N_C q^2.
 \end{aligned} \tag{6.73}$$

6.4.3 Beiträge virtueller Gluonen

Wie bereits erwähnt, erhält man diese Beiträge, indem man in den Spuren von (6.72) an einem der freien Indizes $\rho \in \{\mu, \nu\}$ das Element γ_ρ bzw. $\gamma_\rho \gamma_5$ durch

$$\tilde{\Gamma}_\rho^V = \tilde{A} \gamma_\rho \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\Gamma}_\rho^A = \tilde{A} \gamma_\rho \gamma_5 \quad (6.74)$$

ersetzt. Es ergibt sich hier ein genereller Faktor \tilde{A} zum Bornschen Resultat, also

$$\begin{aligned} H_U^1(loop) &= H_U^{4\ell}(loop) = -8C'q^2 \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + 8 \right) \\ H_L^1(loop) &= H_L^{4\ell}(loop) = 0 \\ H_F^{1\ell}(loop) &= H_F^4(loop) = -8C'q^2 \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + 8 \right) \end{aligned} \quad (6.75)$$

mit

$$C' := \frac{\alpha_s}{4\pi} N_C C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)}. \quad (6.76)$$

6.4.4 Beiträge reeller Gluonen

Den schwierigsten und rechenaufwendigsten Anteil bilden erneut die Beiträge reeller Gluonen. Zu berechnen sind die aus Abbildung 4.4 bekannten Kontraktionen der Amplituden zum Hadrontensor. Dabei kommt es zur Kontraktion der Indizes der Diracmatrizen an den Gluonvertizes, und diese Diracmatrizen müssen zusammengebracht werden, um sie (n -dimensional) summieren zu können. Als Beispiel soll $H_{\mu\nu}^{VV,\ell}(12)$ bestimmt werden, also das Diagramm „(12)“, bei dem in die Lücke des ersten Quarks ein γ_5 eingeschoben ist. Es ergibt sich bei Beachtung des Lesepunktes μ

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{VV,\ell}(12) &= 4\pi\alpha_s N_C C_F \text{Sp} \left(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\alpha \frac{1}{-\not{p}_2 - \not{p}_3} \gamma_\nu \gamma_5 \not{p}_1 \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}_1 + \not{p}_3} \right) = \\ &= \frac{-4\pi\alpha_s N_C C_F}{4(p_1 p_3)(p_2 p_3)} \text{Sp}(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\alpha (\not{p}_2 + \not{p}_3) \gamma_\nu \gamma_5 \not{p}_1 \gamma^\alpha (\not{p}_1 + \not{p}_3)) = \\ &= \frac{-\pi\alpha_s N_C C_F}{(p_1 p_3)(p_2 p_3)} \left(2 \text{Sp}(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \gamma_5 \not{p}_1 (\not{p}_2 + \not{p}_3) (\not{p}_1 + \not{p}_3)) + \right. \\ &\quad \left. - 2 \text{Sp}(\gamma_\mu \not{p}_2 (\not{p}_2 + \not{p}_3) \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_\nu (\not{p}_1 + \not{p}_3)) + \right. \\ &\quad \left. - 2 \text{Sp}(\gamma_\mu \not{p}_2 (\not{p}_2 + \not{p}_3) \gamma_\nu \gamma_5 \not{p}_1 (\not{p}_1 + \not{p}_3)) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Sp}(\gamma_\mu \not{p}_2 (\not{p}_2 + \not{p}_3) \gamma_\nu \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_\alpha \gamma^\alpha (\not{p}_1 + \not{p}_3)) \right) = \\ &= \frac{-2\pi\alpha_s N_C C_F}{(p_1 p_3)(p_2 p_3)} \left(\text{Sp}(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \gamma_5 \not{p}_1 (\not{p}_2 + \not{p}_3) (\not{p}_1 + \not{p}_3)) + \right. \\ &\quad \left. - \text{Sp}(\gamma_\mu \not{p}_2 \not{p}_3 \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_\nu (\not{p}_1 + \not{p}_3)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(n-2) \text{Sp}(\gamma_\mu \not{p}_2 \not{p}_3 \gamma_\nu \gamma_5 \not{p}_1 \not{p}_3) \right). \end{aligned} \quad (6.77)$$

Die Berechnung dieses Beitrags wie auch jedes anderen kann in einen Anteil zerlegt werden, der das letzte Ergebnis für $n = 4$ liefert und einen Korrekturterm. Dieser besteht lediglich in der letzten Spur, und sein Vorfaktor ist $n - 4 = -2\varepsilon$. Diese Spur ergibt sich aus

der ursprünglichen einfach dadurch, daß die beiden zu kontrahierenden Matrizen fortgelassen werden, aber das Vorzeichen so gewählt wird, als wären sie durchgetauscht worden. Es ergibt sich allgemein folgendes Vorgehen:

- Bei mehr als einer γ_5 -Matrix in der Spur müssen diese unter Vermeidung des Lesepunktes zusammengezogen und eliminiert werden. Bei ungerader Anzahl von γ_5 -Matrizen bleibt eine übrig.
- Zur Bestimmung des Korrekturterms müssen die zu kontrahierenden Diracmatrizen der Quark-Gluon-Vertizes „wirkungslos“ zusammengezogen und eliminiert werden. Wiederum wird dabei der Lesepunkt vermieden.
- Der Korrekturterm wird mit einem Faktor -2ε zum Resultat in vier Dimensionen addiert.

Diese Vorschriften liefern einen klaren Algorithmus, der sich programmieren läßt und für die Projektionen die Ergebnisse

$$\begin{aligned}
H_{U+L}^1(y, z) &= H_{U+L}^{4\ell}(y, z) = \frac{32\pi\alpha_s N_C C_F}{yz} \left(2 - 2y + y^2 - 2z + z^2 - \varepsilon(y+z)^2 \right) \\
H_L^1(y, z) &= H_L^{4\ell}(y, z) = \frac{64\pi\alpha_s N_C C_F}{(1-y)^2} \left(1 - y - z - \varepsilon(1-y-z) \right) \\
H_F^{1\ell}(y, z) &= H_F^4(y, z) = \frac{32\pi\alpha_s N_C C_F}{(1-y)yz} \left(2 - 4y + 3y^2 - y^3 - 2z + z^2 + yz^2 + \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon(y^2 - y^3 - 2y^2z + z^2 - yz^2) \right)
\end{aligned} \tag{6.78}$$

liefert. Diese müssen nun noch über den relativen Phasenraumfaktor (6.7) integriert werden. Die Phasenraumgrenzen sind gegenüber (5.10) stark vereinfacht zu

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 - y. \tag{6.79}$$

Die H_L -Komponenten lassen sich leicht integrieren. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
H_L^1(tree) &= H_L^{4\ell}(tree) = \frac{4\alpha_s N_C C_F q^2}{\pi} (1 - \varepsilon) \int_0^1 \int_0^{1-y} \frac{1-y-z}{(1-y)^2} dz dy = \\
&= \frac{4\alpha_s N_C C_F q^2}{\pi} (1 - \varepsilon) \int_0^1 \int_0^{1-y} \left(\frac{1}{1-y} - \frac{z}{(1-y)^2} \right) dz dy = \\
&= \frac{4\alpha_s N_C C_F q^2}{\pi} (1 - \varepsilon) \int_0^1 \left(\frac{1-y}{1-y} - \frac{1-y}{2(1-y)} \right) dy = \\
&= \frac{2\alpha_s N_C C_F q^2}{\pi} (1 - \varepsilon) \approx \frac{2\alpha_s N_C C_F q^2}{\pi}.
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Bei den anderen Projektionen ergeben sich Pole, hier muß regularisiert werden.

6.4.5 Beiträge erster Ordnung

Zur Regularisierung hat Muta [34] ein geeignetes Integrationsmaß angegeben, welches das Phasenraummaß (6.7) ersetzt,

$$d\tilde{P}S_{32} = \frac{q^2}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\varepsilon \frac{(yz(1-y-z))^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} dy dz, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 - y. \tag{6.81}$$

Die Beschränkung des Phasenraumparameters z durch $(1-y)$ legt es nahe, statt z einen neuen Parameter ν zu verwenden, $z = \nu(1-y)$. Dann entkoppeln die Integrationen, es ergibt sich

$$d\tilde{P}S_{32} = \frac{q^2}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\varepsilon \frac{y^{-\varepsilon}(1-y)^{1-2\varepsilon}\nu^{-\varepsilon}(1-\nu)^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} dy d\nu, \quad 0 \leq y, \nu \leq 1. \quad (6.82)$$

Dies löst aber das Integrationsproblem auf elegante Weise, denn die Integrale lassen sich schreiben als Eulersche Betafunktionen, wie sie in Gleichung (3.8) eingeführt wurden. Die auftretenden Eulerschen Gammafunktionen lassen sich mittels der Rekursionsformel $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ und ihrer Umkehrung auf Terme der Form $\Gamma(1+k\varepsilon)$ bringen, wobei sich für $x = k\varepsilon$, $x = -1+k\varepsilon, \dots$ Pole in ε ergeben. Die Integration liefert so

$$\begin{aligned} H_U^1(tree) &= H_U^{4\ell}(tree) = 8Cq^2 \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + \frac{17}{2} \right) \\ H_L^1(tree) &= H_L^{4\ell}(tree) = 8Cq^2 \\ H_F^{1\ell}(tree) &= H_F^4(tree) = 8Cq^2 \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + 8 \right) \end{aligned} \quad (6.83)$$

mit

$$C := \frac{\alpha_s}{4\pi} N_C C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)^2}{\Gamma(1-3\varepsilon)}. \quad (6.84)$$

Bei der Addition von Schleifen- und Baumbeiträgen müssen die Faktoren C und C' bis zur Ordnung $O(\varepsilon^2)$ zueinander in Beziehung gesetzt werden. Unter Beachtung der Entwicklungen

$$\begin{aligned} x^\varepsilon &= 1 + \varepsilon \ln x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \ln^2 x + O(\varepsilon^3), \\ (-x)^\varepsilon &= 1 + \varepsilon \ln x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 (\ln^2 x - \pi^2) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (6.85)$$

erhält man

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon = \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2}\pi^2\varepsilon^2 \right) + O(\varepsilon^3). \quad (6.86)$$

Auf der anderen Seite ist aber

$$\frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon^2)^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)^2}{\Gamma(1-3\varepsilon)} \left(1 + \frac{1}{2}\pi^2\varepsilon^2 \right) + O(\varepsilon^3) \quad (6.87)$$

und damit schließlich $C' = C + O(\varepsilon^3)$. So ergibt sich im masselosen Fall

$$\begin{aligned} H_U^1(\alpha_s) &= H_U^{4\ell}(\alpha_s) = 4Cq^2 \\ H_L^1(\alpha_s) &= H_L^{4\ell}(\alpha_s) = 8Cq^2 \\ H_F^{1\ell}(\alpha_s) &= H_F^4(\alpha_s) = 0. \end{aligned} \quad (6.88)$$

6.4.6 Der Grenzfall verschwindender Quarkmasse

Das soeben erhaltene Ergebnis ist mit dem Ergebnis für massive Quarks im Grenzfall verschwindender Quarkmasse zu vergleichen. Dazu ist zunächst eine Berechnung der Grenzwerte der verschiedenen Zerfallsratenterme aus Anhang B.5 vonnöten. Es ist für $\xi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} w &\rightarrow 1, & v &\rightarrow 1, & a, b &\rightarrow 2, \\ 1-w &\rightarrow \sqrt{\xi}, & 1-v &\rightarrow \frac{1}{2}\xi, & b-aw &\rightarrow \frac{1}{2}\xi\sqrt{\xi}, \\ 1+w &\rightarrow 2, & 1+v &\rightarrow 2, & b+aw &\rightarrow 4. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Ferner gilt für die Dilogarithmusfunktion

$$\begin{aligned} \text{Li}_2(0) &= 0, & \text{Li}_2(1) &= \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, & \text{Li}_2(-1) &= -\frac{\pi^2}{12}, \\ \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2(2), \\ \text{Li}_2(x) &\rightarrow -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2(-x) && \text{für } x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Diese Aussagen lassen sich aus den Gleichungen (3.75) und (3.76) erhalten, wenn die Werte der Dilogarithmusfunktion für $x = 0$ und $x = 1$ gegeben sind. Es ergibt sich nun für $\xi \rightarrow 0$

$$t_1 \rightarrow \ln\left(\frac{\xi\sqrt{\xi}}{2}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{\xi}{4}\right) + 2\ln(2),$$

$$t_2 \rightarrow \ln(2\sqrt{\xi}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi}{4}\right), \quad \text{also } t_1 - t_2 = \ln\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (6.91)$$

$$t_3 \rightarrow \ln\left(\frac{4}{\xi}\right) = -\ln\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (6.92)$$

$$t_4 \rightarrow 2\text{Li}_2(1) - 2\text{Li}_2(-1) = \frac{\pi^2}{2} \quad (6.93)$$

$$t_5 \rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)\ln\left(\frac{\xi}{4}\right) + \text{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (6.94)$$

$$\begin{aligned} t_6 &\rightarrow \ln^2(2) + \ln^2(\sqrt{\xi}) + \ln\left(\frac{1}{4}\right)\ln(2\sqrt{\xi}) + 3\text{Li}_2(1) - 4\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \ln^2(2) + \left(\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)\right)^2 - 2\ln(2)\left(2\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)\right) + \\ &\quad + 3\text{Li}_2(1) - 4\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) \end{aligned} \quad (6.95)$$

$$\begin{aligned} t_7 &\rightarrow \ln\left(\frac{1}{2\xi}\right)\ln\left(\frac{4}{\xi}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{8}{\xi^2}\right) - \frac{1}{2}\text{Li}_2\left(-\frac{16}{\xi^2}\right) + \\ &\quad + \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2\left(-\frac{2}{\sqrt{\xi}}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\text{Li}_2\left(-\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right) + \\ &\quad + \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2\left(-\frac{8}{\xi\sqrt{\xi}}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\text{Li}_2\left(-\frac{4}{\xi\sqrt{\xi}}\right) = \dots \\ &= -\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) \end{aligned} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned}
t_8 &\rightarrow \ln\left(\frac{\xi}{4}\right) \ln\left(\frac{4}{\xi}\right) + \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2\left(-\frac{4}{\xi}\right) - \pi^2 = \\
&= -\ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) + \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) - \pi^2 = -\frac{2\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (6.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_9 &\rightarrow 2 \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\xi}}\right) \ln\left(\frac{4}{\xi}\right) + 2(\text{Li}_2(1) - \text{Li}_2(0)) + 3\left(\text{Li}_2\left(-\frac{4}{\xi}\right) - \text{Li}_2(1)\right) = \dots \\
&= -\frac{2\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right), \quad \text{also } t_8 - t_9 \rightarrow 0 \quad (6.98)
\end{aligned}$$

$$t_{10} \rightarrow t_{11} \rightarrow t_{12} \rightarrow -\ln\left(\frac{\xi}{4}\right). \quad (6.99)$$

Durch Einsetzen in die unpolarisierten Beiträge aus den Gleichungen (6.17) bis (6.22) bzw. in die longitudinal polarisierten Beiträge aus den Gleichungen (6.27) bis (6.31) ergibt sich für $\xi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
H_U^1(\alpha_s) &\rightarrow 4 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \\
H_L^1(\alpha_s) &\rightarrow 8 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \quad (6.100) \\
H_F^4(\alpha_s) &\rightarrow 0
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
H_U^{4\ell}(\alpha_s) &\rightarrow -4 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \\
H_L^{4\ell}(\alpha_s) &\rightarrow 8 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \quad (6.101) \\
H_F^{1\ell}(\alpha_s) &\rightarrow -8 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Während die unpolarisierten Beiträge mit dem masselosen Fall übereinstimmen, ergeben sich für $H_U^{4\ell}$ und $H_F^{1\ell}$ anomale Terme

$$\Delta H_U^{4\ell}(\alpha_s) = \Delta H_F^{1\ell}(\alpha_s) = -8 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi}. \quad (6.102)$$

Sie werden als *anomale Spinsprung-Terme* (engl.: anomalous spin-flip terms) bezeichnet [5, 21, 22, 35, 36, 37] und sind eng mit der kollinearen Singularität für verschwindende Quarkmassen verknüpft. Diese kollinearen Singularitäten treten im Phasenraumdiagramm in Abbildung 4.5 auf dem Rand des schraffierten Gebietes auf.

Kapitel 7

Eine effektive Theorie schwerer Quarks

7.1 Einführung in die HQET

Die *Effektive Theorie schwerer Quarks* (HQET, *Heavy Quark Effective Theory* [38]) beschreibt die Physik von Hadronen, deren Impuls zum größten Teil von einem der Quarks getragen wird. Dieser Fall tritt offensichtlich dann auf, wenn dieses Quark eine große Masse besitzt. Beispiele sind die D - und B -Mesonen, aber auch die Substituten Λ_c und Λ_b des Λ -Baryons, in denen eines der leichten Quarks (u , d oder s) durch c bzw. b ersetzt ist. (Ein Λ_t existiert nicht, da die Lebensdauer des t -Quarks so begrenzt ist, daß sich kein baryonischer Zustand ausbilden kann.) Die HQET ist in ihren Grundzügen eine Entwicklung in Potenzen der inversen Masse des schweren Quarks. Ausgehend von der Lagrangedichte der QCD,

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{Q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_Q)Q + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (7.1)$$

mit kovarianter Ableitung $D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu = \partial_\mu - ig_s T^a A_\mu^a$ und Feldstärke $G_{\mu\nu}^a$ wird durch den Ansatz

$$Q(x) =: e^{-im_Q v \cdot x} Q_v(x) \quad (7.2)$$

der an die Masse gekoppelte, schnell veränderliche Anteil des Quarkfeldes abgetrennt. Setzt man für den Viererimpuls des Quarks $q = m_Q v + p$ an, wobei $p^2 \ll m_Q^2$ und v der Vierervektor der Geschwindigkeit des Hadrons mit $v^2 = 1$ ist, so ergibt sich

$$i\partial_\mu Q_v(x) = i\partial_\mu (e^{im_Q v \cdot x} Q(x)) = (q_\mu - m_Q v_\mu) Q_v(x) = p_\mu Q_v(x), \quad (7.3)$$

p ist also der Viererimpuls des effektiven Feldes Q_v . Liegt das Quark genau auf der Massenschale, $\not{q}Q = m_Q Q$, so gilt

$$P_- Q_v = 0, \quad P_+ Q_v = Q_v \quad \text{mit} \quad P_\pm := \frac{1}{2}(1 \pm \not{v}). \quad (7.4)$$

Sinnvoll ist es, hier die Diracsche Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

zu wählen. Dann nämlich projiziert P_+ im Ruhesystem des Hadrons, also für die Vierergeschwindigkeit $v = (1; 0, 0, 0)$, die oberen beiden Komponenten des Spinors Q_v heraus.

Nur diese beiden Komponenten verschwinden für den Fall eines schweren Quarks auf der Massenschale nicht. Bei kleiner Abweichung von dieser Bedingung kann Q_v zerlegt werden in eine *große Komponente* Q_v^+ und eine *kleine Komponente* Q_v^- ,

$$Q_v = Q_v^+ + Q_v^- \quad \text{mit} \quad Q_v^\pm := P_\pm Q_v = \frac{1}{2}(1 \pm \not{v})Q_v. \quad (7.6)$$

Die sich aus der Lagrangedichte ergebende Bewegungsgleichung $(i\not{D} - m_Q)Q = 0$ liefert $(i\not{D} - m_Q(1 - \psi))(Q_v^+ + Q_v^-) = 0$ und ermöglicht so eine Ersetzung von Q_v^- in der Lagrangedichte. Die Entwicklung

$$Q_v^- = \left(1 - \frac{i\not{D}}{2m_Q}\right)^{-1} \frac{i\not{D}}{2m_Q} Q_v^+ = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i\not{D}}{2m_Q}\right)^i Q_v^+ \quad (7.7)$$

ist möglich, denn es ist $i\not{D}Q_v^+ = \not{v}Q_v^+ \ll 2m_Q Q_v^+$. So ergibt sich für den ersten Term der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_v = (Q_v^+)^\dagger (iv \cdot D) Q_v^+ + \frac{1}{m_Q} (Q_v^+)^\dagger ((iD)^2 + (v \cdot D)^2 - \frac{g_s}{2} \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) Q_v^+ + \dots \quad (7.8)$$

Obwohl diese Reihenentwicklung in der Literatur gebräuchlich ist, zeigt es sich, daß ab der Ordnung $1/m_Q^2$ eine massenunabhängige Normierung der effektiven Quarkfelder nicht mehr möglich ist. In Mainz wurde eine HQET des Foldy-Wouthuysen-Typs entwickelt, welche diesen Defekt nicht besitzt [39]. Für diese Arbeit reicht die Beschränkung auf die führende Ordnung in der Entwicklung in $1/m_Q$. Diese wird als *Symmetrie schwerer Quarks* (HQS, Heavy Quark Symmetry [40]) bezeichnet. Wird das effektive Feld Q_v^+ wieder in Q umbenannt und die Masse des leichten Quarks vernachlässigt, so ergibt sich schließlich

$$\mathcal{L}_{\text{HQS}} = Q^\dagger (iv \cdot D) Q + \bar{q} (i\not{D}) q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2a} (\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (7.9)$$

Es wurde hier noch ein Eichterm hinzugefügt, der später von Bedeutung sein wird. a ist der Eichparameter, für $a = 1$ spricht man von der *Feynman-Eichung*.

7.2 Die Feynmanregeln der HQS

Die Feynmanregeln der HQS lassen sich im Prinzip aus der Lagrangedichte (7.9) herleiten. Hier jedoch sollen sie, dem Artikel von Grinstein [41] folgend, aus den Feynmanregeln für die QCD abgeleitet werden. Änderungen treten beim Propagator und beim Vertex auf.

7.2.1 Der Propagator für schwere Quarks

Aus dem Propagator der QCD ergibt sich mit $q^\mu = m_Q v^\mu + p^\mu$, $p^2 \ll m_Q^2$,

$$\frac{i}{\not{q} - m_Q} = i \frac{\not{q} + m_Q}{q^2 - m_Q^2} \approx i \frac{\not{v} m_Q + m_Q}{2(p \cdot v) m_Q} = \frac{1 + \psi}{2} \frac{i}{p \cdot v} =: \frac{1 + \psi}{2} \frac{i}{\omega}. \quad (7.10)$$

(p wird als *Restimpuls* bezeichnet). Bezeichnend ist das Auftreten des Projektors P_+ . Tritt zum Viererimpuls q ein weiterer Impuls k hinzu, so ergibt sich

$$\frac{i}{\not{q} + \not{k} - m_Q} = i \frac{\not{q} + \not{k} + m_Q}{(q + k)^2 - m_Q^2} \approx i \frac{\not{v} m_Q + m_Q}{2\omega m_Q + 2k \cdot v m_Q} = \frac{1 + \psi}{2} \frac{i}{\omega + k \cdot v}. \quad (7.11)$$

Hierbei wurde die Näherung $k^2 \ll m_Q^2$ verwendet. Dies ist für innere, also Schleifenimpulse k nicht immer gegeben. In [41] konnte aber gezeigt werden, daß Schleifenintegrale von niedrigen Impulsen dominiert werden.

7.2.2 Der Vertex an eine schwere Quarklinie

Ein Vertex, der zwischen einem äußeren Bein und einer inneren Linie oder aber zwischen zwei inneren Linien schwerer Quarks liegt, kommt stets zwischen zwei Projektoren P_+ zu liegen. Es ist aber

$$P_+ \gamma_\mu P_+ = \frac{1 + \not{v}}{2} \gamma_\mu \frac{1 + \not{v}}{2} = v_\mu \frac{1 + \not{v}}{2} = v_\mu P_+, \quad (7.12)$$

der Vertex $-ig_s T^a \gamma_\mu$ der QCD wird also ersetzt durch

$$-ig_s T^a v_\mu. \quad (7.13)$$

7.2.3 Zusammenfassung

Jede Linie eines schweren Quarks bekommt insgesamt einen Diracfaktor $P_+ = (1 + \not{v})/2$ zugewiesen. Dann ist der Rest der Linie jedoch frei von Diracschen Gammamatrizen. Zu setzen ist lediglich

Ein Propagator	$\frac{i}{\omega + k \cdot v}$	für jede innere schwere Quarklinie mit Impuls k und
ein Faktor	$-ig_s T^a v_\mu$	für jeden Vertex an eine solche Linie.

7.2.4 Feynmanregeln für Dreigluonvertex und Geisterfelder

Einige QCD-Feynmanregeln, die in Kapitel 1 noch fehlten, seien hier angeführt, da sie im Folgenden gebraucht werden. Es handelt sich dabei zunächst um die Regel für den Vertex dreier Gluonlinien. Für drei Gluonlinien mit auslaufenden Viererimpulsen k_i , Lorentzindizes μ_i und Farbindices a_i ergibt sich gemäß [42] ein Faktor

$$g_s f_{a_1 a_2 a_3} ((k_1 - k_2)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} + (k_2 - k_3)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + (k_3 - k_1)_{\mu_2} g_{\mu_3 \mu_1}). \quad (7.14)$$

Der Propagator eines Geisterfeldes mit Viererimpuls k ist gegeben durch $-i/k^2$. Im Gegensatz zu einer Gluonlinie wird einer Geisterlinie eine bestimmte Richtung zugeordnet. An einem Vertex mit einem Gluon, das den Lorentzindex μ und den Farbindex a trage, gibt es also stets eine ein- und eine auslaufende Geisterlinie. Besitzt die auslaufende Geisterlinie den Viererimpuls k und den Farbindex b , die einlaufende Geisterlinie den Farbindex c , so wird dieser Vertex beschrieben durch den Faktor

$$g_s f_{abc} k_\mu. \quad (7.15)$$

Für jede geschlossene Fermion- oder Geisterschleife ergibt sich ein Faktor (-1) , für jede geschlossene Gluonschleife ein Faktor $1/2$, und über jede Schleife wird die Spur sowohl bezüglich der Flavour-, Farb- als auch der Diracstruktur genommen. Die Fermion- und Geisterlinien sollen im Gegensatz zur bisherigen Konvention in Pfeilrichtung durchlaufen werden. Dies ist eine Konvention, die aber nichts am Endergebnis ändert.

7.3 Mesonische und Baryonische Ströme

Der Begriff des Stromes tauchte bereits in Kapitel 1 auf. Dort waren es der Vektor- und der Axialvektorstrom,

$$j_\mu^V = \bar{\psi}(-ie\gamma_\mu)\psi \quad \text{und} \quad j_\mu^A = \bar{\psi}(-ie\gamma_\mu\gamma_5)\psi. \quad (7.16)$$

Auch ein Meson kann als ein Strom beschrieben werden, der das Quark mit dem Antiquark verbindet. Dabei sei allerdings eine allgemeine Vertexfunktion zugelassen.

7.3.1 Der mesonische Strom

Der mesonische Strom ist gegeben durch

$$J = \bar{q}_i \Gamma Q^i, \quad (7.17)$$

wobei Q^i bereits das effektive Quarkfeld ist, welches die Farbe i trägt, \bar{q}_i trägt die entsprechende Antifarbe. Γ bezeichnet die Vertexfunktion, es sollen aber grundsätzlich nur *antisymmetrische* Kombinationen aus Diracschen Gammamatrizen zugelassen sein. Das hat, wie in Kapitel 10 noch zu zeigen sein wird, den Vorteil einer skalaren Darstellung des Endergebnisses. Es ist also

$$\Gamma \in \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \dots\}, \quad \Gamma^{\mu\nu\dots\sigma} := \gamma^{[\mu}\gamma^\nu \dots \gamma^{\sigma]}. \quad (7.18)$$

Berechnet werden wird auch der leichte mesonische Strom

$$J = (\bar{q}_1)_i \Gamma (q_2)^i. \quad (7.19)$$

7.3.2 Der baryonische Strom

Ein schweres Baryon läßt sich aufteilen in ein leichtes *Diquarksystem* und ein schweres Quark. Da die Lagrangedichte der HQET in führender Ordnung der $1/m_Q$ -Entwicklung keine Diracschen Gammamatrizen mehr enthält, entkoppeln die Spins der beiden Anteile, ebenso wie die Flavours. Man spricht hier von der *Spin-Flavour-Symmetrie*. Zugleich liefert dies im Strom eine spinlose Kopplung des schweren Quarkfeldes an das Diquarksystem. Der Strom ergibt sich so als [43]

$$J = [(q_1)^{iT} C \Gamma \tau (q_2)^j] \Gamma' Q^k \varepsilon_{ijk}. \quad (7.20)$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern beschreibt das Diquarksystem, die Matrix τ ist dabei Ausdruck seiner Flavourstruktur. Zu erkennen ist, daß nun drei Farben i, j und k vorliegen, die durch den total antisymmetrischen Tensor (ε_{ijk}) miteinander zur Farblosigkeit gekoppelt sind. Das Strom des Diquarksystem alleine läßt sich aus dem mesonischen Strom herleiten, wenn man beachtet, daß die Transformation $q \rightarrow C\bar{q}^T$ gemäß Björken und Drell [10] ein Teilchen negativer Energie in eines mit positiver Energie verwandelt und umgekehrt, wobei die Impuls- und Spinfreiheitsgrade erhalten bleiben. Dabei ist C mit

$$\begin{aligned} C^T &= -C, & C^{-1} &= -C, & C^\dagger &= -C, \\ C\gamma_\mu^T C^{-1} &= -\gamma_\mu, & \text{und} & & C\gamma_5^T C^{-1} &= \gamma_5 \end{aligned} \quad (7.21)$$

die Matrix der Ladungskonjugation. So kann das Antiquark des mesonischen Stroms mittels der inversen Transformation $\bar{q} \rightarrow q^T C$ in ein Quark verwandelt werden. Die spezielle Gestalt des Diquarkanteils hat auch Auswirkungen auf die Feynmanregeln.

An dieser Stelle soll schon einmal vorausschauend der Graph (0) des doppellichten Diquarksystems herausgegriffen und genauer untersucht werden. Er ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Das äußere Quark $(q_2)^j$ ist hier ersetzt durch die Kette

$$\frac{i}{\not{k} + \not{p}} (-ig_s \gamma_\alpha (T^a)_{j'})^j (q_2)^{j'}, \quad (7.22)$$

das Quark $(q_1)^i$ durch

$$\frac{i}{-\not{k}} (-ig_s \gamma^\alpha (T^a)_{i'})^i (q_1)^{i'}, \quad (7.23)$$

wobei bereits die Kontraktion der Indizes durch das Gluon durchgeführt wurde. Es ergibt sich dann

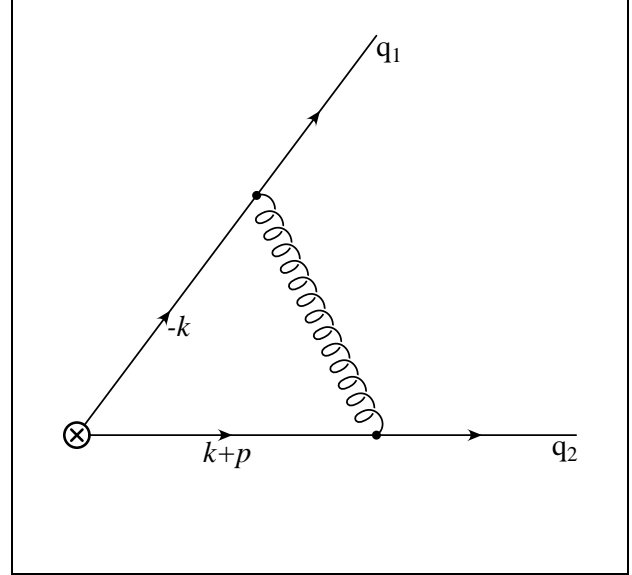


Abbildung 7.1: doppellichter Diquarkgraph

$$\begin{aligned} \left(\frac{i}{-\not{k}} (-ig_s \gamma^\alpha (T^a)_{i'})^i (q_1)^{i'} \right)^T C &= (q_1)^{i'T} (-ig_s (\gamma^\alpha)^T (T^a)_{i'}) \frac{i}{-\not{k}^T} C = \\ &= -(q_1)^{i'T} (-ig_s (\gamma^\alpha)^T (T^a)_{i'}) C \frac{i}{-\not{k}} = (q_1)^{i'T} C (-ig_s \gamma^\alpha (T^a)_{i'}) \frac{i}{-\not{k}}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

wobei die Eigenschaft $C \gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu$ verwendet wurde. Da mit jeder neuen Kopplung stets ein Paar aus Propagator und Vertex angehängt wird, läßt sich dieses Schema auch auf höhere Ordnungen übertragen. Für den Diquarkanteil des Stroms ergibt sich im betrachteten Fall

$$(q_1)^{i'T} C (-ig_s \gamma^\alpha (T^a)_{i'}) \frac{i}{-\not{k}} \Gamma_\tau \frac{i}{\not{k} + \not{p}} (-ig_s \gamma_\alpha (T^a)_{j'})^j (q_2)^{j'}. \quad (7.25)$$

In Abwandlung der hier nicht länger gültigen Feynmanregel, wonach die Propagatoren und Vertexfaktoren entlang der Pfeilrichtung des Graphen zu verketteten sind, ergibt sich hier, daß auch entgegengesetzt zu der Pfeilrichtung verfahren werden darf. Die Faktoren bleiben dabei dieselben, wobei die Impulse in Pfeilrichtung zu rechnen sind. Diese Kopplung der Impulse an die Pfeilrichtungen macht eine Festsetzung, an welchem Bein des Diquarksystems begonnen werden soll, überflüssig, was für ein Meson und das aus den entsprechenden Antiquarks gebildete Meson nicht der Fall ist.

7.3.3 Die Farbstruktur

Wie bereits an dem betrachteten Beispiel klar wurde, ergibt sich neben der Diracschen Struktur eines Feynmangraphen auch eine Farbstruktur, die sich aus der Verkettung von

Matrixkomponenten $(T^a)_j^i$ mit antisymmetrischen Formen f_{abc} und ε_{ijk} und symmetrischen Formen δ_{ab} ergeben. Diese Farbstruktur ist unabhängig davon, ob es sich um ein leichtes oder ein schweres Quark handelt. Sie kann zunächst außer Betracht gelassen und gesondert berechnet werden.

7.3.4 Spezielle baryonische Ströme

Die Ströme für das Λ_Q ($Q \in \{s, c, b\}$) und das Dublett $\{\Sigma_Q, \Sigma_Q^*\}$ sind verknüpft mit den Spin- und Paritätsquantenzahlen $j^P = 0^+$ und $j^P = 1^+$ des leichten Diquarksystems. Zu jedem Grundzustandbaryon gibt es jedoch zwei unabhängige Komponenten J_1 und J_2 mit denselben Quantenzahlen. Im Ruhesystem des Hadrons sind diese im einzelnen gegeben durch

$$\begin{aligned}
J_{\Lambda 1} &= [q^{iT} C \tau \gamma_5 q^j] Q^k \epsilon_{ijk}, & J_{\Lambda 2} &= [q^{iT} C \tau \gamma_5 \gamma_0 q^j] Q^k \epsilon_{ijk}, \\
J_{\Sigma 1} &= [q^{iT} C \tau \vec{\gamma} q^j] \cdot \vec{\gamma} \gamma_5 Q^k \epsilon_{ijk}, & J_{\Sigma 2} &= [q^{iT} C \tau \gamma_0 \vec{\gamma} q^j] \cdot \vec{\gamma} \gamma_5 Q^k \epsilon_{ijk}, \\
\vec{J}_{\Sigma^* 1} &= [q^{iT} C \tau \vec{\gamma} q^j] Q^k \epsilon_{ijk} + \frac{1}{3} \vec{\gamma} ([q^{iT} C \tau \vec{\gamma} q^j] \cdot \vec{\gamma} Q^k \epsilon_{ijk}), \\
\vec{J}_{\Sigma^* 2} &= [q^{iT} C \tau \gamma_0 \vec{\gamma} q^j] Q^k \epsilon_{ijk} + \frac{1}{3} \vec{\gamma} ([q^{iT} C \tau \gamma_0 \vec{\gamma} q^j] \cdot \vec{\gamma} Q^k \epsilon_{ijk}),
\end{aligned} \tag{7.26}$$

wobei $\vec{J}_{\Sigma^* 1}$ und $\vec{J}_{\Sigma^* 2}$ die Bedingung $\vec{\gamma} \cdot \vec{J}_{\Sigma^* i} = 0$ für Teilchen mit Spin 3/2 erfüllen. Die Flavourmatrix τ ist für Λ_Q antisymmetrisch und für $\{\Sigma_Q, \Sigma_Q^*\}$ symmetrisch. In einem beliebigen System, in dem sich das Baryon mit der Vierergeschwindigkeit v bewegt, ergeben sich die Ströme durch die Ersetzungen $\gamma_0 \rightarrow \psi$ und $\vec{\gamma} \rightarrow \gamma_{\perp}^{\mu} = \gamma^{\mu} - \psi v^{\mu}$.

7.3.5 Ströme, Zwei- und Dreipunktkorrelatoren

Das Hauptziel des zweiten Teils dieser Arbeit ist die Berechnung der radiativen Korrekturen zu den soeben eingeführten baryonischen Strömen, woraus sich der Renormierungsfaktor für den Strom und die zugehörige anomale Dimension ergibt. Diese anomale Dimension ist ein wichtiger Parameter für die Bestimmung von Größen, die von der Renormierungsgruppe unabhängig sind. Zur Entkopplung störungstheoretischer Größen von der Renormierungsgruppe ist, wie in Kapitel 10 an einem Spezialfall gezeigt, die Kenntnis der anomalen Dimension in der nächsthöheren Ordnung der Störungsreihe erforderlich. Dies ist insbesondere für die Anwendung der QCD-Summenregeln wichtig. So wird diese Arbeit auch nicht mit der Berechnung der anomalen Dimension der Ströme schließen, sondern weiter zu radiativen Korrekturen der Zweipunktkorrelatoren kommen, aus denen sich verbesserte QCD-Summenregeln und somit Möglichkeiten für die Bestimmung der Massen der betrachteten Baryonen, deren Residuen und der nichtstörungstheoretischen Isgur-Wise-Funktionen ergeben.

Weitere Anwendungen der anomalen Dimension ergeben sich in der Berechnung einiger wesentlicher QCD-Matrixelemente, wie sie in den Summenregeln auftreten, so beispielsweise bei den Erwartungswerten μ_{π}^2 und μ_G^2 für die kinetische und die chromomagnetische Energie, den spinabhängigen Matrixelementen μ_s^2 des Axialstroms, der Kopplung des schweren Baryons an Pionen und Photonen und des magnetischen und axialen Momentes des schweren Baryons.

Kapitel 8

Algorithmische Integrationstechniken

Die Berechnung von Ein- und Zweischleifengraphen ist auch im Fall der HJET mit erheblichem Aufwand verbunden. In den meisten Fällen gelingt es jedoch, die auszuwertenden Integrale mittels eines Algorithmus auf einfache und berechenbare Integrale zurückzuführen. Den Schritten dieses Algorithmus, welchen der Autor in einem umfangreichen Programmpaket in MATHEMATICA [16] implementiert hat, soll dieses Kapitel gewidmet sein. Es stellt insofern wieder einen Vorgriff auf das nachfolgende Kapitel dar, als es dessen Eingaben auswertet.

8.1 Die Diracstruktur

Zur Diracstruktur tragen, wie bereits im letzten Kapitel klar wurde, nur die leichten Linien eines Graphen bei. Der Propagator einer inneren leichten Linie mit Impuls k wird dabei durch den Propagator

$$\frac{i}{\not{k}} = -i\not{k} \left(\frac{1}{-k^2} \right) = -i\gamma_\mu k^\mu \left(\frac{1}{-k^2} \right) \quad (8.1)$$

beschrieben, der Vertex mit einem Gluon durch $-ig_s\gamma^\alpha$, wobei, wie bereits bemerkt, die Farbstruktur (in Form des Faktors T^a am Vertex) zunächst unberücksichtigt bleiben soll. Diese Propagatoren und Vertexfaktoren gruppieren sich um den Stromvertex Γ , und der erste Schritt wird zunächst einmal sein, die Gammamatrizen samt dieses Stromvertex aus dem Integral herauszuziehen. Dies läßt das vormals Diracsche (also i.a. matrixwertige) Integral I zu einem skalarwertigen Integral werden, welches jetzt jedoch mit Lorentzindizes versehen ist. Ein typisches Beispiel für eine Aufspaltung dieser Art ist

$$I = \gamma_\alpha \gamma_\mu \Gamma \gamma_\nu \gamma^\alpha I^{\mu\nu}. \quad (8.2)$$

8.1.1 Entwicklung in Kovariante

Das verbleibende *Tensorintegral* $I^{\mu\nu}$ im gewählten Beispiel kann nur von den äußeren Impulsen abhängen, und dies nur in Form von Lorentz-kovarianten Kombinationen, in diesem Fall also von Tensoren zweiter Stufe. Die Tensorintegrale zu Graphen mit leichten Linien wird nach dem metrische Tensor ($g^{\mu\nu}$) und dem Tensorprodukt $p^\mu p^\nu$ des äußeren Impulses entwickelt. Für die Integrale zu Graphen mit einer schweren Linie erfolgt diese Entwicklung nach $g^{\mu\nu}$ und $v^\mu v^\nu$, da in der betrachteten führenden Ordnung in $1/m_Q$ die

Tensorkomponenten, welche einen Restimpuls enthalten, zu vernachlässigen sind. Im Folgenden wird das Vorgehen für den zweiten Fall erläutert. Es ergibt sich in dem gewählten Beispiel nach dem üblichen Verfahren [44] eine *Entwicklung in Kovariante* der Form

$$I^{\mu\nu}(v) = Ag^{\mu\nu} + Bv^\mu v^\nu \quad (8.3)$$

und entsprechend in anderen Fällen

$$I^{\mu\nu\rho}(v) = Ag^{\mu\nu}v^\rho + Bg^{\mu\rho}v^\nu + Cg^{\nu\rho}v^\mu + Dv^\mu v^\nu v^\rho, \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\rho\sigma}(v) = & Ag^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + Bg^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + Cg^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + \\ & + Dg^{\mu\nu}v^\rho v^\sigma + Eg^{\mu\rho}v^\nu v^\sigma + Fg^{\mu\sigma}v^\nu v^\rho + \\ & + Gg^{\nu\rho}v^\mu v^\sigma + Hg^{\nu\sigma}v^\mu v^\rho + Ig^{\rho\sigma}v^\mu v^\nu + \\ & + Jv^\mu v^\nu v^\rho v^\sigma, \quad \dots \end{aligned} \quad (8.5)$$

wobei die auftretenden *Invarianten* A, B, \dots für jede Tensorstufe verschieden sind. Die *Kontraktionsintegrale* entstehen durch Kontraktion des Tensorintegrals mit dem entsprechend dualen Tensoren der Entwicklung, also im Falle des Tensorintegrals vierter Stufe aus (8.5) beispielsweise

$$I_F(v) := I^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\sigma} v_\nu v_\rho, \quad (8.6)$$

und tragen die Invariante, zu der sie dual sind, als Index. Diese Kontraktionsintegrale lassen sich leichter berechnen als die Tensorintegrale, denn durch die Kontraktion werden diese Integrale nicht nur zu skalarwertigen, sondern auch zu *skalaren Integralen*. Andererseits kann durch Bildung aller möglichen Kontraktionen ein Gleichungssystem in den Invarianten gebildet werden, so daß sich durch Matrixinversion aus den Kontraktionsintegralen die Invarianten bestimmen lassen. Diese Umrechnung, die unter dem Namen Passarino-Veltman-Methode [44] bekannt ist, soll in Anhang D behandelt werden.

8.1.2 Reduktion der Diracstruktur

Angenommen also, die Koeffizienten der kovarianten Entwicklung seien berechenbar. Dann kann diese Entwicklung für das indizierte Integral eingesetzt und damit die Diracstruktur reduziert werden. Im betrachteten Beispiel zweier Indizes bedeutet das

$$I(v) = \gamma_\alpha \gamma_\mu \Gamma \gamma_\nu \gamma^\alpha (Ag^{\mu\nu} + Bv^\mu v^\nu) = A\gamma_\alpha \gamma_\mu \Gamma \gamma^\mu \gamma^\alpha + B\gamma_\alpha \psi \Gamma \psi \gamma^\alpha. \quad (8.7)$$

Um noch ein etwas komplexeres Beispiel zur Hand zu haben, soll das Integral des ersten doppelteichten Zweischleifengraphen betrachtet werden. Es ergibt sich hier

$$I(v) = \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \Gamma \gamma_\rho \gamma^\beta \gamma_\sigma \gamma^\alpha I^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (8.8)$$

Setzt man die kovariante Entwicklung ein, so erhält man zunächst einmal zehn verschiedene Diracstrukturen. Diese lassen sich aber auf eine Klasse von fünf Grundstrukturen

$$\begin{aligned} \Gamma_0 & := \Gamma, & \Gamma_1 & := \gamma_\mu \psi \Gamma \psi \gamma^\mu, & \Gamma_2 & := \gamma_\mu \gamma_\nu \Gamma \gamma^\nu \gamma^\mu, \\ \Gamma_3 & := \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \psi \Gamma \psi \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \quad \text{und} & \Gamma_4 & := \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \Gamma \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \end{aligned} \quad (8.9)$$

reduzieren, die durch die Eigenschaft gekennzeichnet sind, daß die Gammamatrizen symmetrisch um den Stromvertex verteilt sind. Die Reduktion soll hier nur am Beispiel des Terms zu B demonstriert werden,

$$\begin{aligned}
\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \Gamma \overbrace{\gamma^\mu \gamma^\beta} \gamma^\nu \gamma^\alpha &= 2\gamma_\alpha \gamma^\beta \gamma_\beta \gamma_\nu \Gamma \gamma^\nu \gamma^\alpha - \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \Gamma \gamma^\beta \overbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu} \gamma^\alpha = \\
&= 2n\gamma_\alpha \gamma_\nu \Gamma \gamma^\nu \gamma^\alpha - 2\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma^\mu \Gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha + \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \Gamma \overbrace{\gamma^\beta \gamma^\nu} \gamma^\mu \gamma^\alpha = \\
&= 2n\Gamma_2 - 2(2-n)\Gamma_2 + 2\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma^\beta \Gamma \gamma^\mu \gamma^\alpha - \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \Gamma \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha = \\
&= 2n\Gamma_2 - 2(2-n)\Gamma_2 + 2n\Gamma_2 - \Gamma_4 = 2(3n-2)\Gamma_2 - \Gamma_4. \tag{8.10}
\end{aligned}$$

Die eckigen Klammern geben die Matrizen an, die als nächstes zu vertauschen sind, die Kontraktion mit dem metrischen Tensor wurde jeweils bereits durchgeführt. Vollständig berechnet ergibt sich in diesem Beispiel

$$\begin{aligned}
I(v) &= 2(n-2)(E+H-D-I)\Gamma_1 + (F+G-E-H)\Gamma_3 + (C-B)\Gamma_4 + \\
&\quad + ((n-2)^2 A + (n-2)(D+I) + 2(3n-2)B + 4(E+H) + J)\Gamma_2. \tag{8.11}
\end{aligned}$$

8.2 Die Integrale

Zu erwarten sind je nach Schleifenordnung ein- bzw. zweifache Integrale, wobei das Integrationsmaß für jeden inneren Impuls k jeweils durch

$$\frac{d^n k}{(2\pi)^n} \tag{8.12}$$

gegeben ist. Berechnet werden soll der Graph für verschwindenden äußeren Impuls. Dieser verteilt sich auf die drei Beine des Baryons (bzw. die zwei des Mesons). Betrachtet man einen konkreten, durch Gluonlinien verbundenen Graphen, so können die äußeren Impulse all derjenigen Beine gleich Null gesetzt werden, die nicht durch Gluonlinien mit dem Rest verbunden sind, denn sie tragen ja auch keinen Propagator zum Integranden bei. In den meisten Fällen können auch die Impulse der verbleibenden verbundenen Beine bis auf einen zum Verschwinden gebracht werden, und dieser eine regularisiert das Integral. Das Integral enthält also bis auf einen Spezialfall, der am Ende von Kapitel 9 gesondert behandelt wird, genau eine Linie mit äußerem Impuls und weitere Linien allein mit inneren Impulsen.

8.2.1 HQET-Integrale

Die Wahl, auf welcher Linie der äußere Impuls liegt, bestimmt auch letztendlich den Typ des Integrals. Gehört die Linie des schweren Quarks zum mit Gluonlinien verbundenen Teil, so wird praktischerweise dieser Linie der äußere Restimpuls zugeordnet, alle leichten Linien tragen dann lediglich innere Impulse. Betrachtet man zunächst nur skalare Integrale, so ergeben sich solche des Typs

$$\tilde{I}_2 = \int \left(\frac{-1}{k^2} \right)^a \left(\frac{\omega}{\omega + k \cdot v} \right)^p \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \tag{8.13}$$

für die Einschleifengraphen und

$$\tilde{I}_5 = \int \int \left(\frac{-1}{k^2}\right)^a \left(\frac{-1}{l^2}\right)^b \left(\frac{-1}{(k-l)^2}\right)^c \left(\frac{\omega}{\omega+k \cdot v}\right)^p \left(\frac{\omega}{\omega+l \cdot v}\right)^q \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \quad (8.14)$$

für die Zweischleifengraphen. An dieser Stelle soll das Integral zu den Einschleifengraphen berechnet werden. Dazu wird eine modifizierte Feynman-Parametrisierung verwendet, die hier aus der in Kapitel 3 dargestellten Parametrisierung hergeleitet werden soll,

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2}} &= \frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int_0^1 \frac{x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \delta(1-x_1-x_2)}{(x_1 A_1 + x_2 A_2)^{\alpha_1+\alpha_2}} dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int_0^1 \frac{(1-x_2)^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1}}{((1-x_2)A_1 + x_2 A_2)^{\alpha_1+\alpha_2}} dx_2 = \\ &= \frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int_0^1 \frac{(1-x_2)^{\alpha_1+\alpha_2-2} (x_2/(1-x_2))^{\alpha_2-1} dx_2}{(1-x_2)^{\alpha_1+\alpha_2} (A_1 + x_2/(1-x_2))^{\alpha_1+\alpha_2}} = \\ &= \frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha_2-1} dx}{(A_1 + x A_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Dabei wurde als neuer Parameter $x = x_2/(1-x_2)$ benutzt. Durch die Umskalierung $k = -2\omega\kappa$ und unter Ausnutzung der soeben konstruierten Feynman-Parametrisierung ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \int \left(\frac{-1}{(-2\omega\kappa)^2}\right)^a \left(\frac{\omega}{\omega-2\omega\kappa \cdot v}\right)^p \frac{(-2\omega)^n d^n \kappa}{(2\pi)^n} = \\ &= (-2\omega)^{n-2a} \int \left(\frac{-1}{\kappa^2}\right)^a \left(\frac{1}{1-2\kappa \cdot v}\right)^p \frac{d^n \kappa}{(2\pi)^n} = \\ &= \frac{(-2\omega)^{n-2a}}{(2\pi)^n} \frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int_0^\infty \int \frac{x^{p-1} d^n \kappa dx}{(-\kappa^2 + x(1-2\kappa \cdot v))^{a+p}} = \\ &= \frac{(-2\omega)^{n-2a}}{(2\pi)^n} \frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int_0^\infty \int \frac{x^{p-1} d^n \kappa' dx}{(-\kappa'^2 + x(1+x))^{a+p}} \end{aligned} \quad (8.16)$$

mit $\kappa' := \kappa + xv$. Für die innerste Integration wird nun das Grundintegral aus Kapitel 3 verwendet, und dies liefert (mit $x' := x/(1+x)$)

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-2\omega)^{n-2a} \frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \frac{\Gamma(a+p-n/2)}{\Gamma(a+p)} \int_0^\infty x^{p-1} (x(1+x))^{n/2-a-p} dx = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-2\omega)^{n-2a} \frac{\Gamma(a+p-n/2)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{n/2-a-1} (1+x)^{n/2-a-p} dx = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-2\omega)^{n-2a} \frac{\Gamma(a+p-n/2)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int_0^1 (x')^{n/2-a-1} (1-x')^{2a+p-n-1} dx' = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-2\omega)^{n-2a} \frac{\Gamma(a+p-n/2)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \frac{\Gamma(n/2-a)\Gamma(2a+p-n)}{\Gamma(a+p-n/2)} = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-2\omega)^{n-2a} \frac{\Gamma(n/2-a)\Gamma(2a+p-n)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} = \\ &=: \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-2\omega)^{n-2a} I_2(a, p). \end{aligned} \quad (8.17)$$

$I_2(a, p)$ wird als *HQET-Einschleifenfunktion* bezeichnet. Auch wenn das Integral \tilde{I}_5 zu den Zweischleifengraphen sich nicht so direkt berechnen läßt, soll es dennoch auf eine ähnliche Form gebracht werden. Mit derselben Umskalierung (allerdings für beide inneren Impulse) ergibt sich die *HQET-Zweischleifenfunktion* $I_5(a, b, c, p, q)$,

$$\tilde{I}_5 =: \frac{-1}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-a-b-c)} I_5(a, b, c, p, q). \quad (8.18)$$

8.2.2 QCD-Integrale

Gehört die Linie des schweren Quarks nicht zum verbundenen Anteil, so trägt eine der leichten Linien den äußeren Restimpuls. Es ergeben sich dann Integrale der Art

$$\tilde{G}_2 = \int \left(\frac{-1}{k^2} \right)^a \left(\frac{-1}{(k+p)^2} \right)^d \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \quad (8.19)$$

für die Einschleifengraphen und

$$\tilde{G}_5 = \int \int \left(\frac{-1}{k^2} \right)^a \left(\frac{-1}{l^2} \right)^b \left(\frac{-1}{(k-l)^2} \right)^c \left(\frac{-1}{(k+p)^2} \right)^d \left(\frac{-1}{(l+p)^2} \right)^e \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \quad (8.20)$$

für die Zweischleifengraphen. Erneut soll das Integral für die Einschleifengraphen berechnet werden. Dies geschieht mit Hilfe der ursprünglichen Feynman-Parametrisierung, auch ist keine Umskalierung nötig. Mit $k' = k + xp$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2 &= \frac{\Gamma(a+d)}{\Gamma(a)\Gamma(d)} \int \int_0^1 \frac{(1-x)^{a-1} x^{d-1} dx}{(-(1-x)k^2 - x(k+p)^2)^{a+d}} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{\Gamma(a+d)}{\Gamma(a)\Gamma(d)} \int_0^1 \int \frac{(1-x)^{a-1} x^{d-1} dx}{(-k'^2 - x(1-x)p^2)^{a+d}} \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(a+d-n/2)}{\Gamma(a)\Gamma(d)} \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{d-1} (-x(1-x)p^2)^{n/2-a-d} dx = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{-1}{p^2} \right)^{a+d-n/2} \frac{\Gamma(a+d-n/2)}{\Gamma(a)\Gamma(d)} \int_0^1 x^{n/2-a-1} (1-x)^{n/2-d-1} dx = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{-1}{p^2} \right)^{a+d-n/2} \frac{\Gamma(a+d-n/2)\Gamma(n/2-a)\Gamma(n/2-d)}{\Gamma(a)\Gamma(d)\Gamma(n-a-d)} = \\ &=: \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{-1}{p^2} \right)^{a+d-n/2} G_2(a, d), \end{aligned} \quad (8.21)$$

und entsprechend setzt man auch hier

$$\tilde{G}_5 =: \frac{-1}{(4\pi)^n} \left(\frac{-1}{p^2} \right)^{a+b+c+d+e-n} G_5(a, b, c, d, e). \quad (8.22)$$

$G_5(a, d)$ und $G_5(a, b, c, d, e)$ heißen *QCD-Einschleifen-* bzw. *-Zweischleifenfunktion*.

8.2.3 Reduktion der Integrale

Verschwindet einer der Propagatoranteile in der Zweischleifenfunktion, so kann sie in ein Produkt von zwei Einschleifenfunktionen zerlegt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
I_5(0, b, c, p, q) &= I_2(c, p)I_2(b, 2c + p + q - n), \\
I_5(a, 0, c, p, q) &= I_2(c, q)I_2(a, 2c + p + q - n), \\
I_5(a, b, 0, p, q) &= I_2(a, p)I_2(b, q), \\
I_5(a, b, c, 0, q) &= G_2(a, c)I_2(a + b + c - n/2, q), \\
I_5(a, b, c, p, 0) &= G_2(b, c)I_2(a + b + c - n/2, p),
\end{aligned} \tag{8.23}$$

$$\begin{aligned}
G_5(0, b, c, d, e) &= G_2(c, d)G_2(b, c + d + e - n/2), \\
G_5(a, 0, c, d, e) &= G_2(c, e)G_2(a, c + d + e - n/2), \\
G_5(a, b, 0, d, e) &= G_2(a, d)G_2(b, e), \\
G_5(a, b, c, 0, e) &= G_2(a, c)G_2(a + b + c - n/2, e), \\
G_5(a, b, c, d, 0) &= G_2(b, c)G_2(a + b + c - n/2, d).
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Als Beispiel soll hier $I_5(a, b, c, p, 0)$ nachgerechnet werden,

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{(4\pi)^n}(-2\omega)^{2(n-a-b-c)}I_5(a, b, c, p, 0) = \\
&= \int \int \left(\frac{-1}{k^2}\right)^a \left(\frac{-1}{l^2}\right)^b \left(\frac{-1}{(k-l)^2}\right)^c \left(\frac{\omega}{\omega + k \cdot v}\right)^p \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\
&= \int \left(\frac{-1}{k^2}\right)^a \left(\frac{\omega}{\omega + k \cdot v}\right)^p \int \left(\frac{-1}{l^2}\right)^b \left(\frac{-1}{(k-l)^2}\right)^c \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} = \\
&= \int \left(\frac{-1}{k^2}\right)^a \left(\frac{\omega}{\omega + k \cdot v}\right)^p \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{-1}{(-k)^2}\right)^{b+c-n/2} G_2(b, c) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} = \\
&= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} G_2(b, c) \int \left(\frac{-1}{k^2}\right)^{a+b+c-n/2} \left(\frac{\omega}{\omega + k \cdot v}\right)^p \frac{d^n k}{(2\pi)^n} = \\
&= \frac{-1}{(4\pi)^n}(-2\omega)^{2(n-a-b-c)} G_2(b, c) I_2(a + b + c - n/2, p)
\end{aligned} \tag{8.25}$$

In vielen Fällen verschwinden die Zweischleifenfunktionen ohnehin, wenn zwei oder mehr der Exponenten für die Propagatoren negativ sind. Ferner können die Symmetrien

$$\begin{aligned}
I_5(a, b, c, p, q) &= I_5(b, a, c, q, p), \\
G_5(a, b, c, d, e) &= G_5(b, a, c, e, d) \quad (\text{mittels } k \leftrightarrow l), \\
G_5(a, b, c, d, e) &= G_5(d, e, c, a, b) \quad (\text{mittels } k \rightarrow k - p, l \rightarrow l - p)
\end{aligned} \tag{8.26}$$

verwendet werden. Und schließlich gelang es Broadhurst und Grozin [45], durch Anwendung der partiellen Integration die allgemeine Zweischleifenfunktion auf reduzierbare Integrale der obigen Form zurückzuführen. Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß sich die Zweischleifenfunktionen auf Einschleifenfunktionen reduzieren lassen, die wiederum analytisch berechenbar sind. Die hierbei auftretenden Eulerschen Gammafunktionen

lassen sich unter Verwendung der Regel $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ auf die Formen

$$\begin{aligned} E_p &:= \Gamma(1-\varepsilon)^p \Gamma(1+2p\varepsilon) \quad \text{mit } 2\varepsilon = 4-n \quad \text{und} \\ Q_p &:= \Gamma(1-\varepsilon)^{p+1} \Gamma(1+p\varepsilon) / \Gamma(1-(p+1)\varepsilon) \quad (p=1,2,\dots) \end{aligned} \quad (8.27)$$

mit jeweils einer Reihe von Faktoren in Nenner und Zähler reduzieren.

8.3 Die Operatoren

Die Kontraktionsintegrale besitzen zunächst einmal nicht die Form der skalaren Integrale des vorangegangenen Abschnitts, aber es fällt nicht schwer, sie auf diese Form zu bringen. Durch die Kontraktion werden die Impulskomponenten, die beim indizierten Integral noch im Zähler des Integranden standen, miteinander oder mit dem äußeren Impuls skalar multipliziert. Diese Skalarprodukte können dann anschließend in Terme umgeschrieben werden, die jeweils einen der Nennerfaktoren kürzen. Da dies eine Operation auf den Einträgen der Ein- und Zweischleifenfunktionen ist, die im letzten Abschnitt definiert wurden, können die gebildeten Skalarprodukte auch direkt in *Operatoren* auf diese Einträge übersetzt werden. Dies soll wieder für die HQET- und die QCD-Integrale getrennt geschehen.

8.3.1 Operatoren für die HQET-Integrale

Mögliche Kontraktionen im Fall der HQET-Integrale sind diejenigen mit dem metrischen Tensor ($g^{\mu\nu}$) oder mit dem Geschwindigkeitsvierervektor v . Der Zähler im Integranden des indizierten Integrals kann nur Kombinationen aus den inneren Impulsen enthalten, die hier k und l genannt sind (letzterer auch nur im Zweischleifenintegral). Als Skalarprodukte ergeben sich damit Terme wie k^2 , l^2 , $k \cdot l$, $k \cdot v$ und $l \cdot v$. So ist beispielsweise

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-a-b-c)} \int k^2 \left(\frac{-1}{k^2}\right)^a \left(\frac{-1}{l^2}\right)^b \left(\frac{-1}{(k-l)^2}\right)^c \cdot \\ & \quad \cdot \left(\frac{\omega}{\omega+k \cdot v}\right)^p \left(\frac{\omega}{\omega+l \cdot v}\right)^q \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\ & = -\frac{-1}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-a-b-c)} \int \left(\frac{-1}{k^2}\right)^{a-1} \left(\frac{-1}{l^2}\right)^b \left(\frac{-1}{(k-l)^2}\right)^c \cdot \\ & \quad \cdot \left(\frac{\omega}{\omega+k \cdot v}\right)^p \left(\frac{\omega}{\omega+l \cdot v}\right)^q \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\ & = -(-2\omega)^2 I_5(a-1, b, c, p, q), \end{aligned} \quad (8.28)$$

d.h. das Skalarprodukt k^2 kann auf den Operator $-(-2\omega)^2 \hat{A}$ übertragen werden, wobei \hat{A} einfach den ersten Eintrag von I_5 um eine Einheit herabsetzt. Durch entsprechende Rechnungen erhält man die Ersetzungen

$$\begin{aligned} k^2 &\rightarrow -(-2\omega)^2 \hat{A}, & l^2 &\rightarrow -(-2\omega)^2 \hat{B}, \\ k \cdot l &\rightarrow (-2\omega)^2 \frac{1}{2} (\hat{C} - \hat{A} - \hat{B}) & (\text{wegen } 2k \cdot l = k^2 + l^2 - (k-l)^2), \\ k \cdot v &\rightarrow (-2\omega) \frac{1}{2} (1 - \hat{P}) & \text{und } l \cdot v &\rightarrow (-2\omega) \frac{1}{2} (1 - \hat{Q}). \end{aligned} \quad (8.29)$$

Die Operatoren \hat{B} , \hat{C} , \hat{P} und \hat{Q} erniedrigen die Einträge b , c , p und q , der Operator 1 ist die Identität, läßt also sämtliche Einträge unverändert.

8.3.2 Operatoren für die QCD-Integrale

Kontrahiert werden die QCD-Integrale mit $(g^{\mu\nu})$ und dem äußeren Impuls p , der noch auf Eins zu normieren ist. Auch im Zähler des Integranden kann dieser Impuls vorkommen. Mögliche Skalarprodukte sind daher erneut k^2 , l^2 und $k \cdot l$, aber auch $k \cdot p$, $l \cdot p$ und p^2 . Letzteres ist klarerweise nur ein Faktor, der aus dem Integral herausgezogen werden kann. Durch analoge Überlegungen wie im Fall der HJET-Integrale ergeben sich die Ersetzungen

$$\begin{aligned} k^2 &\rightarrow -(-p^2)\hat{A}, & l^2 &\rightarrow -(-p^2)\hat{B}, & k \cdot l &\rightarrow (-p^2)\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{A} - \hat{B}), & (8.30) \\ k \cdot p &\rightarrow (-p^2)\frac{1}{2}(1 + \hat{A} - \hat{D}), & l \cdot p &\rightarrow (-p^2)\frac{1}{2}(1 + \hat{B} - \hat{E}), & p^2 &\rightarrow -(-p^2)1. \end{aligned}$$

Die Operatoren \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} und \hat{E} wirken erneut auf die entsprechenden Einträge a , b , c , d und e , indem sie diese um eine Einheit erniedrigen.

8.3.3 Behandlung von Sonderfällen

Es gibt einige wenige Sonderfälle, in denen das Zweischleifenintegral auch im Nenner zunächst nicht die gewünschte Form besitzt. Beispielsweise kann ein Propagator der Form $i/(\omega + k \cdot v + l \cdot v)$ auftreten. In diesem Fall hilft die Zerlegung

$$\frac{\omega}{\omega + k \cdot v + l \cdot v} = \frac{\omega + k \cdot v}{\omega + k \cdot v + l \cdot v} + \frac{\omega + l \cdot v}{\omega + k \cdot v + l \cdot v} - 1, \quad (8.31)$$

allerdings nur im Fall der Einträge $p = q = 1$. Dann nämlich ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{\omega}{(\omega + k \cdot v)(\omega + k \cdot v + l \cdot v)(\omega + l \cdot v)} = & (8.32) \\ &= \frac{\omega}{(\omega + k \cdot v + l \cdot v)(\omega + l \cdot v)} + \frac{\omega}{(\omega + k \cdot v)(\omega + k \cdot v + l \cdot v)} - \frac{\omega}{(\omega + k \cdot v)(\omega + l \cdot v)}, \end{aligned}$$

so daß für den ersten Term die Substitution $k \rightarrow k - l$, im zweiten Term die Substitution $l \rightarrow l - k$ zur gewünschten Form führt, wobei allerdings auch die Einträge a , b und c entsprechend zu vertauschen sind,

$$I_5^l(a, b, c, 1, 1, 1) = I_5(c, b, a, 1, 1) + I_5(a, c, b, 1, 1) - I_5(a, b, c, 1, 1). \quad (8.33)$$

Für die QCD-Integrale ist ein Propagatorterm $(-1/(k + l + p)^2)^f$ für $d = 0$ durch die Substitution $k \rightarrow k - l$ und für $e = 0$ durch die Substitution $l \rightarrow l - k$ einzubauen. Erneut vertauschen dabei die Einträge, es ergibt sich

$$G_5^l(a, b, c, 0, e, f) = G_5(c, b, a, f, e) \quad \text{bzw.} \quad G_5^l(a, b, c, d, 0, f) = G_5(a, c, b, d, f). \quad (8.34)$$

Um die Substitution formell fassen zu können, wurde in allen Fällen der Exponent des zusätzlichen „exotischen“ Propagators an die Liste der Einträge angehängt und die Zweischleifenfunktion dafür mit einem Strich gekennzeichnet.

Kapitel 9

Korrekturen zum Stromvertex

Nachdem die beiden vorangegangenen Kapitel die notwendige Vorarbeit geleistet haben, sollen nun Strahlungskorrekturen zum (mesonischen oder baryonischen) Stromvertex Γ bestimmt werden, und dies in führender Ordnung der HQET, also für die Kombination aus einem massiven und ein oder zwei masselosen leichte Quarks bzw. Antiquarks. Dabei werden sowohl Ein- als auch Zweischleifenkorrekturen berücksichtigt. Obwohl sich das eigentliche Anliegen des zweiten Teils dieser Arbeit auf Strahlungskorrekturen zu baryonischen Strömen bezieht, können die Korrekturen zu den mesonischen Strömen als willkommenes Nebenprodukt schnell und einfach berechnet werden, denn mesonisches und Diquarksystem lassen sich ineinander überführen.

9.1 Mesonische und Diquarkgraphen

Am Beginn soll das schwere Meson stehen, also ein System aus einem schweren Quark und einem leichten Antiquark. Analog behandelt man Systeme aus einem schweren Antiquark und einem leichten Quark. Die insgesamt zwölf Graphen, bestehend aus einem Einschleifen- und elf Zweischleifengraphen, die zur Strahlungskorrektur beitragen, sind in Abbildung 9.1 dargestellt und mit Zahlen versehen. Sie gelten genauso für den Diquarkfall, ebenso aber auch für ein doppeltleichtes System, wenn die Linie des schweren Quarks, die durch eine Doppellinie angedeutet ist, durch die einfache Linie eines leichten Quarks ersetzt wird.

9.1.1 Korrektur erster Ordnung zum schweren Meson

Nur zwei Beispiele sollen genügen, um den Rechenweg zu zeigen. Auf die Farbstruktur wird an dieser Stelle zunächst noch nicht eingegangen. Als erstes soll der Graph (0) aus Abbildung 9.1 berechnet werden. Allerdings wird hier statt der Feynman-Eichung eine *allgemein kovariante Eichung* mit *Eichparameter* a verwendet, wobei $a = 1$ die Feynman-Eichung liefert. Statt des Gluonpropagators $-ig^{\alpha\beta}/k^2$ wird nun ein Propagator

$$\frac{-i}{k^2} \left(g^{\alpha\beta} - (1-a) \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \right) \quad (9.1)$$

eingesetzt. Die Beibehaltung einer allgemeinen Eichung in der Berechnung der Einschleifengraphen wird sich später als notwendig und nützlich erweisen, denn bei der Renormierung der Beiträge kommt auch eine Renormierung des Eichparameters mit ins Spiel, die

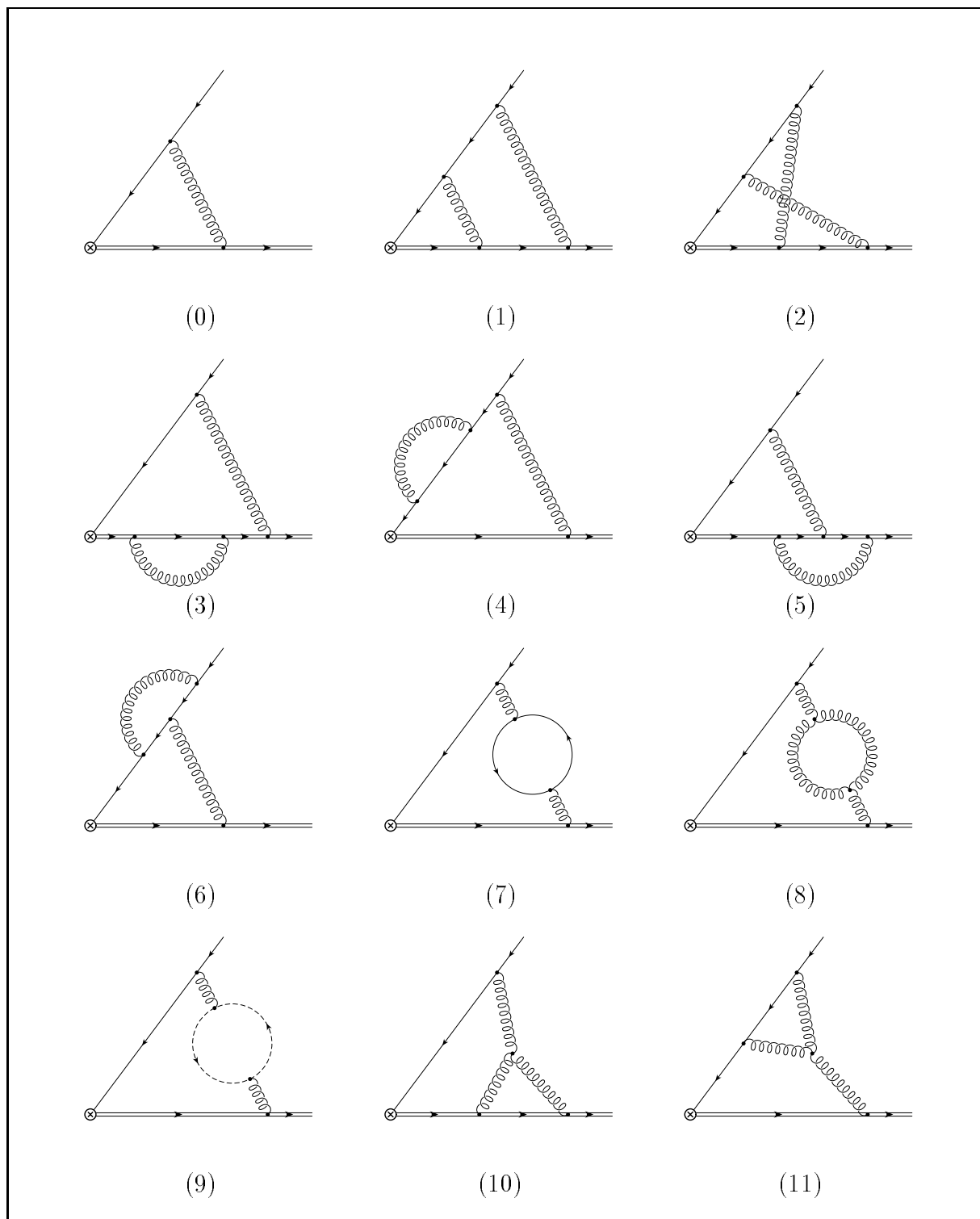


Abbildung 9.1: Radiative Korrekturen zum schweren Meson bis zur zweiten Ordnung in α_s . Einfache Linien sind leichte Quarks oder Antiquarks, die doppelte Linie das schwere Quark, die spiralgigen Linien bezeichnen die ausgetauschten Gluonen und die gestrichelte Linie ein Geistteilchen.

sowohl in die Berechnung der anomalen Dimension wie auch in eine Reihe von Konsistenzbedingungen eingeht. Für den Graphen ergibt sich nun zunächst

$$\begin{aligned}\tilde{b}_0^{(hl)} &= \int (-ig_s \gamma_\alpha) \frac{i}{\not{k}} \Gamma \frac{-i}{k^2} \left(g^{\alpha\beta} - (1-a) \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \right) \frac{i}{\omega + k \cdot v} (-ig_s v_\beta) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} = \\ &= i \frac{g_s^2}{\omega} \int ((k^2) \not{v} - (1-a)(k \cdot v) \not{k}) \not{k} \Gamma \left(\frac{-1}{k^2} \right)^3 \frac{\omega}{\omega + k \cdot v} \frac{d^n k}{(2\pi)^n}\end{aligned}\quad (9.2)$$

(Der Index (hl) verweist auf das „heavy-light system“, also auf das System aus einem schweren und einem leichten Quark bzw. Antiquark). In einem ersten Schritt werden die drei Bestandteile dieses Integrals voneinander getrennt: Die *Diracstruktur*

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \Gamma, \quad (9.3)$$

die *Impulsstruktur* des Zählers,

$$((k^2)v^\mu - (1-a)(k \cdot v)k^\mu)k^\nu \quad (9.4)$$

und das verbleibende skalare *Stammintegral*

$$\begin{aligned}\hat{b}_0^{(hl)} &:= i \frac{g_s^2}{\omega} \int \left(\frac{-1}{k^2} \right)^3 \frac{\omega}{\omega + k \cdot v} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \\ &= \frac{-g_s^2}{(4\pi)^{n/2} \omega} (-2\omega)^{n-6} I_2(3, 1) = \frac{2g_s^2}{(4\pi)^{n/2}} (-2\omega)^{n-7} I_2(3, 1).\end{aligned}\quad (9.5)$$

Wird zunächst nur die Diracstruktur abgetrennt, so ergibt sich ein Tensorintegral, welches sich kovariant in die beiden Anteile $g^{\mu\nu}$ und $v^\mu v^\nu$ entwickeln läßt. Ausgedrückt durch diese Entwicklung ergibt sich

$$\tilde{b}_0^{(hl)} = \gamma_\mu \gamma_\nu \Gamma (A g^{\mu\nu} + B v^\mu v^\nu) = A \gamma_\mu \gamma^\mu \Gamma + B \not{v} \not{v} \Gamma = (nA + B) \Gamma. \quad (9.6)$$

Die Invarianten A und B berechnen sich gemäß Anhang D aus den Kontraktionsintegralen I_A und I_B als

$$A = \frac{I_A - I_B}{n-1} \quad \text{und} \quad B = I_B - A, \quad (9.7)$$

und die Kontraktionsintegrale I_A und I_B wiederum ergeben sich durch Kontraktion des indizierten Integrals mit $g_{\mu\nu}$ bzw. $v_\mu v_\nu$. Diese Kontraktion wirkt nun einzig und allein auf die Impulsstruktur, die bereits extrahiert wurde. Kontrahiert man diese mit den beiden Tensoren und überträgt die sich ergebenden Skalarprodukte anschließend auf Operatoren für die Einträge der Einschleifenfunktion, so ergibt sich

$$\text{für } I_A: \quad k^2(k \cdot v) - (1-a)(k \cdot v)k^2 = ak^2(k \cdot v) \rightarrow -\frac{a}{2}(-2\omega)^3 \hat{A}(1 - \hat{P}), \quad (9.8)$$

$$\text{für } I_B: \quad (k^2 - (1-a)(k \cdot v)^2)(k \cdot v) \rightarrow -\frac{1}{2}(-2\omega)^3 \left(\hat{A} + \frac{1-a}{4}(1 - \hat{P})^2 \right) (1 - \hat{P}).$$

Diese Operatoren, auf das Stammintegral angewandt, liefern die Kontraktionsintegrale. Es ergeben sich entsprechend der Operatorstruktur Summen von Einschleifenfunktionen, die sich als Brüche von Eulerschen Gammafunktionen schreiben und mit Hilfe der Regel

$\Gamma(x+1) = \Gamma(x)$ auf ein Produkt aus $E_1 = \Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1+2\varepsilon)$ und rationalen Funktionen in der Raumzeitdimension $n = 4 - 2\varepsilon$ umformen lassen. So erhält man

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{-ag_s^2}{(4\pi)^{n/2}}(-2\omega)^{n-4} \hat{A}(1-\hat{P})I_2(3,1) = \frac{-ag_s^2}{(4\pi)^{n/2}}(-2\omega)^{n-4}(I_2(2,1) - I_2(2,0)) = \\ &= \frac{-g_s^2}{(4\pi)^{n/2}}(-2\omega)^{n-4} \frac{2aE_1}{n-4}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{-g_s^2}{(4\pi)^{n/2}}(-2\omega)^{n-4} \left(\hat{A} + \frac{1-a}{4}(1-\hat{P})^2 \right) (1-\hat{P})I_2(3,1) = \\ &= \frac{-g_s^2}{4(4\pi)^{n/2}}(-2\omega)^{n-4} \left(4(I_2(2,1) - I_2(2,0)) + \right. \\ &\quad \left. + (1-a)(I_2(3,1) - 3I_2(3,0) + 3I_2(3,-1) - I_2(3,-2)) \right) = \\ &= \frac{-g_s^2}{4(4\pi)^{n/2}}(-2\omega)^{n-4} \left(\frac{2E_1}{n-4} + (1-a)\frac{(n-5)E_1}{2(n-4)} \right). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Aus diesen Integralen lassen sich A und B bestimmen. Zu berechnen ist aber letzten Endes die Kombination $nA + B$, und diese liefert

$$nA + B = nA + I_B - A = (n-1)A + I_B = (I_A - I_B) + I_B = I_A, \quad (9.11)$$

so daß die Bestimmung von I_B eigentlich überflüssig war. Ergebnis ist schließlich

$$\tilde{b}_0^{(hl)} = \frac{-g_s^2}{(4\pi)^{n/2}}(-2\omega)^{n-4} \frac{2aE_1}{n-4} \Gamma =: \lambda_I b_0^{(hl)}, \quad \lambda_I := \frac{g_s^2}{(4\pi)^{n/2}}(-2\omega)^{n-4}. \quad (9.12)$$

9.1.2 Eine Korrektur zweiter Ordnung zum schweren Meson

Herausgegriffen sei nun der Graph (1) aus Abbildung 9.1. Für ihn ergibt sich in Feynman-Eichung

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1^{(hl)} &= \int \int (-ig_s \gamma_\alpha) \frac{i}{\not{k}} (-ig_s \gamma_\beta) \frac{i}{\not{l}} \Gamma \left(\frac{-i}{k^2} \right) \left(\frac{-i}{(k-l)^2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{i}{(\omega + k \cdot v)} (-ig_s v^\beta) \frac{i}{(\omega + l \cdot v)} (-ig_s v^\alpha) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\ &= -\frac{g_s^4}{\omega^2} \int \int \psi \not{k} \psi \not{l} \Gamma \left(\frac{-1}{k^2} \right)^2 \left(\frac{-1}{l^2} \right) \left(\frac{-1}{(k-l)^2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\omega}{(\omega + k \cdot v)} \frac{\omega}{(\omega + l \cdot v)} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Aufgespalten werden kann dieses Integral auch hier in eine Diracstruktur

$$\psi \gamma_\mu \psi \gamma_\nu \Gamma, \quad (9.14)$$

eine Impulsstruktur der einfachen Form

$$k^\mu l^\nu \quad (9.15)$$

und ein Stammintegral

$$\begin{aligned}\hat{b}_1^{(hl)} &= -\frac{g_s^4}{\omega^2} \int \int \left(\frac{-1}{k^2}\right)^2 \left(\frac{-1}{l^2}\right) \left(\frac{-1}{(k-l)^2}\right) \frac{\omega}{(\omega+k\cdot v)} \frac{\omega}{(\omega+l\cdot v)} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\ &= \frac{g_s^4}{(4\pi)^n \omega^2} (-2\omega)^{2(n-4)} I_5(2, 1, 1, 1, 1) = \frac{4g_s^4}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-5)} I_5(2, 1, 1, 1, 1).\end{aligned}\quad (9.16)$$

Es ergibt sich

$$\tilde{b}_1^{(hl)} = \psi \gamma_\mu \psi \gamma_\nu \Gamma(Ag^{\mu\nu} + Bv^\mu v^\nu) = A\psi \gamma_\mu \psi \gamma^\mu \Gamma + B\psi \psi \psi \psi = ((2-n)A + B)\Gamma, \quad (9.17)$$

als Operatoren aus der Kontraktion der Impulsstruktur

$$\text{für } I_A: \quad (k \cdot l) \rightarrow \frac{1}{2}(-2\omega)^2(\hat{C} - \hat{A} - \hat{B}), \quad (9.18)$$

$$\text{für } I_B: \quad (k \cdot v)(l \cdot v) \rightarrow \frac{1}{4}(-2\omega)^2(1 - \hat{P})(1 - \hat{Q}), \quad (9.19)$$

also

$$\begin{aligned}I_A &= \frac{2g_s^4}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-4)} (\hat{C} - \hat{A} - \hat{B}) I_5(2, 1, 1, 1, 1) = \\ &= \frac{2g_s^4}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-4)} \left(I_5(2, 1, 0, 1, 1) - I_5(1, 1, 1, 1, 1) - I_5(2, 0, 1, 1, 1) \right) = \\ &= \frac{g_s^4}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-4)} \left(\frac{4(n-5)E_1^2}{(n-4)^3(n-3)} - \frac{2(n-6)E_2}{(n-4)^3(n-3)} \right),\end{aligned}\quad (9.20)$$

$$\begin{aligned}I_B &= \frac{g_s^4}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-4)} (1 - \hat{P})(1 - \hat{Q}) I_5(2, 1, 1, 1, 1) = \\ &= \frac{g_s^4}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-4)} \left(I_5(2, 1, 1, 1, 1) - I_5(2, 1, 1, 1, 0) + \right. \\ &\quad \left. - I_5(2, 1, 1, 0, 1) + I_5(2, 1, 1, 0, 0) \right) = \\ &= \frac{g_s^4}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-4)} \left(\frac{4E_1^2}{(n-4)^2(n-3)} - \frac{4(n-5)E_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)} \right)\end{aligned}\quad (9.21)$$

und damit

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1^{(hl)} &= ((2-n)A + B)\Gamma = ((2-n)A + I_B - A)\Gamma = \\ &= ((1-n)A + I_B)\Gamma = (2I_B - I_A)\Gamma = \\ &= \frac{g_s^4}{(4\pi)^n} (-2\omega)^{2(n-4)} \left(\frac{4E_1^2}{(n-4)^3} - \frac{2(3n^2 - 24n + 44)E_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)} \right) \Gamma =: \lambda_I^2 b_1^{(hl)}.\end{aligned}\quad (9.22)$$

Verwendung fanden hier natürlich erstmals die Algorithmen, welche die Zweischleifenfunktionen auf Einschleifenfunktionen reduzierten, so daß sich schließlich Ausdrücke in E_1^2 und $E_2 = \Gamma(1-\varepsilon)^2\Gamma(1+4\varepsilon)$ ergaben.

9.1.3 Die Farbstruktur der mesonischen Graphen

Unberücksichtigt blieb bislang die Farbstruktur der Graphen. Doch die Behandlung dieser Elemente soll nun nachgeholt werden. Dabei treten zwischen den Spinor des Quarks und Antiquarks die Matrizen T^a der Vertizes mit den Gluonen. Diese sind Matrizen im dreidimensionalen Raum der Farben, und der Index a steht für einen der acht verschiedenen möglichen Übergänge zwischen den Farben, die das Gluon induziert. Daher besitzt jedes Gluon auch einen Faktor δ_{ab} . Ein Dreigluonvertex liefert einen Faktor if_{abc} (das i an dieser Stelle ist Konvention des Autors), wobei f_{abc} Komponenten der total antisymmetrischen Matrix mit

$$if_{abc} = 2 \operatorname{Sp}([T^a, T^b]_- T^c) = 2 \operatorname{Sp}(T^a T^b T^c - T^b T^a T^c), \quad f_{acd} f_{bcd} = N_C \delta_{ab} \quad (9.23)$$

sind (über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, N_C ist die bereits aus dem ersten Teil der Arbeit bekannte Anzahl der Farben). Dieser Faktor ergibt sich auch am Gluon-Geist-Vertex. Mit Hilfe dieser Regeln und

$$\sum_a (T^a)_i^j (T^a)_k^l = \frac{1}{2} (\delta_i^l \delta_k^j - \frac{1}{N_C} \delta_i^j \delta_k^l) \quad (9.24)$$

können die Farbfaktoren C_i aller auftretenden Diagramme bestimmt werden. Dabei deutet der untere Farbindex i in der Farbkomponentenschreibweise die Antifarbe zur Farbe i an, die kompakte Form $\bar{q}Q$ ist als $\bar{q}_i Q^i$ zu verstehen.

$$\begin{aligned} C_0 \bar{q}Q &= \bar{q}_{i'} (T^a)_i^{i'} (T^a)_j^j Q^j = \frac{1}{2} \bar{q}_{i'} (\delta_i^i \delta_j^{j'} - \frac{1}{N_C} \delta_i^{i'} \delta_j^i) Q^j = \\ &= \frac{1}{2} (N_C \bar{q}_j Q^j - \frac{1}{N_C} \bar{q}_j Q^j) = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \bar{q}_j Q^j =: C_F \bar{q}Q, \end{aligned} \quad (9.25)$$

$$\begin{aligned} C_1 \bar{q}Q &= \bar{q}_{i''} (T^a)_i^{i''} (T^b)_i^{i'} (T^b)_j^j (T^a)_j^j Q^{j'} = \\ &= \frac{1}{4} \bar{q}_{i''} (\delta_i^j \delta_j^{i''} - \frac{1}{N_C} \delta_i^{i''} \delta_j^j) (\delta_i^i \delta_j^{i'} - \frac{1}{N_C} \delta_i^{i'} \delta_j^i) Q^{j'} = \\ &= \frac{1}{4} (N_C^2 - \frac{1}{N_C} N_C - \frac{1}{N_C} N_C + \frac{1}{N_C^2}) \bar{q}Q = C_F^2 \bar{q}Q, \end{aligned} \quad (9.26)$$

$$\begin{aligned} C_2 \bar{q}Q &= \bar{q}_{i''} (T^a)_i^{i''} (T^b)_i^{i'} (T^a)_j^j (T^b)_j^j Q^{j'} = \\ &= \frac{1}{4} \bar{q}_{i''} (\delta_i^i \delta_j^{i''} - \frac{1}{N_C} \delta_i^{i''} \delta_j^i) (\delta_i^j \delta_j^{i'} - \frac{1}{N_C} \delta_i^{i'} \delta_j^j) Q^{j'} = \\ &= \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{N_C} N_C - \frac{1}{N_C} N_C + \frac{1}{N_C^2}) \bar{q}Q = C_F (C_F - \frac{1}{2} C_A) \bar{q}Q, \end{aligned} \quad (9.27)$$

$$C_3 \bar{q}Q = C_4 \bar{q}Q = C_1 \bar{q}Q = C_F^2 \bar{q}Q, \quad (9.28)$$

$$C_5 \bar{q}Q = C_6 \bar{q}Q = C_2 \bar{q}Q = C_F (C_F - \frac{1}{2} C_A) \bar{q}Q, \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned} C_7 \bar{q}Q &= \bar{q}_{i'} (T^a)_i^{i'} (T^b)_j^j Q^j \cdot N_f \operatorname{Sp}(T^a T^b) = \frac{1}{2} T_F N_f \bar{q}_{i'} (\delta_i^i \delta_j^{i'} - \frac{1}{N_C} \delta_i^{i'} \delta_j^i) Q^j = \\ &= \frac{1}{2} T_F N_f (N_C - \frac{1}{N_C}) \bar{q}Q = C_F T_F N_f \bar{q}Q, \end{aligned} \quad (9.30)$$

$$\begin{aligned}
C_8 \bar{q} Q &= C_9 \bar{q} Q = \bar{q}_{i'} (T^a)_i{}^{i'} (T^b)_j{}^j Q^j \cdot i f_{acd} i f_{bdc} = \\
&= \frac{1}{2} N_C \bar{q}_{i'} (\delta_i^i \delta_j^{i'} - \frac{1}{N_C} \delta_i^{i'} \delta_j^i) Q^j = \frac{1}{2} N_C (N_C - \frac{1}{N_C}) \bar{q} Q = C_F C_A \bar{q} Q, \quad (9.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{10} \bar{q} Q &= C_{11} \bar{q} Q = \bar{q}_{i'} (T^a)_i{}^{i'} (T^b)_j{}^j (T^c)_{j'}{}^j Q^{j'} \cdot i f_{abc} = \\
&= \bar{q}_{i'} (T^a)_i{}^{i'} (T^b)_j{}^j ((T^a)_{l'}{}^l (T^b)_{l''}{}^{l'} - (T^b)_{l'}{}^l (T^a)_{l''}{}^{l'}) (T^c)_{j'}{}^j (T^c)_{l'}{}^{l''} Q^{j'} = \\
&= \frac{1}{8} \bar{q}_{i'} (\delta_i^l \delta_{l'}^{i'} - \frac{1}{N_C} \delta_i^{i'} \delta_{l'}^l) (\delta_j^{l'} \delta_{l''}^{i'} - \frac{1}{N_C} \delta_j^i \delta_{l''}^{l'}) (\delta_{j'}^{l''} \delta_l^j - \frac{1}{N_C} \delta_{j'}^j \delta_l^{l''}) Q^{j'} + \\
&\quad - \frac{1}{8} \bar{q}_{i'} (\delta_i^{l'} \delta_{l''}^{i'} - \frac{1}{N_C} \delta_i^{i'} \delta_{l''}^{l'}) (\delta_j^l \delta_{l'}^i - \frac{1}{N_C} \delta_j^i \delta_{l'}^l) (\delta_{j'}^{l''} \delta_l^j - \frac{1}{N_C} \delta_{j'}^j \delta_l^{l''}) Q^{j'} = \\
&= \dots = \frac{1}{2} C_F C_A \bar{q} Q. \quad (9.32)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $\text{Sp}(T^a T^b) = T_F \delta_{ab}$ benutzt sowie die Abkürzungen

$$C_F := \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}, \quad C_A := N_C \quad \text{und} \quad T_F := \frac{1}{2} \quad (9.33)$$

verwendet. C_F ist ebenfalls aus dem ersten Teil der Arbeit bekannt, N_f ist die Anzahl der Flavours in der Quarkschleife in Graph (7). Zusammenfassend sind also die Farbfaktoren des Mesons gegeben durch

$$\begin{aligned}
C_0 &= C_F, & C_1 &= C_3 = C_4 = C_F^2, & C_2 &= C_5 = C_6 = C_F(C_F - \frac{1}{2}C_A), \\
C_7 &= C_F T_F N_f, & C_8 &= C_9 = C_F C_A, & C_{10} &= C_{11} = \frac{1}{2} C_F C_A. \quad (9.34)
\end{aligned}$$

9.1.4 Korrekturen zum schweren Diquarksystem

Das Diquarksystem ergibt sich aus dem Mesonsystem durch Umkehrung der Antiquark- in eine Quarklinie. Wie in Kapitel 7 bereits angesprochen, kehren dabei die Impulse ihr Vorzeichen um, sonst bleibt alles andere gleich. Das bedeutet, daß für jeden leichten Propagator ein Faktor (-1) hinzukommt. Vorzeichenwechsel gibt es also bei den Graphen (0) und (3)–(10). Jedoch sind die Farbfaktoren neu zu berechnen, und es erweist sich als sinnvoll, diese zusätzlichen Vorzeichen in die Farbfaktoren zu integrieren. So ergibt sich für den Farbfaktor des Graphen (0) beispielsweise

$$\begin{aligned}
C_0 &= -q_1^{i'} (T^a)_{i'}{}^i q_2^{j'} (T^a)_{j'}{}^j Q^k \varepsilon_{ijk} = -\frac{1}{2} q_1^{i'} q_2^{j'} Q^k (\delta_{i'}^j \delta_j^i - \frac{1}{N_C} \delta_{i'}^i \delta_j^j) \varepsilon_{ijk} = \\
&= -\frac{1}{2} (q_1^j q_2^i - \frac{1}{N_C} q_1^i q_2^j) \varepsilon_{ijk} = \frac{N_C + 1}{2N_C} q_1^i q_2^j Q^k \varepsilon_{ijk} =: C_B q_1^i q_2^j Q^k \varepsilon_{ijk} \quad (9.35)
\end{aligned}$$

und insgesamt

$$\begin{aligned}
C_0 &= C_B, & C_1 &= C_B^2, & C_2 &= C_B(C_B - \frac{1}{2}C_A), \\
C_3 &= C_4 = C_B C_F, & C_5 &= C_6 = C_B(C_F - \frac{1}{2}C_A), & & (9.36) \\
C_7 &= C_B T_F N_f, & C_8 &= C_9 = C_B C_A, & C_{10} &= C_{11} = \frac{1}{2} C_B C_A.
\end{aligned}$$

Zu erkennen ist, daß sich bei Ersetzung von

$$C_B := \frac{N_C + 1}{2N_C} \quad (9.37)$$

durch C_F die Farbfaktoren des Mesons ergeben. Die verbleibenden „farblosten“ Beiträge sind dieselben wie im Fall des schweren Mesons und werden in Anhang E als Koeffizienten $b_i^{(hl)}$ aufgeführt. Mit ihnen ergibt sich für die Strahlungskorrektur zum Stromvertex die Summe

$$\Delta\Gamma^{(hl)} = \left(\lambda_I C_0 b_0^{(hl)} + \sum_{i=1}^{11} \lambda_I^2 C_i b_i^{(hl)} \right) \Gamma. \quad (9.38)$$

9.1.5 Korrekturen zum leichten Meson und Diquarksystem

Auch im Falle leichter Bestandteile unterscheiden sich die Beiträge des Mesons und des Diquarksystems nur um die Farbfaktoren, die im übrigen aus den Fällen mit einem schweren Quark der vorangegangenen Unterabschnitte übernommen werden können. Daher werden diese beiden Systeme hier gemeinsam behandelt. Als Beispiel soll hier lediglich der Graph (1) des leichten Mesons berechnet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1^{(ll)} &= \int \int (-ig_s \gamma_\alpha) \frac{i}{\not{k}} (-ig_s \gamma_\beta) \frac{i}{\not{l}} \Gamma \frac{i}{\not{l} + \not{p}} (-ig_s \gamma^\beta) \frac{i}{\not{k} + \not{p}} (-ig_s \gamma^\alpha) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{-i}{k^2} \right) \left(\frac{-i}{(k-l)^2} \right) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\ &= -g_s^4 \int \int \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta \not{l} \Gamma (\not{l} + \not{p}) \gamma^\beta (\not{k} + \not{p}) \gamma^\alpha \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{-1}{k^2} \right)^2 \left(\frac{-1}{l^2} \right) \left(\frac{-1}{(k-l)^2} \right) \left(\frac{-1}{(k+p)^2} \right) \left(\frac{-1}{(l+p)^2} \right) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Dieses Integral läßt sich auch hier aufteilen in seine Diracstruktur

$$\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \Gamma \gamma_\rho \gamma^\beta \gamma_\sigma \gamma^\alpha, \quad (9.40)$$

seine Impulsstruktur

$$k^\mu l^\nu (l+p)^\rho (k+p)^\sigma \quad (9.41)$$

und sein Stammintegral

$$\begin{aligned} \hat{b}_1^{(ll)} &= -g_s^4 \int \int \left(\frac{-1}{k^2} \right)^2 \left(\frac{-1}{l^2} \right) \left(\frac{-1}{(k-l)^2} \right) \left(\frac{-1}{(k+p)^2} \right) \left(\frac{-1}{(l+p)^2} \right) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\ &= \frac{g_s^4}{(4\pi)^n} \left(\frac{-1}{p^2} \right)^{6-n} G_5(2, 1, 1, 1, 1). \end{aligned} \quad (9.42)$$

Die Entwicklung des indizierten Integrals und die Reduktion der Diracstruktur wurde im letzten Kapitel als Beispiel besprochen. Das Ergebnis kann von dort übernommen werden, es ist

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1^{(ll)} &= 2(n-2)(E+H-D-I)\Gamma_1 + (F+G-E-H)\Gamma_3 + (C-B)\Gamma_4 + \\ &\quad + ((n-2)^2 A + (n-2)(D+I) + 2(3n-2)B + 4(E+H) + J)\Gamma_2, \end{aligned} \quad (9.43)$$

wobei in den Grundstrukturen Γ_i nun v durch den auf Eins normierten äußeren Restimpuls p zu ersetzen ist,

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \Gamma, & \Gamma_1 &= \frac{1}{p^2} \gamma_\mu \not{p} \Gamma \not{p} \gamma^\mu, & \Gamma_2 &= \gamma_\mu \gamma_\nu \Gamma \gamma^\nu \gamma^\mu, \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{p^2} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \not{p} \Gamma \not{p} \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \quad \text{und} \quad \Gamma_4 &= \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \Gamma \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu.\end{aligned}\quad (9.44)$$

Schreibt man $\tilde{b}_1^{(ll)}$ auf Kontraktionsintegrale um, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1^{(ll)} &= \frac{4(I_A - I_B) + 2n(I_E + I_H - I_F - I_G)}{n-2} \Gamma_1 + \\ &+ \frac{(n-5)I_A + 5I_B - I_C + 2(I_D + I_I - I_E - I_H)}{n-1} \Gamma_2 + \\ &+ \frac{2(I_B - I_C) + n(I_f + I_G - I_E - I_H)}{n-2} \Gamma_3 + \frac{I_C - I_B + I_E + I_H - I_F - I_G}{(n-1)(n-2)} \Gamma_4,\end{aligned}\quad (9.45)$$

I_J braucht also erst gar nicht berechnet zu werden. Aus der Impulsstruktur ergeben sich durch Kontraktion die Operatoren. So ergibt sich beispielsweise zu I_A die Zuordnung

$$(k \cdot l)(k \cdot l + k \cdot p + l \cdot p + p^2) \rightarrow \frac{1}{4}(-p^2)^2(\hat{C} - \hat{A} - \hat{B})(\hat{C} - \hat{D} - \hat{E}).\quad (9.46)$$

Alle Terme zusammengenommen liefern schließlich

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1^{(ll)} &= \frac{g_s^4}{(4\pi)^n} \left(\frac{-1}{p^2} \right)^{4-n} \cdot \\ &\cdot \left[\left(\frac{4(n-2)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)(n-1)} - \frac{4(n-2)(n^3 - 9n^2 + 20n - 4)Q_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)} \right) \Gamma_1 + \right. \\ &+ \left(\frac{(n^3 - 12n^2 + 52n - 72)Q_1^2}{2(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} - \frac{(n^4 - 13n^3 + 66n^2 - 168n + 176)Q_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)} \right) \Gamma_2 + \\ &+ \left(\frac{Q_1^2}{(n-4)(n-3)^2(n-1)} - \frac{2Q_2}{(n-4)(n-1)(3n-10)(3n-8)} \right) \Gamma_3 + \\ &+ \left. \left(\frac{Q_1^2}{2(n-4)^2(n-3)^2(n-1)} - \frac{Q_2}{(n-4)^2(n-1)(3n-10)(3n-8)} \right) \Gamma_4 \right] = \\ &=: \lambda_G^2 b_1^{(ll)} = \lambda_G^2 \sum_{j=0}^4 b_{1,j}^{(ll)} \Gamma_j, \quad \lambda_G := \frac{g_s^2}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{-1}{p^2} \right)^{(4-n)/2}.\end{aligned}\quad (9.47)$$

Dabei ist $Q_1 = \Gamma(1-\varepsilon)^2 \Gamma(1+\varepsilon) / \Gamma(1-2\varepsilon)$ und $Q_2 = \Gamma(1-\varepsilon)^3 \Gamma(1+2\varepsilon) / \Gamma(1-3\varepsilon)$. Für die Summe aller zwölf Diagramme ergibt sich (zusammen mit den Farbfaktoren C_i)

$$\Delta\Gamma^{(ll)} = \sum_{j=0}^4 \left(\lambda_G C_0 b_{0,j}^{(ll)} + \sum_{i=1}^{11} \lambda_G^2 C_i b_{i,j}^{(ll)} \right) \Gamma_j,\quad (9.48)$$

Eine Liste der nichtverschwindenden Koeffizienten $b_{i,j}^{(ll)}$ ist in Anhang E zu finden.

9.1.6 UV- und IR-Singularitäten

Bei der Berechnung der anomalen Dimension wird im nächsten Kapitel eine Entwicklung in dem Parameter $\varepsilon = (4 - n)/2$ durchgeführt. Die Pole dieser Entwicklung können sowohl eine Ultraviolett- als auch eine Infrarotsingularität darstellen. Betrachtet werden sollen am Ende jedoch nur die UV-Singularitäten, da nur diese in die Renormierungsgruppen-gleichung eingehen. Es ist daher Aufgabe, die IR-Singularitäten zu finden und durch entsprechende Subtraktionsterme zu beseitigen.

So scheint es beispielsweise, als habe der vierte doppelte Graph eine solche IR-Singularität. Das erkennt man durch Potenz-zählung für die inneren Impulse. Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4^{(ll)} &= \int \int (-ig_s \gamma_\alpha) \frac{i}{\not{k}} (-ig_s \gamma_\beta) \frac{i}{\not{k} - \not{l}} (-ig_s \gamma^\beta) \frac{i}{\not{k}} \Gamma \frac{i}{\not{k} + \not{p}} (-ig_s \gamma^\alpha) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{-i}{k^2} \right) \left(\frac{-i}{l^2} \right) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\ &= -g_s^4 \int \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta (\not{k} - \not{l}) \gamma^\beta \not{k} \Gamma (\not{k} + \not{p}) \gamma^\alpha \cdot \\ &\quad \left(\frac{-1}{k^2} \right)^3 \left(\frac{-1}{l^2} \right) \left(\frac{-1}{(k-l)^2} \right) \left(\frac{-1}{(k+p)^2} \right) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n}, \end{aligned} \quad (9.49)$$

als Stammintegral ergibt sich

$$\hat{b}_4^{(ll)} = \frac{g_s^4}{(4\pi)^n} \left(\frac{-1}{p^2} \right)^{6-n} G_5(3, 1, 1, 1, 1). \quad (9.50)$$

Einen entsprechender Subtraktionsterm erhält man, indem man den Integranden für kleine Werte von k betrachtet. Dann wird $(k - l)^2 \approx l^2$, also das Zweischleifenintegral $G_5(3, 1, 1, 1, 1)$ durch $G_5(4, 1, 0, 1, 1)$ ersetzt. Eine Rechnung mit dieser Ersetzung liefert jedoch einen verschwindenden Beitrag dieses Subtraktionsterms. Mit anderen Worten: die IR-Singularität wird gerade durch eine UV-Singularität aufgehoben.

9.2 Irreduzible Graphen

Baryonische Graphen, bei denen alle drei Beine durch Gluonen verbunden sind, werden als *irreduzible Graphen* bezeichnet. Sie können klarerweise erst in der zweiten Ordnung der Störungstheorie auftreten. Vier der möglichen Graphen sind in Abbildung 9.2 dargestellt, die restlichen drei ergeben sich durch Spiegelung der Graphen (1)–(3) an der (senkrecht dargestellten, doppelten) Linie des schweren Quarks. Für die Farbfaktoren ergibt sich

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_B^2 = C_5 = C_6 = C_7, \quad C_4 = 0. \quad (9.51)$$

Letzteres ist bemerkenswert, zeigt es doch, daß bereits von der Konstellation der Farben dieser Graph nicht beitragen kann. Für die Korrektur zum Stromvertex erhält man insgesamt

$$\Delta \Gamma^{(ir)} = \sum_{j=0}^4 \left(\sum_{i=1}^7 \lambda_G^2 C_i b_{i,j}^{(ir)} \right) \Gamma_j, \quad (9.52)$$

und die Koeffizienten $b_{i,j}^{(ir)}$ sind erneut in Anhang E zu finden, wobei auch hier der Beitrag zu Graph (4) verschwindet. Dagegen ist für Graph (3) eine gesonderte Behandlung erforderlich, denn hierbei handelt es sich um den Spezialfall, von dem in Kapitel 8 bereits die Rede war.

9.2.1 Behandlung der IR-Singularität

Läßt man im dritten Graphen neben dem äußeren Impuls auf der schweren Quarklinie auch diejenigen auf einer der leichten Quarklinien bestehen, beispielsweise auf derjenigen mit nur einer Gluonkopplung, so ergibt Potenzzählung der inneren Impulse in

$$\begin{aligned} \tilde{b}_3^{(ir)} &= \int \int (-ig_s \gamma_\alpha) \frac{i}{-k - \not{p}} \Gamma \frac{i}{k - \not{l}} (-ig_s \gamma_\beta) \frac{i}{k} (-ig_s \gamma^\alpha) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{i}{\omega + l \cdot v} (-ig_s v^\beta) \left(\frac{-i}{l^2} \right) \left(\frac{-i}{k^2} \right) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\ &= -\frac{g_s^4}{\omega} \int \int \gamma_\alpha (\not{k} + \not{p}) \Gamma (\not{k} - \not{l}) \not{p} \not{k} \gamma^\alpha \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{-1}{k^2} \right)^2 \left(\frac{-1}{l^2} \right) \left(\frac{-1}{(k-l)^2} \right) \left(\frac{-1}{(k+p)^2} \right) \frac{\omega}{\omega + l \cdot v} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \end{aligned} \quad (9.53)$$

einen Beitrag für k , der eine logarithmische Abhängigkeit von dem Quadrat dieses äußeren Impulses p besitzt. Er kann also nicht sogleich auf Null gesetzt werden, es liegt eine echte Dreipunktfunktion vor. Jedoch läßt sich ein Subtraktionsterm finden, der sich als Produkt zweier Zweipunktfunktionen schreiben läßt. Dieser ergibt sich für $l \ll k$ als

$$\begin{aligned} \tilde{b}_3^{0(ir)} &= \frac{g_s^4}{\omega} \int \int \gamma_\alpha (\not{k} + \not{p}) \Gamma \not{l} \not{p} \not{k} \gamma^\alpha \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{-1}{k^2} \right)^2 \left(\frac{-1}{l^2} \right)^2 \left(\frac{-1}{(k+p)^2} \right) \frac{\omega}{\omega + l \cdot v} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\ &= T_{\mu\nu\rho} I^\nu G^{\mu\rho} \end{aligned} \quad (9.54)$$

mit Diracstruktur $T_{\mu\nu\rho} := \gamma_\alpha \gamma_\mu \Gamma \gamma_\nu \not{p} \gamma_\rho \gamma^\alpha$ und

$$\begin{aligned} I^\nu &= ig_s^2 \int \left(\frac{-1}{l^2} \right)^2 \frac{l^\nu}{\omega + l \cdot v} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \dots = \lambda_I \frac{E_1}{n-4} v^\nu \quad \text{sowie} \\ G^{\mu\rho} &= ig_s^2 \int (k+p)^\mu k^\rho \left(\frac{-1}{k^2} \right)^2 \frac{-1}{(k+p)^2} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} = \dots = \lambda_G \left(\frac{g^{\mu\rho}}{n-4} + \frac{p^\mu p^\rho}{p^2} \right) \frac{Q_1}{n-3}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Insgesamt erhält man

$$\tilde{b}_3^{0(ir)} = -\lambda_I \lambda_G \frac{E_1 Q_1}{(n-3)(n-4)} \left(\Gamma_1 + \frac{\Gamma_2}{n-4} \right). \quad (9.56)$$

Die Differenz $\tilde{b}_3^{(ir)} - \tilde{b}_3^{0(ir)}$ ist nun IR-endlich, also kann dafür der Grenzfall $p \rightarrow 0$ vorgenommen werden. Berechnet man $\tilde{b}_3^{(ir)}$ und $\tilde{b}_3^{0(ir)}$ nach dem bisherigen Schema und berücksichtigt von letzterem nur die Polterme, so heben sich die IR-Pole heraus, und es bleibt der IR-endliche Beitrag des Graphen übrig.

Kapitel 10

Die anomale Dimension

Die Forderung der Renormierungsinvarianz besagt, daß jede physikalische Observable einen Wert annehmen muß, der unabhängig von der Renormierungsskala ist, welche bei ihrer Renormierung verwendet wurde. Diese physikalisch verständliche Forderung wurde 1953 und 1954 von verschiedenen Gruppen [25, 46] auch mathematisch in Angriff genommen und führte über verschiedene Zwischenschritte, die bereits in Unterabschnitt 6.3.4 erwähnt wurden, zur *Renormierungsgruppengleichung*. Renormierung besteht, so wurde in Kapitel 3 klar, aus zwei Teilen, nämlich der Subtraktion und der Regularisierung. Verglichen werden sollen durch die Renormierungsgruppengleichung hier nur verschiedene Subtraktionsverfahren, für die Regularisierung wird durchgehend die dimensionale Regularisierung verwendet. Leitfaden für die folgende Einführung ist der Artikel von Stephan Narison [28].

10.1 Die Renormierungsgruppengleichung

Physikalische Observable sind im quantenmechanischen Sinne Eigenwerte von Differentialgleichungen und hängen damit eng mit den Greenschen Funktionen zusammen, welche diese Differentialgleichungen lösen. Daher ist die Renormierungsgruppengleichung in der QCD eine Gleichung für eine allgemeine Greensche Funktion

$$\Gamma = \Gamma(\alpha_s, a, m_i; p_i), \quad (10.1)$$

welche von der Kopplungskonstanten α_s der starken Wechselwirkung, dem Eichparameter a , den Massen m_i der beteiligten Teilchen und ihren Viererimpulsen p_i abhängig ist. Bei dieser Greenschen Funktion handelt es sich zunächst nur um die nackte, d.h. unrenormierte Vorform, bei der die Störungstheorie zu Singularitäten führt. Die Singularitäten können jedoch durch einen *Renormierungsfaktor* Z_Γ gekürzt werden. Diesen Vorgang nennt man *Subtraktion*. Wie dieser Renormierungsfaktor aussieht, hängt vom Subtraktionsverfahren ab und hier insbesondere von der Subtraktions- oder *Renormierungsskala* μ . Die renormierte Greensche Funktion wird von diesem Parameter abhängig sein, es gilt

$$\Gamma^0(\alpha_s, a, m_i; p_i) = Z_\Gamma \Gamma(\mu, \alpha_s, a, m_i; p_i). \quad (10.2)$$

Die hochgestellte Null deutet an, daß es sich hier um die nackte Greensche Funktion handelt. Sie ist unabhängig von μ , also gilt insbesondere

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^0 = \mu \frac{d}{d\mu} (Z_\Gamma \Gamma), \quad (10.3)$$

und wenn man die renormierte Greensche Funktion einsetzt, ergibt sich

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + \mu \frac{da}{d\mu} \frac{\partial}{\partial a} + \sum_i \mu \frac{dm_i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m_i} + \frac{\mu}{Z_\Gamma} \frac{dZ_\Gamma}{d\mu} \right) \Gamma(\mu, \alpha_s, a, m_i; p_i) = 0. \quad (10.4)$$

Die Impulse p_i sind nicht von der Renormierungsskala μ abhängig, daher werden sie durch ein Semikolon vom Rest getrennt. Man führt Funktionen

$$\beta(\alpha_s) := \frac{\mu}{\alpha_s} \frac{d\alpha_s}{d\mu}, \quad \beta_a(\alpha_s) := \frac{\mu}{a} \frac{da}{d\mu}, \quad (10.5)$$

$$\gamma_{m_i}(\alpha_s) := -\frac{\mu}{m_i} \frac{dm_i}{d\mu} \quad \text{und} \quad \gamma_\Gamma(\alpha_s) := \frac{\mu}{Z_\Gamma} \frac{dZ_\Gamma}{d\mu} \quad (10.6)$$

ein, wobei die totalen Ableitungen für festgehaltene nackte Größen zu nehmen sind und so die Gleichung vereinfachen zu

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \alpha_s \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + a \beta_a(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial a} - \sum_i m_i \gamma_{m_i}(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial m_i} + \gamma_\Gamma \right) \Gamma(\mu, \alpha_s, a, m_i; p_i) = 0. \quad (10.7)$$

$\beta(\alpha_s)$ wird *Betafunktion* genannt, β_a ist entsprechend die Betafunktion des Eichparameters, γ_{m_i} und γ_Γ sind die *anormalen Dimensionen* der Massen bzw. der Greenschen Funktion. Die Gleichung wird lösbar, wenn sie keine explizite Abhängigkeit der Greenschen Funktion von der Renormierungsskala μ erforderlich macht. Man erreicht dies durch das Aufstellen einer zweiten Gleichung, in der die Impulse mit einem generellen Exponentialfaktor e^t multipliziert werden. Ist D die Massendimension der Greenschen Funktion, so ergibt sich aus Dimensionsüberlegungen und dem Eulerschen Theorem für homogene Funktionen

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_i m_i \frac{\partial}{\partial m_i} + \frac{\partial}{\partial t} - D \right) \Gamma(\mu, \alpha_s, a, m_i; e^t p_i) = 0, \quad (10.8)$$

und die Subtraktion beider Gleichungen liefert die Renormierungsgruppengleichung

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + a \beta_a(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial a} - \sum_i m_i (1 + \gamma_{m_i}) \frac{\partial}{\partial m_i} + D + \gamma_\Gamma(\alpha_s) \right) \Gamma(\mu, \alpha_s, a, m_i; e^t p_i) = 0 \quad (10.9)$$

für die Greensche Funktion, die formal gelöst wird durch

$$\Gamma(\mu, \alpha_s(\mu), a(\mu), m_i(\mu); e^t p_i) = \exp \left(Dt + \int_0^t \gamma_\Gamma(\bar{\alpha}_s(t')) dt' \right) \bar{\Gamma}(\bar{\alpha}_s, \bar{a}, \bar{m}_i; p_i). \quad (10.10)$$

10.1.1 Die laufende Kopplung

Wird der formale Lösungsansatz in die Renormierungsgruppengleichung (10.9) eingesetzt, so ergeben sich Renormierungsgruppengleichungen und Anfangsbedingungen auch für die

Parameter $\bar{\alpha}_s$, \bar{a} und \bar{m}_i ,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\alpha}_s}{dt} &= \bar{\alpha}_s \beta(\bar{\alpha}_s) & \text{mit } \bar{\alpha}_s(0) &= \alpha_s(\mu), \\ \frac{d\bar{a}}{dt} &= \bar{a} \beta_a(\bar{\alpha}_s) & \text{mit } \bar{a}(0) &= a(\mu) \quad \text{und} \end{aligned} \quad (10.11)$$

$$\frac{d\bar{m}_i}{dt} = -(1 + \gamma_{m_i}(\bar{\alpha}_s)) \bar{m}_i \quad \text{mit } \bar{m}_i(0) = m_i(\mu). \quad (10.12)$$

Gelöst werden soll zunächst das erste System. Durch Variablentrennung erhält man

$$t = \bar{t}(\bar{\alpha}_s) - \bar{t}(\alpha_s(\mu)) \quad \text{mit } \bar{t}(z) := \int \frac{dz}{z\beta(z)}. \quad (10.13)$$

Hierbei wurde eine Stammfunktion \bar{t} verwendet. Es zeigt sich, daß

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{2} \ln(\mu^2) - \bar{t}(\alpha_s(\mu)) \right) &= 1 - \bar{t}'(\alpha_s(\mu)) \mu \frac{d\alpha_s(\mu)}{d\mu} = \\ &= 1 - \frac{1}{\alpha_s(\mu) \beta(\alpha_s(\mu))} \alpha_s(\mu) \beta(\alpha_s(\mu)) = 0 \end{aligned} \quad (10.14)$$

gilt, der abgeleitete Ausdruck also eine Invariante der Renormierungsgruppengleichung ist. Dieser kann daher einer von der Skala μ unabhängigen Größe gleichgesetzt werden,

$$\frac{1}{2} \ln(\mu^2) - \bar{t}(\alpha_s(\mu)) = \frac{1}{2} \ln(\Lambda^2), \quad (10.15)$$

und damit ergibt sich schließlich

$$t = \bar{t}(\bar{\alpha}_s) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right). \quad (10.16)$$

Die Renormierungsgruppengleichung verknüpft nun die Kopplungen $\bar{\alpha}_s(t)$ für verschiedene Schwerpunktsenergien $\sqrt{q^2}$. So ist es sinnvoll, $t = \frac{1}{2} \ln(q^2/\mu^2)$ anzusetzen. Dann ergibt sich

$$\bar{t}(\bar{\alpha}_s) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{q^2}{\Lambda^2} \right). \quad (10.17)$$

Diese Gleichung soll in zwei aufeinanderfolgenden Ordnungen der Störungsreihe ausgewertet, d.h. nach $\bar{\alpha}_s$ umgestellt werden. Ausschlaggebend ist die Störungsreihe für die Betafunktion,

$$\beta(\alpha_s) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^m \beta_m = \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) \beta_1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \beta_2 + \dots, \quad (10.18)$$

wobei die ersten beiden Entwicklungskoeffizienten bereits in Unterabschnitt 6.3.4 angegeben sind. In erster Ordnung ergibt sich

$$\bar{t}(z) = \frac{4\pi}{\beta_1} \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{4\pi}{\beta_1 z} \quad (10.19)$$

und damit für $z = \bar{\alpha}_s$

$$\bar{\alpha}_s^{(1)}(q^2) = \frac{-4\pi}{\beta_1 \frac{1}{2} \ln(q^2/\Lambda^2)} =: -\frac{4\pi}{\beta_1 \tau}. \quad (10.20)$$

In zweiter Ordnung erhält man

$$\begin{aligned} \bar{t}(z) &= \frac{4\pi}{\beta_1} \int \frac{dz}{z^2} \left(1 + \frac{\beta_2 z}{4\pi\beta_1}\right)^{-1} = \\ &= \frac{4\pi}{\beta_1} \int \frac{dz}{z^2} - \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \int \frac{dz}{z} + \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \int \left(1 + \frac{\beta_2 z}{4\pi\beta_1}\right) \frac{\beta_2 dz}{4\pi\beta_1} = \\ &= -\frac{4\pi}{\beta_1 z} + \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \ln \left(\frac{1}{z} \left(1 + \frac{\beta_2 z}{4\pi\beta_1}\right) \right) \approx -\frac{4\pi}{\beta_1 z} + \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \ln \left(\frac{1}{z} \right). \end{aligned} \quad (10.21)$$

Im letzten Schritt wurde für kleine Werte von z entwickelt. Das gleiche Ergebnis hätte sich natürlich auch ergeben, wenn man bereits den Integranden entwickelt hätte. $t(\bar{\alpha}_s)$ ist nun gleich $\frac{1}{2} \ln(q^2/\Lambda^2)$ zu setzen. Die sich ergebende implizite Gleichung ist allerdings nur dann nach $\bar{\alpha}_s$ aufzulösen, wenn in den Logarithmus die erste Näherung eingesetzt wird. Praktischerweise wird für die Konstante

$$\frac{1}{2} \ln(\Lambda^2) = \frac{1}{2} \ln(\tilde{\Lambda}^2) - \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \ln \left(-\frac{\beta_1}{2\pi} \right) \quad (10.22)$$

gesetzt, wobei auch in der ersten Näherung Λ durch $\tilde{\Lambda}$ ersetzt wird. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi}{\beta_1 \bar{\alpha}_s} + \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \ln \left(-\frac{\beta_1 \tilde{\tau}}{4\pi} \right) &= \tilde{\tau} + \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \ln \left(-\frac{\beta_1}{4\pi} \right) \quad \text{mit} \quad \tilde{\tau} := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{q^2}{\tilde{\Lambda}^2} \right) \\ \Leftrightarrow \bar{\alpha}_s &= \frac{4\pi}{\beta_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1^2} \ln \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \right)^{-1} = -\frac{4\pi}{\beta_1 \tilde{\tau}} \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1^2 \tilde{\tau}} \ln \tilde{\tau} \right)^{-1} = \\ &\approx -\frac{4\pi}{\beta_1 \tilde{\tau}} \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1^2 \tilde{\tau}} \ln \tilde{\tau} \right). \end{aligned} \quad (10.23)$$

Bei der letzten Entwicklung wirkte die erste Näherung $-4\pi/\beta_1 \tilde{\tau}$ als Entwicklungsparameter. Die beiden Konstanten Λ und $\tilde{\Lambda}$ stehen über

$$\Lambda = \left(-\frac{\beta_1}{4\pi} \right)^{\beta_2/\beta_1^2} \tilde{\Lambda} \quad (10.24)$$

in Beziehung zueinander.

10.1.2 Zum Namen „anomale Dimension“

Aus der formalen Lösung (10.10) der Renormierungsgruppengleichung ergibt sich auch der Grund, warum der Faktor γ_Γ die Bezeichnung „anomale Dimension“ trägt. Zu erkennen ist nämlich, daß bei nichtverschwindendem γ_Γ die Massendimension D der Green'schen Funktion erhöht oder erniedrigt werden kann. Ähnliches gilt auch für die anomalen Dimensionen der Massen. Im nächsten Abschnitt soll die Verbindung zur anomalen Dimension eines beliebigen, durch einen Renormierungsfaktor Z renormierbaren Operators hergestellt werden.

10.2 Der Renormierungsfaktor

Bereits im ersten Teil dieser Arbeit wurde der Renormierungsfaktor Z eingeführt. Konnte in diesen Rechnungen in erster Ordnung der Störungstheorie dieser Faktor durch Faktorisierung bestimmt werden, so ist dies in höherer Ordnung nicht mehr möglich, denn diese Faktorisierung ist nun nicht mehr eindeutig. Stattdessen werden aus der Forderung, daß

$$A = Z_A^{-1} A^0 \quad (A^0 \text{ sei irgendein zu renormierender Operator}) \quad (10.25)$$

endlich ist, durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten der Entwicklung von Z in $1/\varepsilon$ und $\alpha_s/4\pi$ bestimmt. Ferner wird in diesem Abschnitt formal im minimalen Subtraktionsschema (MS) gearbeitet, da es die Rechnungen am übersichtlichsten macht. Der Terminus „formal“ bedeutet aber, daß die hier vorgestellten Rechnungen durchaus auch mit anderen Subtraktionsverfahren durchgeführt werden können. So treten im modifizierten minimalen Subtraktionsschema ($\overline{\text{MS}}$) an die Stelle der Terme $1/\varepsilon_{\text{MS}}$ und μ_{MS}^2 solche der Form

$$\frac{1}{\varepsilon_{\overline{\text{MS}}}} = \frac{1}{\varepsilon_{\text{MS}}} - \gamma_E + \ln(4\pi) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{\text{MS}} = (4-n)/2 \quad \text{bzw.} \quad \mu_{\overline{\text{MS}}}^2 = \mu_{\text{MS}}^2 \frac{e^{\gamma_E}}{4\pi}, \quad (10.26)$$

so daß sich die Rechnungen dieses Abschnittes in beidem Schemata verwenden lassen, wenn ε und μ entsprechend gewählt werden.

10.2.1 Von der Störungsreihe zum Renormierungsfaktor

Eine Störungsreihe, die vor der Renormierung im allgemeinen noch UV-divergent ist, läßt sich in dimensionaler Regularisierung zusätzlich noch in Potenzen von $1/\varepsilon$ entwickeln,

$$\begin{aligned} V^0 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^m V_m = V_0 + \frac{\alpha_s}{4\pi} V_1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 V_2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^m \frac{1}{\varepsilon^k} V_m^k = \\ &= V_0^0 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} V_1^1 + V_1^0\right) + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} V_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} V_2^1 + V_2^0\right) + \dots \end{aligned} \quad (10.27)$$

Dabei bleibe die Tatsache, daß die Kopplung α_s wie auch der noch nicht vorkommende Eichparameter a ebenfalls zu renormieren sind, zunächst unberücksichtigt. Die auftretenden Singularitäten sollen nun von einem Renormierungsfaktor Z_V absorbiert werden, und auch dieser wird in eine zweifache Summe entwickelt,

$$Z_V = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^m \frac{1}{\varepsilon^k} Z_m^k = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} Z_1^1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} Z_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} Z_2^1\right) + \dots \quad (10.28)$$

Um die Forderung $Z_V^{-1} V^0$ aufstellen zu können, muß das Inverse zu Z_V gebildet werden, und dies ergibt sich bei Entwicklung in $\alpha_s/4\pi$ zu

$$Z_V^{-1} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} Z_1^1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} (Z_1^1 Z_1^1 - Z_2^2) - \frac{1}{\varepsilon} Z_2^1\right) + \dots \quad (10.29)$$

Nun kann das Produkt gebildet werden, es liefert in zweiter Ordnung der Störungsreihe

$$\begin{aligned} Z_V^{-1} V^0 &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} (V_1^1 - Z_1^1) + V_1^0\right) + \\ &+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} (V_2^2 - V_1^1 Z_1^1 + Z_1^1 Z_1^1 - Z_2^2) + \frac{1}{\varepsilon} (V_2^1 - V_1^0 Z_1^1 - Z_2^1) + V_2^0\right) + \dots \end{aligned} \quad (10.30)$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} V_1^1 - Z_1^1 &= 0 \Rightarrow Z_1^1 = V_1^1, \\ V_2^2 - V_1^1 Z_1^1 + Z_1^1 Z_1^1 - Z_2^2 &= 0 \Rightarrow Z_2^2 = V_2^2 - V_1^1 Z_1^1 + Z_1^1 Z_1^1 = V_2^2, \\ V_2^1 - V_1^0 - Z_2^1 &= 0 \Rightarrow Z_2^1 = V_2^1 - V_1^0 Z_1^1 = V_2^1 - V_1^0 V_1^1. \end{aligned} \quad (10.31)$$

10.2.2 Die Renormierungsfaktoren zu α_s und a

Die Renormierungsfaktoren zu Kopplung und Eichparameter sind in der Literatur als Z_α bzw. Z_3 bekannt (Einschleifenresultate z.B. in [47]). Der Renormierungsfaktor zum Eichparameter ergibt sich aus den Selbstenergiegraphen des Gluons und liefert

$$Z_3 = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{13 - 3a}{6} C_A - \frac{4}{3} T_F N_f \right) =: 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} \delta_a. \quad (10.32)$$

Der Renormierungsfaktor zur Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung berechnet sich komplizierter, nämlich als Quotient aus den Renormierungsfaktoren zu den Zweipunkt- und Dreipunktfunctionen des Gluons. Die Zweipunktfunction besteht aus den Selbstenergiegraphen des Gluons, für die Dreipunktfunction ist

$$Z_1 = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{17 - 9a}{12} C_A - \frac{4}{3} T_F N_f \right). \quad (10.33)$$

Daraus ergibt sich in erster Ordnung der Störungsreihe

$$Z_\alpha := Z_1^2 Z_3^{-3} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} \left(-\frac{11}{3} C_A + \frac{4}{3} T_F N_f \right) =: 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} \delta_\alpha. \quad (10.34)$$

Bemerkenswert ist, daß der Eichparameter, der in Z_1 und Z_3 noch vorhanden war, herausfällt. Dieser Renormierungsfaktor ist also eichunabhängig. Mit Hilfe dieser Faktoren werden die unrenormierten Parameter a^0 und α_s^0 in n Raumzeit-Dimensionen in die renormierten Parameter a und α_s überführt. Man beachte, daß zu α_s noch ein dimensionaler Faktor $\mu^{2\varepsilon}$ zu treten hat. Damit werden beide renormierten Parameter von der Renormierungsskala μ abhängig. Als Argumente der Renormierungsfaktoren jedoch werden die Parameter $\alpha_s(\mu)$ und $a(\mu)$ in vier Raumzeit-Dimensionen verwendet, der dimensionale Faktor tritt hier nicht auf. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_s^0 &= \alpha_s(\mu) \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha(\alpha_s(\mu); \varepsilon) =: \alpha_s(\mu, \varepsilon) Z_\alpha(\alpha_s(\mu); \varepsilon), \\ a^0 &= a(\mu) Z_3(\alpha_s(\mu), a(\mu); \varepsilon). \end{aligned} \quad (10.35)$$

Die Betafunktionen zu Kopplung und Eichparameter, β bzw. β_a , können aus diesen Renormierungsfaktoren bestimmt werden, denn die Unabhängigkeit von α_s^0 und a^0 von μ bedingt, daß

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_s(\mu); \varepsilon) &= -\frac{d \ln Z_\alpha(\alpha_s(\mu); \varepsilon)}{d \ln \mu} \quad \text{und} \\ \beta_a(\alpha_s(\mu), a(\mu); \varepsilon) &= -\frac{d \ln Z_3(\alpha_s(\mu), a(\mu); \varepsilon)}{d \ln \mu} \quad \text{ist.} \end{aligned} \quad (10.36) \quad \left(\frac{\mu}{Z} \frac{dZ}{d\mu} = \frac{d \ln Z}{d \ln \mu} \right)$$

Um die Renormierung der Störungsreihe bezüglich der Parameter α_s und a vornehmen zu können, muß diese in Abhängigkeit von diesen, also insbesondere vom unrenormierten Eichparameter a^0 , dargestellt werden. Die später zu setzende Eichung bezieht sich dann nicht auf a^0 , sondern auf die renormierte Größe a . Läßt man also die Abhängigkeit von a^0 zu, so ergibt sich statt der im letzten Unterabschnitt aufgestellten und bereits bezüglich der Pole dieser Störungsreihe renormierten Form eine andere, nämlich

$$V = 1 + \frac{\alpha_s^0}{4\pi}(\bar{V}_1 + a^0\tilde{V}_1) + \left(\frac{\alpha_s^0}{4\pi}\right)(\bar{V}_2 + a^0\tilde{V}_2 + (a^0)^2\tilde{V}_2) + \dots \quad (10.37)$$

Da jedoch weiterhin bis zur zweiten Ordnung der Störungsreihe entwickelt wird, trägt nur die Renormierung von α_s und a zum Term erster Ordnung bei, es ergibt sich mit

$$\alpha_s^0 = \alpha_s \left(1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon}\delta_\alpha\right) \quad \text{und} \quad a^0 = a \left(1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon}\delta_a\right) \quad (10.38)$$

ein Zusatzterm zu Z_2^1 der Form

$$\Delta_2^1 = \delta_\alpha\bar{V}_1^0 + \delta_\alpha\tilde{V}_1^0 + \delta_a a\tilde{V}_1^0 = \delta_\alpha V_1^0 + \delta_a a\tilde{V}_1^0, \quad (10.39)$$

für Z_2^1 liefert dies in Feynman-Eichung

$$Z_2^1 = V_2^1 - V_1^0 V_1^1 + \Delta_2^1(a=1) = V_2^1 - V_1^0 V_1^1 + \delta_\alpha V_1^0 + \delta_a a\tilde{V}_1^0. \quad (10.40)$$

10.2.3 Vom Renormierungsfaktor zur anomalen Dimension

Wie bereits zuvor angemerkt, tritt zur renormierten Kopplungskonstanten α_s noch ein dimensionaler Faktor $\mu^{2\varepsilon}$. Dies bewirkt, daß diesem Parameter in n Raumzeit-Dimensionen eine zweifache Abhängigkeit von μ zukommt,

$$\alpha_s = \alpha_s(\mu, \varepsilon) = \alpha_s(\mu)\mu^{2\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \ln \alpha_s(\mu, \varepsilon) = \ln \alpha_s(\mu) + 2\varepsilon \ln \mu. \quad (10.41)$$

Damit ergibt sich für die Betafunktion

$$\beta = \beta(\alpha_s(\mu)) = \frac{d \ln \alpha_s(\mu, \varepsilon)}{d \ln \mu} = \frac{d \ln \alpha_s(\mu)}{d \ln \mu} + 2\varepsilon. \quad (10.42)$$

Für die Betafunktion zum Eichparameter erhält man dagegen

$$\beta_a = \beta_a(\alpha_s(\mu)) = \frac{d \ln a(\mu)}{d \ln \mu}. \quad (10.43)$$

Die *anomale Dimension* zu einem Operator A ist nun über dessen Renormierungsfaktor Z_A definiert als

$$\gamma_A := \frac{d \ln Z_A}{d \ln \mu} = \frac{1}{Z_A} \frac{d Z_A}{d \ln \mu} = \frac{\mu}{Z_A} \frac{d Z_A}{d \mu}. \quad (10.44)$$

Unter Auslassung der Indizes ergibt sich hier

$$\begin{aligned} \gamma_Z &= \frac{dZ(\alpha_s(\mu), a(\mu); \varepsilon)}{d \ln \mu} = \frac{\partial Z(\alpha_s, a; \varepsilon)}{\partial \ln \alpha_s} \frac{d \ln \alpha_s(\mu)}{d \ln \mu} + \frac{\partial Z(\alpha_s, a; \varepsilon)}{\partial \ln a} \frac{d \ln a(\mu)}{d \ln \mu} = \\ &= \frac{\partial Z}{\partial \ln \alpha_s}(\beta - 2\varepsilon) + \frac{\partial Z}{\partial \ln a} \beta_a. \end{aligned} \quad (10.45)$$

β , β_a und γ sind als endliche Größen unabhängig von ε . Daher kann in die letzte Gleichung die Reihenentwicklung

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^k} Z^k, \quad Z^0 = 1 \quad (10.46)$$

eingesetzt werden, es folgt dann durch Koeffizientenvergleich

$$\gamma Z^k = \frac{\partial Z^k}{\partial \ln \alpha_s} \beta + \frac{\partial Z^k}{\partial \ln a} \beta_a - 2 \frac{\partial Z^{k+1}}{\partial \ln \alpha_s}. \quad (10.47)$$

Diese Formel kann für verschiedene Werte von k ausgewertet werden. In einem zweiten Schritt werden β , β_a und γ jeweils in Störungsreihen entwickelt,

$$\beta = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^m \beta_m, \quad \beta_a = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^m (\beta_a)_m \quad \text{und} \quad \gamma = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^m \gamma_m, \quad (10.48)$$

und auch bezüglich dieser Entwicklung wird ein Koeffizientenvergleich vorgenommen (man beachte den Start der Reihen bei $m = 1$, was auch für γ sinnvoll ist). So ergibt sich für $k = 0$ zunächst

$$\gamma = -2 \frac{\partial Z^1}{\partial \ln \alpha_s} = -2 \alpha_s \frac{\partial Z^1}{\partial \alpha_s} \quad (10.49)$$

und damit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^m \gamma_m = -2 \sum_{m=0}^{\infty} m \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^m Z_m^1 \Rightarrow \gamma_m = -2m Z_m^1. \quad (10.50)$$

Diese wichtige Formel erlaubt eine Berechnung der anomalen Dimension jeder Ordnung aus den entsprechenden Koeffizienten des Renormierungsfaktors. Für $k = 1$ ergibt sich wiederum zunächst

$$\gamma Z^1 = \frac{\partial Z^1}{\partial \ln \alpha_s} \beta + \frac{\partial Z^1}{\partial \ln a} \beta_a - 2 \frac{\partial Z^2}{\partial \ln \alpha_s} \quad (10.51)$$

und durch Koeffizientenvergleich dann

$$-2p Z_p^2 = \sum_{m,n \geq 1}^{m+n=p} \left(\gamma_m - n \beta_m - (\beta_a)_m \frac{\partial}{\partial \ln a} \right) Z_n^1, \quad (10.52)$$

speziell in erster Ordnung der Störungsreihe mit $V_1^1 = \bar{V}_1^1 + a \tilde{V}_1^1$, den Entsprechungen $\beta_1 = 2\delta_\alpha$, $(\beta_a)_1 = 2\delta_a$ und in Feynman-Eichung schließlich

$$2V_2^2 = -\frac{1}{2} \left(\gamma_1 - \beta_1 - (\beta_a)_1 \frac{\partial}{\partial \ln a} \right) Z_1^1 = V_1^1 V_1^1 + \delta_\alpha V_1^1 + \delta_a \tilde{V}_1^1. \quad (10.53)$$

Es stellt sich heraus, daß mit dieser Gleichung ein Konsistenzkriterium für die Koeffizienten des Störungsreihe gefunden wurde. Einfachste Bedingung ist beispielsweise, daß mit V_1^1 auch V_2^2 verschwinden muß.

10.3 Die Renormierung der äußeren Beine

Die Berechnung der Renormierung der äußeren leichten und schweren Beine ist aus der Literatur bekannt [45, 48, 49, 50, 51]. Sie wird beschrieben durch Faktoren Z_q und Z_Q mit

$$q^0 = Z_q^{1/2} q, \quad Q^0 = Z_Q^{1/2} Q. \quad (10.54)$$

Die Wurzel hat historische Gründe und bewirkt, daß zur Berechnung der anomalen Dimension eben diese Wurzel des Renormierungsfaktors herangezogen werden muß. Für die Faktoren selbst ergibt sich zunächst in erster Ordnung

$$Z_q = 1 - a^0 \frac{\alpha_s^0}{4\pi\varepsilon} C_F \quad \text{und} \quad Z_Q = 1 + (3 - a^0) \frac{\alpha_s^0}{4\pi\varepsilon} C_F, \quad (10.55)$$

damit sind die entsprechenden anomalen Dimensionen gegeben durch

$$(\gamma_q)_1 = C_F a \quad \text{bzw.} \quad (\gamma_Q)_1 = C_F (a - 3). \quad (10.56)$$

In zweiter Ordnung kann auf die allgemeine Eichung zugunsten der Feynman-Eichung verzichtet werden, es ergibt sich hier

$$(\gamma_q)_2 = C_F \left(\frac{17}{2} C_A - \frac{3}{2} C_F - 2 T_F N_f \right), \quad (\gamma_Q)_2 = C_F \left(-\frac{38}{3} C_A + \frac{16}{3} T_F N_f \right). \quad (10.57)$$

10.4 Die anomale Dimension des baryonischen Stroms

Der nackte baryonische Stroms wird renormiert, indem sowohl die äußeren Beine als auch der Vertex (ausgedrückt durch die in Kürze eingeführte skalare Vertexfunktion V^0) renormiert wird,

$$J_0 = ((q^0)^T C V^0 \Gamma \tau q^0) \Gamma' Q^0 = Z_q Z_Q^{1/2} Z_V J = Z_J J. \quad (10.58)$$

Entsprechend ergibt sich für die anomale Dimension

$$\gamma_J = 2\gamma_q + \gamma_Q + \gamma_V. \quad (10.59)$$

Doch bevor die anomale Dimension des Vertex für die verschiedenen Untersysteme des Baryons berechnet wird, soll der skalare Anteil von der Diracstruktur getrennt werden. Dies ist möglich aufgrund der speziellen Wahl für Γ , wie es bereits in Kapitel 7 angesprochen wurde und hier vertieft werden soll.

10.4.1 Skalare Darstellung der Diracstruktur

Betrachtet man die fünf Grundstrukturen Γ_i für die Diracstruktur des leichten Anteils des Baryons, so erkennt man, daß sie aus ineinandergeschachtelten Elementen der Form $\gamma_\mu \Gamma \gamma^\mu$ und $\gamma_0 \Gamma \gamma_0$ bestehen, und man kann die Beziehungen

$$\gamma_\mu \Gamma \gamma^\mu = (-1)^{n_\gamma} (n - 2n_\gamma) \Gamma \quad \text{und} \quad \gamma_0 \Gamma \gamma_0 = (-1)^{n_\gamma} s_\gamma \Gamma \quad (10.60)$$

beweisen, wobei n die Raumzeitdimension, n_γ die Gesamtzahl der Diracschen Gammamatrizen und s_γ die Signatur für die Anzahl der Matrizen γ_0 in Γ angibt. Bei Hinzutreten der

Matrix γ_5 trifft man erneut auf das γ_5 -Problem, doch soll dieses erst im letzten Abschnitt des Kapitels besprochen werden. Zunächst kann jede der Grundstrukturen auf einen skalaren Faktor und die Matrix Γ zurückgeführt werden. Daher ist es möglich, die Matrix Γ abzuspalten,

$$\Gamma^{(a)} = \Gamma + \Delta\Gamma^{(a)} = (1 + \Delta V^{(a)})\Gamma = V^{(a)}\Gamma, \quad (10.61)$$

wobei a eine der Möglichkeiten hl , ll oder ir bezeichnet. Die skalare *Vertexfunktion* V ist dabei eine unrenormierte Größe, und auch für die Parameter α_s und a , die in der Entwicklung vorkommen, sind die nackten Parameter zu verwenden. Entwickelt man die Summen, die sich in Kapitel 9 ergaben, nach $\varepsilon = (4 - n)/2$, so liefert dies genau die Eingabe für die Bestimmung eines entsprechenden Renormierungsfaktors.

10.4.2 Anomale Dimension des schweren Diquarksystems

Für das schwere Diquarksystem, also das System aus einem leichten und einem schweren Quark, ergab sich für die Vertexfunktion in Kapitel 9

$$V^{(hl)} = 1 + \lambda_I C_0 b_0^{(hl)} + \sum_{i=1}^{11} \lambda_I^2 C_i b_i^{(hl)}. \quad (10.62)$$

Die einzelnen Koeffizienten $b_i^{(hl)}$ sind nun nach ε zu entwickeln. Dabei sind prinzipiell verschiedene Vorgehensweisen möglich. Zum einen können die Faktoren E_1 , E_2 und Q_2 relativ zu Q_1 entwickelt werden. Dies vereinfacht die Rechnung erheblich, da die Entwicklungen der einzelnen Faktoren sehr ähnlich sind. Außerdem ist der Faktor Q_1 bereits aus den masselosen Rechnungen des ersten Teils der Arbeit bekannt. Ein anderes Verfahren ist die Entwicklung in den Parameter $\varepsilon_{\overline{\text{MS}}}$ des modifizierten minimalen Subtraktionsschemas. Dieses Verfahren soll hier angewandt werden, wobei jedoch wie in den vorangegangenen Kapiteln statt $\varepsilon_{\overline{\text{MS}}}$ wieder ε geschrieben wird, um die Notation zu vereinfachen. Mit Hilfe dieser Entwicklung ergeben sich neben einem generellen Faktor

$$\lambda_I = \frac{g_s^2(\mu, \varepsilon)}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (-2\omega)^{-2\varepsilon} = \frac{g_s^2(\mu)}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left(\frac{-\mu}{2\omega} \right)^{2\varepsilon} \rightarrow \frac{g_s^2(\mu)}{(4\pi)^2} = \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \quad (10.63)$$

für die Einschleifen- und λ_I^2 für die Zweischleifenkorrekturen (als Grenzfall ist hier $\varepsilon \rightarrow 0$ angegeben) die Koeffizienten

$$\begin{aligned} V_1^1 &= C_B a, & V_1^0 &= 0, \\ V_2^2 &= C_B \left(\frac{1}{2} C_B - C_A \right), & V_2^1 &= -C_B \left(C_B (1 - 4\zeta(2)) - C_A (1 - \zeta(2)) \right). \end{aligned} \quad (10.64)$$

Dies läßt sich umrechnen auf die Renormierungsfaktoren

$$\begin{aligned} Z_1^1 &= V_1^1 = C_B a \quad \text{und} \\ Z_2^1 &= V_2^1 - V_1^0 V_1^1 + \delta_\alpha V_1^0 + \delta_a \tilde{V}_1^0 = -C_B \left(C_B (1 - 4\zeta(2)) - C_A (1 - \zeta(2)) \right), \end{aligned} \quad (10.65)$$

woraus sich schließlich die anomale Dimension

$$\gamma_V^{(hl)} = -2 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_B a + 4 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 C_B \left(C_B (1 - 4\zeta(2)) - C_A (1 - \zeta(2)) \right) + O(\alpha_s^3) \quad (10.66)$$

ergibt. Der mesonische Fall [45] läßt sich durch die Ersetzung $C_B \rightarrow C_F$ erreichen. Schließlich kann noch die Konsistenz in Gleichung (10.53) nachgewiesen werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} V_1^1 V_1^1 + \delta_\alpha V_1^1 + \delta_a \tilde{V}_1^1 &= C_B^2 + \left(-\frac{11}{3} C_A + \frac{4}{3} T_F N_f \right) C_B + \left(\frac{5}{3} C_A - \frac{4}{3} T_F N_f \right) C_B = \\ &= C_B(C_B - 2C_A) = 2V_2^2. \end{aligned} \quad (10.67)$$

10.4.3 Anomale Dimension des leichten Diquarksystems

Die unrenormierte Vertexfunktion ist hier

$$V^{(l)} = 1 + \sum_{j=0}^4 \left(\lambda_G C_0 b_{0,j}^{(l)} + \sum_{i=1}^{11} \lambda_G^2 C_i b_{i,j}^{(l)} \right) (s_\gamma (n - 2n_\gamma))^j, \quad (10.68)$$

und durch eine Entwicklung in ε erhält man neben einem generellen Faktor

$$\lambda_G = \frac{g_s^2(\mu, \varepsilon)}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left(\frac{-1}{p^2} \right)^{-\varepsilon} = \frac{g_s^2(\mu)}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left(\frac{-p^2}{\mu^2} \right)^\varepsilon \rightarrow \frac{g_s^2(\mu)}{(4\pi)^2} = \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \quad (10.69)$$

für die Einschleifen- bzw. λ_G^2 für die Zweischleifenkorrekturen die Koeffizienten

$$\begin{aligned} V_1^1 &= C_B \left((n_\gamma - 2)^2 + a - 1 \right), \\ V_1^0 &= C_B \left((n_\gamma - 2)^2 + (n_\gamma - 2)(s_\gamma + 2) + a - 1 \right), \\ V_2^2 &= \frac{C_B}{6} \left(3C_B (n_\gamma - 2)^4 - C_A (11n_\gamma^2 - 44n_\gamma + 39) + 4T_F N_f (n_\gamma - 3)(n_\gamma - 1) \right) \quad \text{und} \\ V_2^1 &= \frac{C_B}{36} \left(9C_B (13n_\gamma^4 - 96n_\gamma^3 + 248n_\gamma^2 - 256n_\gamma + 88 + 4(n_\gamma - 2)^3 s_\gamma) + \right. \\ &\quad \left. - 72C_F (n_\gamma - 3)(n_\gamma - 1) - C_A (18n_\gamma^4 - 144n_\gamma^3 + 289n_\gamma^2 + 128n_\gamma - 444) + \right. \\ &\quad \left. - 4T_F N_f (n_\gamma^2 - 16n_\gamma + 24) \right). \end{aligned} \quad (10.70)$$

Über die Koeffizienten des Renormierungsfaktors ergibt sich die anomale Dimension

$$\begin{aligned} \gamma_V^{(l)} &= -2 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_B \left((n_\gamma - 2)^2 + a - 1 \right) + \\ &\quad - \frac{1}{9} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 C_B \left(9C_B (5n_\gamma^4 - 40n_\gamma^3 + 104n_\gamma^2 - 96n_\gamma + 24 + 4(n_\gamma - 2)^3 s_\gamma) + \right. \\ &\quad \left. - 72C_F (n_\gamma - 3)(n_\gamma - 1) - C_A (18n_\gamma^4 - 144n_\gamma^3 + 289n_\gamma^2 + 128n_\gamma - 444) + \right. \\ &\quad \left. - 4T_F N_f (n_\gamma^2 - 16n_\gamma + 24) \right). \end{aligned} \quad (10.71)$$

Auch hier ist die Konsistenzbedingung (10.53) erfüllt, die anomale Dimension des leichten Mesons, wie sie in [45, 50, 51] bestimmt wurde, ergibt sich erneut durch die Ersetzung $C_B \rightarrow C_F$. Hinzuweisen ist darauf, daß die Umkehrung, also die Berechnung der baryonischen Beiträge aus den mesonischen, nicht möglich ist.

10.4.4 Anomale Dimension des irreduziblen Vertex

Zur Korrektur der unrenormierten Vertexfunktion tragen diese Graphen mit

$$\Delta V^{(ir)} = \sum_{j=0}^4 \left(\sum_{i=1}^7 \lambda_G^2 C_i b_{i,j}^{(ir)} \right) (s_\gamma (n - 2n_\gamma))^j \quad (10.72)$$

bei, es ergeben sich ein genereller Faktor λ_G^2 und die Koeffizienten

$$\begin{aligned} V_2^2 &= C_B^2 (2n_\gamma^2 - 8n_\gamma + 9), \\ V_2^1 &= \frac{C_B^2}{2} (9n_\gamma - 10 + 6s_\gamma)(n_\gamma - 2), \end{aligned} \quad (10.73)$$

damit schließlich die anomale Dimension

$$\gamma_V^{(ir)} = -2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 C_B^2 (9n_\gamma - 10 + 6s_\gamma)(n_\gamma - 2). \quad (10.74)$$

Interessant zu bemerken ist, daß die unrenormierte Vertexfunktion in der Zweischleifenordnung einen $1/\varepsilon^2$ -Pol besitzt, während aus verständlichen Gründen keine Einschleifenkorrekturen existieren, welche diese Singularität aufheben könnten. Daher liefert die Konsistenzbedingung (10.53) hier keine Identität. Ist man über diese Tatsache erstaunt, so vergißt man leicht, daß der irreduzible Vertex im Gegensatz zu den bisher behandelten Fällen kein in sich geschlossenes System darstellt, sondern immer nur in Verbindung mit den anderen Teilsystemen gesehen werden kann. Die Kürzung kommt daher auch durch das Wechselspiel zweier Pole erster Ordnung der schweren und leichten Teilgraphen in der Nichtlinearität von Gleichung (10.53) zustande, wie noch gezeigt werden wird.

10.4.5 Anomale Dimension des Baryons

Durch Addition aller Beiträge der Störungsreihe gemäß

$$V = 1 + 2\Delta V^{(hl)} + \Delta V^{(ll)} + \Delta V^{(ir)} \quad (\text{mit } \Delta V^{(a)} = V^{(a)} - 1) \quad (10.75)$$

beziehungsweise der entsprechenden anomalen Dimensionen

$$\gamma_V = 2\gamma_V^{(hl)} + \gamma_V^{(ll)} + \gamma_V^{(ir)} \quad (10.76)$$

ergibt sich schließlich die anomale Dimension

$$\begin{aligned} \gamma_V &= -2 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_B ((n_\gamma - 2)^2 + 3a - 1) + \\ &+ \frac{1}{9} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 C_B \left(C_A (18n_\gamma^4 - 144n_\gamma^3 + 289n_\gamma^2 + 128n_\gamma - 516 + 72\zeta(2)) + \right. \\ &- 9C_B (5n_\gamma^4 - 40n_\gamma^3 + 106n_\gamma^2 - 104n_\gamma + 24 + 4(n_\gamma - 2)s_\gamma + 32\zeta(2)) + \\ &\left. + 72C_F (n_\gamma - 3)(n_\gamma - 1) + 4T_F N_f (n_\gamma^2 - 16n_\gamma + 24) \right). \end{aligned} \quad (10.77)$$

Hier ist die Konsistenzbedingung (10.53) wieder erfüllt. Zur Berechnung der anomalen Dimension des Stroms müssen schließlich noch die anomalen Dimensionen der äußeren Beine hinzugerechnet werden. Zunächst bis zur ersten Ordnung gerechnet, ergibt sich hier

$$\gamma_J = \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(-2C_B ((n_\gamma - 2)^2 + 3a - 1) + 3C_F (a - 1) \right) + O(\alpha_s^2). \quad (10.78)$$

Setzt man hier die Werte $C_F = 4/3$ und $C_B = 2/3$ der QCD ein, so verschwindet die Abhängigkeit von der Eichung. Daher werden auch in zweiter Ordnung diese Werte sowie $C_A = 3$ und $T_F = 1/2$ explizit eingesetzt und die Feynman-Eichung verwendet. Doch bevor dies geschehen kann, muß noch eine wichtige Frage geklärt werden.

10.5 Beziehungen zwischen den Schemata

Die Ströme von Baryonen wie die des Λ -Baryons enthalten im allgemeinen die Matrix γ_5 . Wie schon vorher erwähnt, gibt es in $n \neq 4$ Dimensionen zwei verschiedene Schemata, diese Matrix zu behandeln, nämlich dasjenige nach 't Hooft, Veltman, Breitenlohner und Maison [17, 31], welches hier abkürzend mit dem Kürzel „HV“ versehen sei, und das Schema eines antivertauschenden γ_5 , hier mit „AC“ bezeichnet. Beide Schemata sind bereits in Kapitel 6 behandelt worden, und ihr Auftauchen in der Matrix Γ liefert grundsätzlich andere Regeln für die skalare Darstellung der Grundstrukturen Γ_i . Im 't Hooft-Veltmanschen Schema wird γ_5 aus $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2$ und γ^3 aufgebaut,

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}, \quad (10.79)$$

daher ergibt sich n_γ durch Subtraktion des ursprünglichen Wertes von 4. Gleichzeitig wechselt s_γ sein Vorzeichen, da eine weitere Matrix γ_0 mit ins Spiel kommt.

Im naiv antivertauschenden Schema dreht sich das Vorzeichen beider Regeln in (10.60) um. Diese Vorzeichenwechsel heben sich aber bei allen Grundstrukturen wieder auf. Die sich aus beiden Schemata ergebenden Werte für n_γ und s_γ sind der nebenstehenden Tabelle zu entnehmen. Gleichzeitig sind dort auch die Baryonen angegeben, denen diese Werte von Γ entsprechen. Eingesetzt in die Formel für γ_J ergeben sich die folgenden anomalen Dimensionen:

Γ	n_γ	s_γ	Baryonen
γ_5^{AC}	0	+1	Λ_1
$\gamma_5^{\text{AC}}\gamma_0$	1	-1	Λ_2
$\vec{\gamma}$	1	+1	Σ_1, Σ_1^*
$\gamma_0\vec{\gamma}$	2	-1	Σ_2, Σ_2^*
γ_5^{HV}	4	-1	Λ_1
$\gamma_5^{\text{HV}}\gamma_0$	3	+1	Λ_2

$$\begin{aligned} \gamma_{\Lambda 1}^{\text{AC}} &= -8 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) + \frac{1}{9}(16\zeta(2) + 40N_f - 796) \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2, \\ \gamma_{\Lambda 2}^{\text{AC}} &= -4 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) + \frac{1}{9}(16\zeta(2) + 20N_f - 322) \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2, \\ \gamma_{\Sigma 1} &= -4 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) + \frac{1}{9}(16\zeta(2) + 20N_f - 290) \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2, \\ \gamma_{\Sigma 2} &= -\frac{8}{3} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) + \frac{1}{27}(48\zeta(2) + 8N_f + 324) \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2, \\ \gamma_{\Lambda 1}^{\text{HV}} &= -8 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) + \frac{1}{9}(16\zeta(2) - 24N_f + 260) \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2, \\ \gamma_{\Lambda 2}^{\text{HV}} &= -4 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) + \frac{1}{9}(16\zeta(2) - 12N_f + 206) \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2. \end{aligned} \quad (10.80)$$

10.5.1 Die naive Nicht-Abelianisierung

An dieser Stelle kann eine Vorschrift getestet werden, die unter dem Namen „naive Nicht-Abelianisierung“ bekannt ist und die Größe der Zweischleifenkorrektur abschätzt, indem

sie im einfach zu berechnenden Beitrag der Diagramme mit einer leichten Quarkschleife die Zahl N_f durch $N_f - 33/2$ ersetzt. Die Qualität dieser Abschätzung zeigt sich auch hier in den meisten Fällen mit einem Fehler von 15 bis 30%. Nur im Fall des Stromes J_{Σ_2} (und damit auch $J_{\Sigma^*_2}$) ist die Abschätzung sehr schlecht. Jedoch ist die anomale Dimension in diesem Fall um eine Größenordnung kleiner als in den anderen Fällen.

10.5.2 Die endliche Renormierung

Interessanter ist die Beobachtung, daß die Differenz der anomalen Dimensionen zu den beiden verschiedenen γ_5 -Schemata eine Korrektur zweiter Ordnung darstellt, die zudem noch proportional zum Koeffizienten β_1 der Betafunktion ist. Diese Beobachtung legt es nahe, die beiden renormierten Ströme selbst durch einen endlichen Renormierungsfaktor in Beziehung zu setzen [52],

$$J^{\text{AC}}(\mu) = Z_{\Gamma} J^{\text{HV}}(\mu), \quad (10.81)$$

wobei der Index „ Γ “ andeutet, daß sich die Renormierung eben auf die explizite Gestalt von Γ bezieht. Die unrenormierten Ströme dagegen müssen natürlich übereinstimmen, da sonst eines der beiden Schemata seiner Funktion, die Rechnungen von 4 auf n Raumzeit-Dimensionen zu übertragen, nicht nachkäme. Dies beides liefert die Beziehung

$$Z_{J^{\text{HV}}} = Z_{J^{\text{AC}}} Z_{\Gamma} \quad (10.82)$$

zwischen den Renormierungsfaktoren und damit

$$\gamma_{\Gamma} = \frac{d \ln Z_{\Gamma}}{d \ln \mu} = \gamma_{J^{\text{HV}}} - \gamma_{J^{\text{AC}}} =: O_{\Gamma} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2. \quad (10.83)$$

Setzt man $Z_{\Gamma} = A_{\Gamma}(\alpha_s(\mu)/4\pi)$ an, so ergibt sich andererseits

$$\mu \frac{dZ_{\Gamma}}{d\mu} = A_{\Gamma} \frac{\mu}{4\pi} \frac{d\alpha_s(\mu)}{d\mu} = A_{\Gamma} \frac{\alpha_s}{4\pi} \beta(\alpha_s). \quad (10.84)$$

Der Vergleich beider Ergebnisse liefert in niedrigster Ordnung der Störungsreihe nun tatsächlich die Proportionalität zu β_1 , $A_{\Gamma} \beta_1 = O_{\Gamma}$. Mit

$$\begin{aligned} O_{\gamma_5} &= \frac{16}{3} C_B (11C_A - 4T_F N_f), \\ O_{\gamma_5 \gamma_i} &= O_{\gamma_5 \gamma_0} = \frac{8}{3} C_B (11C_A - 4T_F N_f) \quad \text{und} \\ O_{\gamma_5 \gamma_i \gamma_j} &= O_{\gamma_5 \gamma_i \gamma_0} = 0 \end{aligned} \quad (10.85)$$

ergibt sich

$$Z_{\gamma_5} = 1 - 8 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_B, \quad Z_{\gamma_5 \gamma_i} = Z_{\gamma_5 \gamma_0} = 1 - 4 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_B \quad \text{und} \quad Z_{\gamma_5 \gamma_i \gamma_j} = Z_{\gamma_5 \gamma_i \gamma_0} = 0. \quad (10.86)$$

Die Vertexstrukturen $\Gamma = \gamma_5 \gamma_i$, $\gamma_5 \gamma_i \gamma_j$ und $\gamma_5 \gamma_i \gamma_0$ sind der Vollständigkeit halber mit diskutiert, obwohl die sich nicht in den hier betrachteten baryonischen s -Wellenzuständen widerspiegeln. Der bereits von anderen Autoren [52] berechnete mesonische Fall ergibt sich erneut durch die Ersetzung $C_B \rightarrow C_F$.

10.6 Renormierungsgruppeninvarianter Strom

Bereits im ersten Abschnitt wurde ausführlich auf die Renormierungsgruppe eingegangen. Hier soll das Prinzip noch einmal für einen Strom J vorgeführt werden, um dann zu einem Strom zu gelangen, der eine Invariante der Renormierungsgruppe ist oder, wie man auch sagt, eine Verbesserung des Stroms durch die Renormierungsgruppe darstellt. Die Renormierungsgruppe für den Stromoperator J ergibt sich aus der Tatsache, daß der nackte Strom $J^0 = Z_J J$ nicht von der Renormierungsskala μ abhängig ist,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d \ln J^0}{d \ln \mu} = \frac{d \ln Z_J}{d \ln \mu} + \frac{d \ln J}{d \ln \mu} = \gamma_J + \frac{\mu}{J} \frac{dJ}{d\mu} \\ &\Leftrightarrow \left(\mu \frac{d}{d\mu} + \gamma_J \right) J(\mu) = 0. \end{aligned} \quad (10.87)$$

Ein invarianter Strom läßt sich nun konstruieren, indem mit einem *Wilson-Koeffizienten* $C(\alpha_s(\mu))$ multipliziert wird. Wie angedeutet, soll dieser Koeffizient nur über die starke Kopplung von der Skala abhängen. Aus der Forderung der Invarianz des so konstruierten Stroms $J_{\text{inv}} := J(\mu)C(\alpha_s(\mu))$ ergibt sich dann eine Differentialgleichung für den Wilson-Koeffizienten,

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} J_{\text{inv}} \Rightarrow \left(\mu \frac{d}{d\mu} - \gamma_J \right) C(\alpha_s(\mu)) = 0, \quad (10.88)$$

welche sich umschreiben läßt in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left(\alpha_s \beta(\alpha_s) \frac{d}{d\alpha_s} - \gamma_J(\alpha_s) \right) C(\alpha_s) = 0. \quad (10.89)$$

Die formale Lösung dieser Gleichung ist

$$C(\alpha_s(\mu)) = \exp \left(\int^{\alpha_s(\mu)} \frac{\gamma_J(\alpha) d\alpha}{\beta(\alpha) \alpha} \right), \quad (10.90)$$

und entwickelt man die Betafunktion und die anomale Dimension des Stroms bis zur zweiten Ordnung,

$$\beta(\alpha) = \beta_1 \frac{\alpha}{4\pi} + \beta_2 \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right)^2 + \dots = \beta_1 \frac{\alpha}{4\pi} \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\alpha}{4\pi} + \dots \right), \quad (10.91)$$

$$\gamma_J(\alpha) = \gamma_1 \frac{\alpha}{4\pi} + \gamma_2 \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right)^2 + \dots = \gamma_1 \frac{\alpha}{4\pi} \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\alpha}{4\pi} + \dots \right), \quad (10.92)$$

so ergibt sich in dieser Ordnung

$$\int^{\alpha_s(\mu)} \frac{\gamma_J(\alpha) d\alpha}{\beta(\alpha) \alpha} = \frac{\gamma_1}{\beta_1} \ln(\alpha_s(\mu)) + \frac{\gamma_1}{\beta_1} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \quad (10.93)$$

und damit

$$C(\alpha_s(\mu)) \approx \alpha_s(\mu)^{\gamma_1/\beta_1} \left(1 + \frac{\gamma_1}{\beta_1} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right). \quad (10.94)$$

Eine Verbindung zwischen Strömen zu verschiedenen Skalenwerten, also das *Evolutionsverhalten* des Stromes, ergibt sich ebenfalls aus der Invarianz der konstruierten Größe J_{inv} ,

$$\begin{aligned} J_{\text{inv}} &= J(\mu_2)C(\alpha_s(\mu_2)) = J(\mu_1)C(\alpha_s(\mu_1)) \quad \Rightarrow \\ J(\mu_2) &= J(\mu_1)C(\alpha_s(\mu_1))C(\alpha_s(\mu_2))^{-1} =: J(\mu_1)U(\mu_1, \mu_2) \end{aligned} \quad (10.95)$$

mit

$$\begin{aligned} U(\mu_1, \mu_2) &= \exp \left(\int_{\alpha_s(\mu_2)}^{\alpha_s(\mu_1)} \frac{\gamma_J(\alpha) d\alpha}{\beta(\alpha) \alpha} \right) = \\ &\approx \left(\frac{\alpha_s(\mu_1)}{\alpha_s(\mu_2)} \right)^{\gamma_1/\beta_1} \left(1 + \frac{\gamma_1}{\beta_1} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \frac{\alpha_s(\mu_1) - \alpha_s(\mu_2)}{4\pi} \right). \end{aligned} \quad (10.96)$$

Man erkennt an dieser Formel, daß zur Berechnung der Invariante eines Korrelators in erster Ordnung der Störungsreihe die Kenntnis der anomalen Dimension zweiter Ordnung erforderlich ist, wie bereits zwei Kapitel zuvor angedeutet.

Kapitel 11

Zweipunktkorrelatoren

Der Korrelator Π zweier baryonischer Ströme, auch als *Zweipunktkorrelator* bezeichnet, bildet den Ausgangspunkt für die Aufstellung der Summenregeln, daher ist ihm dieses Kapitel gewidmet. Ein Korrelator verknüpft allgemein die den schweren Baryonen zugeordneten Ströme an raumzeitlich getrennten Punkten miteinander. Zu beachten ist dabei, daß zu jedem Grundzustandsbaryon zwei *interpolierende Ströme* J_1 und J_2 (der Vertexstruktur Γ_1 bzw. $\Gamma_2 = \Gamma_1 \not{v}$) mit denselben Quantenzahlen existieren. Daher wird im Korrelator jeder der beteiligten Ströme im allgemeinen aus der Linearkombination $J = aJ_1 + (1-a)J_2$ der beiden interpolierenden Ströme gebildet. Der allgemeine Korrelator besteht also aus Anteilen mit gleichen interpolierenden Strömen, den *diagonalen Korrelatoren* Π_{11} und Π_{22} , und einem Anteil mit verschiedenen interpolierenden Strömen, dem *nichtdiagonalen Korrelator* $\Pi_{12} = \Pi_{21}$. Diese Aufspaltung wird erst für die konkrete Rechnung wichtig.

Die Darstellung des Zweipunktkorrelators im Impulsraum ist gegeben als

$$\Pi(\omega = p \cdot v) = i \int \langle 0 | T \{ J(x) \bar{J}(0) \} | 0 \rangle e^{ipx} d^4x \quad (11.1)$$

und kann aufgespalten werden in eine skalare *Korrelatorfunktion* $P(\omega)$ und einen spinor-abhängigen Anteil,

$$\Pi(\omega) = \Gamma' \frac{1 + \not{v}}{2} \bar{\Gamma}' \frac{1}{4} \text{Sp}(\Gamma \bar{\Gamma}) 2 \text{Sp}(\tau \tau^\dagger) P(\omega), \quad (11.2)$$

wobei Γ , Γ' und τ für die jeweiligen Ströme in Gleichung (7.20) definiert sind.

11.1 Die Operatorproduktentwicklung

Der Korrelator wird zunächst in einem unphysikalischen Bereich $-\omega \approx 1 - 2 \text{ GeV}$ berechnet und enthält perturbative und nichtperturbative Anteile. Letztere können im allgemeinen groß sein, und ihnen wird Rechnung getragen durch die Entwicklung des zeitgeordneten Produktes der Ströme in eine Potenzreihe bezüglich der *Massendimension* d . Diese *Operatorproduktentwicklung* (OPE) [53] schreibt sich als

$$T \{ J(x) \bar{J}(0) \} = \sum_d C_d(x^2) O_d, \quad (11.3)$$

wobei die Operatoren O_d lokale Operatoren der gegebenen Dimension und $C_d(x^2)$ die entsprechenden Wilson-Koeffizienten der OPE sind. Abbildung 11.1 zeigt die ersten sechs

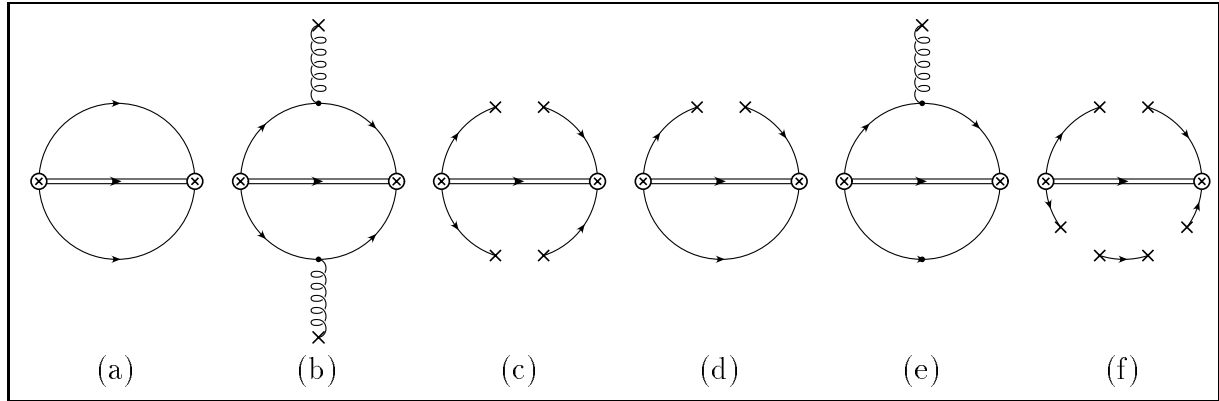


Abbildung 11.1: Führende Graphen zur Operatorproduktentwicklung

Terme der Operatorproduktentwicklung. Diese Graphen wurden in Ortsdarstellung in der Fixpunkteichung $x^\mu A_\mu(x)$ berechnet [43, 54, 55] und ergaben ohne radiative Korrekturen

$$P_a(t) = -\tilde{S}(t) \frac{N_C!}{\pi^4 t^6}, \quad (11.4)$$

$$P_b(t) = -\tilde{S}(t) \frac{c\alpha_s \langle GG \rangle N_C!}{32\pi^3 N_C (N_C - 1) t^2}, \quad (11.5)$$

$$P_c(t) = \tilde{S}(t) \frac{N_C!}{4N_C^2} \langle \bar{q}(0)q(t) \rangle^2, \quad (11.6)$$

$$P_d(t) = -i\tilde{S}(t) \frac{N_C!}{\pi^2 N_C t^3} \langle q(0)q(t) \rangle, \quad (11.7)$$

$$P_e(t) = i\tilde{S}(t) \frac{cN_C!}{\pi^2 N_C (N_C - 1) t^3} (\langle \bar{q}(0)q(t) \rangle - \langle \bar{q}q \rangle) \quad \text{und} \quad (11.8)$$

$$P_f(t) = i\tilde{S}(t) \frac{\pi\alpha_s C_F N_C! t^3}{144N_C^3} \langle \bar{q}q \rangle^3. \quad (11.9)$$

Dabei ist $\tilde{S}(t) = i\theta(t)$ ($\theta(t)$ ist der Propagator des schweren Quarks ohne Spinoranteile im Ortsraum), $\langle GG \rangle$ das *Gluonkondensat* und $\langle \bar{q}(0)q(t) \rangle$ das nichtlokale *Quarkkondensat*, das sich um $\langle \bar{q}q \rangle := \langle \bar{q}(0)q(0) \rangle$ entwickeln läßt,

$$\langle \bar{q}(0)q(t) \rangle = \langle \bar{q}q \rangle \left(1 + \frac{m_0^2 t^2}{16} + \frac{\pi\alpha_s \langle GG \rangle t^4}{96N_C} + \dots \right). \quad (11.10)$$

Möglich ist auch eine Entwicklung in eine Exponentialreihe [56]

$$\langle \bar{q}(0)q(t) \rangle = \langle \bar{q}q \rangle \exp\left(\frac{m_0^2 t^2}{16}\right), \quad (11.11)$$

deren Term zur Ordnung t^4 dreimal so groß ausfällt. Für die Kondensate liegen numerische Standardwerte (für $\mu = 1 \text{ GeV}$) vor [57, 58],

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}q \rangle &\approx -(0.23 \text{ GeV})^3, \\ \alpha_s \langle GG \rangle &\approx 0.04 \text{ GeV}^4 \quad \text{und} \\ g_s \langle \bar{q}\sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} q \rangle &=: m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle \quad \text{mit} \quad m_0^2 \approx 0.8 \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Diese Werte haben sich aus der Analyse einer Vielzahl hadronischer Systeme mittels der QCD-Summenregeln ergeben und sind zu einer Genauigkeit von ungefähr 30% bekannt. Schließlich bezeichnet c die Baryonfamilie, $c = 1$ steht für die Λ_Q -Baryonen und $c = -1/3$ für das Baryondublett $\{\Sigma_Q, \Sigma_Q^*\}$. Zu beachten ist, daß das Vierquarkkondensat in $P_c(t)$ näherungsweise in ein Produkt aus zwei Zweiquarkkondensaten zerlegt werden kann [57]. All diese Graphen fügen sich in die Operatorproduktentwicklung ein, wenn man sie gemäß

$$O_0 = \hat{1}, \quad O_3 = \langle \bar{q}q \rangle, \quad O_4 = \langle GG \rangle, \quad O_5 = m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle, \quad \dots \quad (11.13)$$

sortiert und die sich ergebenden Koeffizienten als Wilson-Koeffizienten interpretiert. Zu beachten ist jedoch, daß aufgrund der Diracstruktur die Graphen (a–c) mit geradzahligem Massendimension zu den diagonalen und die Graphen (d–f) mit ungeradzahligem Massendimension zum nichtdiagonalen Korrelator beitragen.

11.2 Die Spektraldichte

Die skalare Korrelatorfunktion $P(\omega)$, die für positive reelle Werte von ω Pole vom Grundzustand und den angeregten Zuständen besitzt, erfüllt für negative reelle Werte von ω die *Dispersionsrelation* [59]

$$P(\omega) = \int_0^\infty \frac{\rho(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega - i0}. \quad (11.14)$$

Der Imaginärteil $\rho(\omega) := \text{Im}(P(\omega))/\pi$ wird als *Spektraldichte* bezeichnet. Eine Fouriertransformation der Korrelatorfunktion in Gleichung (11.14) führt auf

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty P(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = i\theta(t) \int_0^\infty \rho(\omega) e^{-i\omega t} d\omega =: \tilde{S}(t) \tilde{P}(t). \quad (11.15)$$

Diese Korrelatorfunktion ist derjenigen der Operatorproduktentwicklung gleichzusetzen, um die entsprechende Spektraldichte zu erhalten. Zusätzliche polynomiale Terme in ω , durchaus in Gleichung (11.14) auf der rechten Seite denkbar, können jedoch nicht auftreten, da ihre Fouriertransformation die Deltafunktion $\delta(t)$ und ihre Ableitungen liefern würde, welche in der Operatorproduktentwicklung nicht erscheinen. $\tilde{P}(t)$ kann nun zu imaginären Zeiten $t = -i\tau$ analytisch fortgesetzt werden und liefert so eine Laplace-Transformation

$$\tilde{P}(-i\tau) = \int_0^\infty \rho(\omega) e^{-\omega\tau} d\omega, \quad (11.16)$$

und ihr Inverses bestimmt sich als

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{P}(-i\tau) e^{\omega\tau} d\tau, \quad (11.17)$$

wobei c eine reelle Konstante ist, die größer als alle Pole von $P(t)$ gewählt wird. In der Operatorproduktentwicklung treten nur ein- oder mehrfache Pole in $t = 0$ auf, und es ist leicht nachzurechnen, daß für $n \geq 0$ Terme wie $\tilde{P}(t) = 1/t^{n+1}$ Spektraldichten der Form $\rho(\omega) = i^{n+1} \theta(\omega) \omega^n / n!$ liefern, während sich polynomiale Terme der Form $\tilde{P}(t) = t^n$ als Distributionen $\rho(\omega) = (-i)^n \delta^{(n)}(\omega - 0)$ niederschlagen, wie die umgekehrte Rechnung mit Gleichung (11.16) zeigt. Diese polynomialen Anteile sollen formal zu einem Term P_{pc} (“pc” steht für “power counting”) zusammengefaßt werden, denn es wird sich im nächsten

Kapitel zeigen, daß sie nach der dort eingeführten Borel-Transformation Termen entsprechen, die durch einfache Substitution aus den Termen der Operatorproduktentwicklung ohne den „Umweg“ über die Laplace-Transformation gebildet werden können. Ohne diese Terme ergibt sich für $N_C = 3$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0(t) &= -\frac{N_C!}{\pi^4 t^6} \Rightarrow \rho_0^{(0)}(\omega) = \frac{\omega^5}{20\pi^4}, \\
\tilde{P}_3(t) &= -i\frac{N_C!\langle\bar{q}q\rangle}{\pi^2 N_C t^3} \Rightarrow \rho_3^{(0)}(\omega) = -\frac{\langle\bar{q}q\rangle\omega^2}{\pi^2}, \\
\tilde{P}_4(t) &= -\frac{c\alpha_s\langle GG\rangle N_C!}{32\pi^3 N_C(N_C-1)t^2} \Rightarrow \rho_4^{(0)}(\omega) = \frac{c\alpha_s\langle GG\rangle\omega}{32\pi^3} \quad \text{und} \\
\tilde{P}_5(t) &= -i\frac{N_C!m_0^2\langle\bar{q}q\rangle}{16\pi^2 N_C t} \left(1 - \frac{c}{N_C-1}\right) \Rightarrow \rho_5^{(0)}(\omega) = \frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle}{8\pi^2} \left(1 - \frac{c}{2}\right).
\end{aligned} \tag{11.18}$$

11.3 Strahlungskorrigierter diagonaler Korrelator

Der Hauptteil der Arbeit dieses zweiten Teils bestand in der Berechnung von Strahlungskorrekturen sowohl zum führenden diagonalen wie zum führenden nichtdiagonalen Korrelatorterm. Das Programmpaket, welches zur Berechnung der Zweischleifen-Strahlungskorrekturen Verwendung fand, erwies sich dabei als ausbaufähig, auch Korrelatoren zu berechnen. Wesentliche Änderungen bestanden in der Einführung von zwei statt einem Stromvertex und in der Behandlung der hier erforderlichen Dreischleifenordnung. Es zeigte sich, daß die Dreischleifenintegrale sich in ein „inneres“ Zweischleifenintegral und ein „äußeres“ Integral zerlegen ließen. Dazu war aber eine Schachtelung der Strukturen notwendig. Besondere Methoden verlangte dabei die Diracstruktur, bei der die Berechnung des inneren Schleifenintegrals noch Freiheitsgrade für das äußere Integral offenhalten mußte. Diesem Problem, der Konstruktion einer *Pre-Diracstruktur*, soll daher gesondertes Augenmerk geschenkt werden.

11.3.1 Konstruktion der Pre-Diracstruktur

Ziel dieser Konstruktion ist es, die kovariante Entwicklung der zu berechnenden Integrale umzuordnen, wenn noch die Integration über einen Entwicklungsvektor (der hier als $u = p/\sqrt{p^2}$ bezeichnet wird) aussteht. Ein typisches Beispiel für ein solches Integral ist

$$\text{Sp}(\bar{\Gamma}\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\Gamma\gamma^\alpha\gamma_\rho\not{p}\not{\psi}) \iint \left(\frac{-1}{k^2}\right) \left(\frac{-1}{l^2}\right) \left(\frac{-1}{(k+p)^2}\right) k^\mu(k+p)^\nu l^\rho \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n}. \tag{11.19}$$

Dieses Integral werde symbolisch geschrieben als $Q(u) = [\mu, \nu, \rho, \psi]Q^{\mu\nu\rho}(u)$, und die kovariante Entwicklung von $Q^{\mu\nu\rho}(u)$ in u ist gegeben als

$$Q^{\mu\nu\rho}(u) = g^{\mu\nu}u^\rho A_3(u) + g^{\mu\rho}u^\nu B_3(u) + g^{\nu\rho}u^\mu C_3(u) + u^\mu u^\nu u^\rho D_3(u), \tag{11.20}$$

wobei der Index an den Koeffizienten die Anzahl der Lorentzindizes andeutet. Mit dieser Entwicklung ergibt sich

$$Q(u) = [\mu, \mu, \psi, \psi]A_3(u) + [\mu, \psi, \mu, \psi]B_3(u) - [\psi, \nu, \nu, \psi]C_3(u) + [\psi, \psi, \psi, \psi]D_3(u). \tag{11.21}$$

Diese Entwicklung kann auf eine Entwicklung mit vier freien Indizes projiziert werden, die gegeben ist als

$$\begin{aligned}
Q(u) &= [\mu, \nu, \rho, \sigma] Q^{\mu\nu\rho\sigma}(u) = [\mu, \mu, \rho, \rho] A_4(u) + [\mu\nu, \mu, \nu] B_4(u) + [\mu, \nu, \nu, \mu] C_4(u) + \\
&+ [\mu, \mu, \psi, \psi] D_4(u) + [\mu, \psi, \mu, \psi] E_4(u) + [\mu, \psi, \psi, \mu] F_4(u) + [\psi, \nu, \nu, \psi] G_4(u) + \\
&+ [\psi, \nu, \psi, \nu] H_4(u) + [\psi, \psi, \rho, \rho] I_4(u) + [\psi, \psi, \psi, \psi] J_4(u).
\end{aligned} \tag{11.22}$$

Die Zuordnung

$$A_3 \rightarrow D_4, \quad B_3 \rightarrow E_4, \quad C_3 \rightarrow G_4 \quad \text{und} \quad D_3 \rightarrow J_4, \tag{11.23}$$

die sich durch Anhängen eines unkontrahierten Index ergibt, ist eindeutig. Aus diesem Grunde kann gleich der Fall mit vier Indizes betrachtet werden. Eine Integration über den noch ausstehenden Entwicklungsparameter u führt für $Q(u)$ erneut zu einer Entwicklung, diesmal jedoch in den Entwicklungsvektor v . Der Trick besteht nun darin, daß diese Entwicklung bereits vor der Integration vollzogen werden kann (daher der Name „Pre-Diracstruktur“). So ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned}
\int [\mu, \mu, \psi, \psi] D_4(u) &= [\mu, \mu, \rho, \sigma] \int u^\rho u^\sigma D_4(u) = [\mu, \mu, \rho, \sigma] D_4^{\rho\sigma} = \\
&= [\mu, \mu, \rho, \sigma] (g^{\rho\sigma} A_2 D_4 + v^\rho v^\sigma B_2 D_4) = \\
&= [\mu, \mu, \rho, \rho] A_2 D_4 + [\mu, \mu, \psi, \psi] B_2 D_4,
\end{aligned} \tag{11.24}$$

wobei A_2 und B_2 jetzt als Operatoren zu verstehen sind. Diese Beziehung gilt auch unintegriert,

$$[\mu, \mu, \psi, \psi] D_4(u) = [\mu, \mu, \rho, \rho] A_2 D_4(u) + [\mu, \mu, \psi, \psi] B_2 D_4(u). \tag{11.25}$$

Diese Entwicklung kann an jedem der Terme von $Q(u)$ vorgenommen werden und liefert eine Neusortierung der Koeffizienten. Die subtilen und sehr technischen Rechnungen seien auch hier dem Anhang D überlassen.

11.3.2 Berechnung der Zwei- und Dreischleifenintegrale

Zu berechnen sind die in Abbildung 11.2 dargestellten Graphen. Es handelt sich um einen Zweischleifengraphen (0) und vier Dreischleifengraphen (1–4). Als Beispiel soll hier der Graph (1) berechnet werden. Zunächst einmal ist für ihn ein kombinatorischer Faktor 2 zu berücksichtigen, da der an der Linie des schweren Quarks gespiegelte Graph nicht gesondert berechnet wird. Der Farbfaktor des Graphen ergibt sich als

$$\varepsilon_{ijk} (T^a)_i^i (T^a)_{j'}^j \varepsilon^{i'j'k} = \dots = -\frac{N_C + 1}{2N_C} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} = -C_B N_C!. \tag{11.26}$$

Ohne diese Farbstruktur bleibt

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_1^{(co)} &= \iiint \text{Sp} \left(\bar{\Gamma} \left(\frac{i}{-k} \right) (-ig_s \gamma_\alpha) \left(\frac{i}{-l} \right) \Gamma \left(\frac{i}{-p} \right) \right) \left(\frac{-i}{(k-l)^2} \right) \cdot \\
&\cdot \frac{i}{\omega + p \cdot v + k \cdot v} (-ig_s v^\alpha) \frac{i}{\omega + p \cdot v + l \cdot v} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{d^n p}{(2\pi)^n} = \\
&= \frac{g_s^2}{\omega^2} \iiint \text{Sp} (\bar{\Gamma} \not{k} \not{l} \Gamma \not{p}) \left(\frac{-1}{k^2} \right) \left(\frac{-1}{l^2} \right) \left(\frac{-1}{(k-l)^2} \right) \cdot
\end{aligned}$$

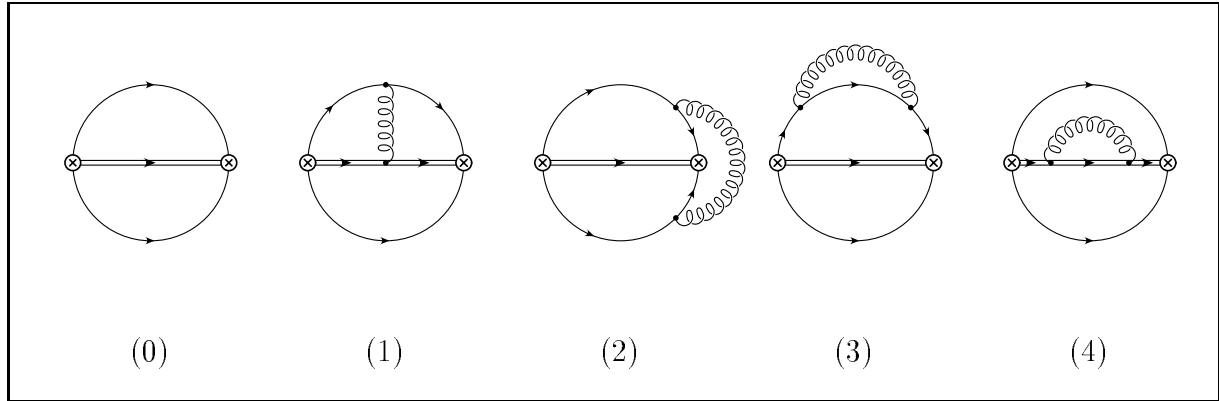


Abbildung 11.2: Bornscher Beitrag (0) und radiative Korrekturen (1–4) zum führenden Term des diagonalen Korrelators

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{\omega}{(\omega + p \cdot v + k \cdot v)} \frac{\omega}{(\omega + p \cdot v + l \cdot v)} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \left(\frac{-1}{p^2} \right) \frac{d^n p}{(2\pi)^n} = \\
 & = \int b_1^{(co)}(p) \left(\frac{-1}{p^2} \right) (p \cdot v) \frac{d^n p}{(2\pi)^n}, \quad (11.27)
 \end{aligned}$$

wobei der Index (*co*) den führenden Korrelatorterm bezeichnen soll. Als Impulse wurden $(-p)$ für die untere leichte Quarklinie, $(-l)$ zu Beginn der oberen leichten Quarklinie und der Restimpuls $(p + l)$ für den Beginn der schweren Quarklinie gewählt. Zu erkennen ist, daß die verbundenen Teile, also die obere leichte und die schwere Quarklinie, vorab berechnet werden können, wobei p als äußerer Impuls fungiert. In diesem Fall konnte auch bereits die Pre-Diracstruktur eingebaut werden, indem der einzige noch verbleibende Entwicklungsparameter durch v ersetzt wurde. Das innere Zweischleifenintegral

$$\begin{aligned}
 b_1^{(co)}(p) & = \frac{g_s^2}{\omega^2} \iint \text{Sp}(\bar{\Gamma} \not{k} \not{v} \Gamma \not{l}) \left(\frac{-1}{k^2} \right) \left(\frac{-1}{l^2} \right) \left(\frac{-1}{(k-l)^2} \right) \cdot \\
 & \cdot \frac{\omega}{(\omega + p \cdot v + k \cdot v)} \frac{\omega}{(\omega + p \cdot v + l \cdot v)} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \quad (11.28)
 \end{aligned}$$

kann zerlegt werden in eine Diracstruktur $\text{Sp}(\bar{\Gamma} \gamma_\mu \not{v} \gamma_\nu \Gamma)$, eine Impulsstruktur $k^\mu l^\nu$ und ein Stammintegral

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_1^{(co)}(p) & = \frac{g_s^2}{\omega^2} \iint \left(\frac{-1}{k^2} \right) \left(\frac{-1}{l^2} \right) \left(\frac{-1}{(k-l)^2} \right) \cdot \\
 & \cdot \frac{\omega}{(\omega + p \cdot v + k \cdot v)} \frac{\omega}{(\omega + p \cdot v + l \cdot v)} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{d^n l}{(2\pi)^n} = \\
 & = \frac{-4g_s^2}{(4\pi)^n (-2(\omega + p \cdot v))^2} (-2(\omega + p \cdot v))^{2(n-3)} I_5(1, 1, 1, 1, 1) = \\
 & = \frac{-4g_s^2}{(4\pi)^n} (-2(\omega + p \cdot v))^{2(n-4)} I_5(1, 1, 1, 1, 1). \quad (11.29)
 \end{aligned}$$

Zu beachten ist bei der Verwendung des HQET-Zweischleifenintegrals, daß ω durch $\omega + p \cdot v$ zu ersetzen und entsprechend vorher auch die Zähler zu wählen sind. Die Entwicklung in

Kovariante liefert

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1^{(co)}(p) &= \text{Sp}(\bar{\Gamma}\gamma_\mu\psi\gamma_\nu\Gamma\psi)(Ag^{\mu\nu} + Bv^\mu v^\nu) = A\text{Sp}(\bar{\Gamma}\gamma_\mu\psi\gamma^\mu\Gamma\psi) + B\text{Sp}(\bar{\Gamma}\psi\psi\Gamma\psi) = \\ &= ((2-n)A + B)\text{Sp}(\bar{\Gamma}\psi\Gamma\psi) =: ((2-n)A + B)\tilde{\Gamma}_0,\end{aligned}\quad (11.30)$$

als Operatoren erhält man

$$\text{für } I_A : \quad (k \cdot l) \rightarrow \frac{1}{2}(-2(\omega + p \cdot v))^2(\hat{C} - \hat{A} - \hat{B}), \quad (11.31)$$

$$\text{für } I_B : \quad (k \cdot v)(l \cdot v) \rightarrow \frac{1}{4}(-2(\omega + p \cdot v))^2(1 - \hat{P})(1 - \hat{Q}) \quad (11.32)$$

und damit letzten Endes

$$\tilde{b}_1^{(co)}(p) = -\frac{-g_s^2}{(4\pi)^n}(-2(\omega + p \cdot v))^{2(n-3)} \left(\frac{2(n-2)E_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2} - \frac{(n-2)(3n-10)E_2}{(n-4)^3(n-3)^2(2n-7)} \right) \tilde{\Gamma}_0. \quad (11.33)$$

Zur abschließenden Integration über p verbleibt also ein Faktor, der einem „effektiven“ schweren Quarkpropagator entspricht. Zu berechnen bleibt das Stammintegral

$$\int \left(\frac{-1}{p^2} \right) \left(\frac{\omega}{\omega + p \cdot v} \right)^{2(3-n)} \frac{d^n p}{(2\pi)^n} = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-2\omega)^{n-2} I_2(1, 6-2n), \quad (11.34)$$

und die Anwendung des zu $(p \cdot v)$ gehörigen Operators $\frac{1}{2}(-2\omega)(1 - \hat{P})$ liefert

$$\int \left(\frac{-1}{p^2} \right) \left(\frac{\omega}{\omega + p \cdot v} \right) (p \cdot v) \frac{d^n p}{(2\pi)^n} = \frac{i(-2\omega)^{n-1}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{2(n-2)(2n-7)E_3}{9E_2(3n-11)(3n-10)(3n-8)(3n-7)} \quad (11.35)$$

mit $E_3 := \Gamma(1-\varepsilon)^3\Gamma(1+6\varepsilon)$. Das Auftreten des Ausdrucks E_2 im Nenner ist eine Konsequenz daraus, daß der zweite Eintrag der HQET-Einschleifenfunktion nicht ganzzahlig ist. Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1^{(co)} &= \frac{-ig_s^2}{(4\pi)^{3/2}} (-2\omega)^{3n-7} \frac{2(n-2)(2n-7)E_3\tilde{\Gamma}_0}{9E_2(3n-11)(3n-10)(3n-8)(3n-7)} \cdot \\ &\quad \left(\frac{2(n-2)E_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2} - \frac{(n-2)(3n-10)E_2}{(n-4)^3(n-3)^2(2n-7)} \right).\end{aligned}\quad (11.36)$$

Bereits eingeführt wurde die Grundstruktur $\tilde{\Gamma}_0$. Sie ist einfachstes Mitglied einer ganzen Klasse von Grundstrukturen, nach denen sich die Diracstrukturen klassifizieren lassen (ähnlich wie im Fall der Ströme in Gleichung (8.9), es ist $\tilde{\Gamma}_i = \text{Sp}(\bar{\Gamma}\psi\Gamma_i\psi)$),

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_0 &:= \text{Sp}(\bar{\Gamma}\psi\Gamma\psi), & \tilde{\Gamma}_1 &:= \text{Sp}(\bar{\Gamma}\gamma_\mu\Gamma\gamma^\mu), & \tilde{\Gamma}_2 &:= \text{Sp}(\bar{\Gamma}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi\Gamma\psi\gamma^\nu\gamma^\mu), \\ \tilde{\Gamma}_3 &:= \text{Sp}(\bar{\Gamma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\Gamma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu) & \text{und } \tilde{\Gamma}_4 &:= \text{Sp}(\bar{\Gamma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\psi\Gamma\psi\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu).\end{aligned}\quad (11.37)$$

Diese Grundstrukturen können im Falle einer antisymmetrischen Diracstruktur des Vertex gemäß Gleichung (10.60) erneut durch die Zahlen n_γ und s_γ ausgedrückt werden. Es zeigt sich jedoch, daß in allen betrachteten Fällen von Baryonen Λ_Q und $\{\Sigma_Q, \Sigma_Q^*\}$ stets $\tilde{\Gamma}_0 = -\text{Sp}(\bar{\Gamma}\Gamma)$ ist. Und schließlich ist noch auf einen generellen Faktor 2 für alle Graphen

hinzuweisen, der solche Graphenbeiträge berücksichtigt, welche durch Drehung um 180° um die schwere Quarklinie, also durch Überkreuzung der leichten Quarklinien entstehen. Er spiegelt sich im Faktor 2 des Korrelators in Gleichung (11.2) wider. Von den Faktoren dieser Gleichung ist also bereits $\Gamma'^{\frac{1}{2}}(1+\psi)\bar{\Gamma}'2\text{Sp}(\tau\tau^\dagger)$ herausgezogen worden. Die Beiträge der berechneten Graphen sind daher zu vergleichen mit

$$\frac{1}{4}\text{Sp}(\Gamma\bar{\Gamma})P(\omega) = -\frac{1}{4}\tilde{\Gamma}_0P(\omega), \quad (11.38)$$

um $P(\omega)$ zu erhalten.

11.3.3 Ergebnisse der Zwei- und Dreischleifenintegrale

Die Ergebnisse aus der Berechnung der Zwei- und Dreischleifenintegrale lassen sich nach dem eben angesprochenen Vergleich in der Form

$$P(\omega) = \sum_{j=0}^2 \left(\frac{(-2\omega)^{2n-3}}{(4\pi)^n} C_0 b_{0,j}^{(co)} + \frac{g_s^2 (-2\omega)^{3n-7}}{(4\pi)^{3n/2}} \sum_{i=1}^4 C_i b_{i,j}^{(co)} \right) (s_\gamma(n-2n_\gamma))^j \quad (11.39)$$

zusammenfassen, wobei die Koeffizienten $b_{i,j}^{(co)}$ in Anhang E aufgeführt sind. Die Farbfaktoren C_i sind gegeben als $C_0 = N_C!$, $C_1 = C_2 = -N_C!C_B$ und $C_3 = C_4 = N_C!C_F$. Eine Entwicklung dieser Größe in $\varepsilon = \varepsilon_{\overline{\text{MS}}}$ liefert

$$P(\omega) = \frac{(-2\omega)^5}{(4\pi)^4} \mu^{-4\varepsilon} \left[\left(\frac{-2\omega}{\mu} \right)^{-4\varepsilon} \left(P_0^0 + \frac{1}{\varepsilon} P_0^1 \right) + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \left(\frac{-2\omega}{\mu} \right)^{-6\varepsilon} \left(P_1^0 + \frac{1}{\varepsilon} P_1^1 + \frac{1}{\varepsilon^2} P_1^2 \right) \right]$$

mit

$$\begin{aligned} P_0^0 &= -\frac{107}{150}, & P_0^1 &= \frac{1}{10}, & (11.40) \\ P_1^0 &= \frac{2}{1125}(4907n_\gamma^2 - 18408n_\gamma + 34352) - \frac{2}{45}(n_\gamma - 2)s_\gamma + \\ &+ \frac{2}{225}(195n_\gamma^2 - 780n_\gamma + 1946)\zeta(2) - \frac{176}{45}\zeta(3), \\ P_1^1 &= \frac{4}{225}(61n_\gamma^2 - 234n_\gamma + 396) + \frac{32}{45}\zeta(2) \quad \text{und} \quad P_1^2 = \frac{4}{45}(n_\gamma^2 - 4n_\gamma + 6), \end{aligned}$$

wobei auch $\mu = \mu_{\overline{\text{MS}}}$ gewählt ist (vgl. dazu Gleichung (10.26)). Die Entwicklung ist noch zu vervollständigen durch die Entwicklung der Potenzen

$$\begin{aligned} \left(\frac{-2\omega}{\mu} \right)^{-a\varepsilon} &\approx 1 - a\varepsilon \ln \left(\frac{-2\omega}{\mu} \right) + \frac{a^2\varepsilon^2}{2} \ln^2 \left(\frac{-2\omega}{\mu} \right) = & (11.41) \\ &\approx 1 - a\varepsilon \left(\ln \left(\frac{2\omega}{\mu} \right) + i\pi \right) + \frac{a^2\varepsilon^2}{2} \left(\ln \left(\frac{2\omega}{\mu} \right) + i\pi \right)^2 = \\ &= 1 - a\varepsilon \ln \left(\frac{2\omega}{\mu} \right) - i\pi a\varepsilon + \frac{a^2\varepsilon^2}{2} \ln^2 \left(\frac{2\omega}{\mu} \right) + i\pi a^2\varepsilon^2 \ln \left(\frac{2\omega}{\mu} \right) - \pi^2 \frac{a^2\varepsilon^2}{2}. \end{aligned}$$

Die unrenormierte Spektraldichte $\rho^0(\omega) = \text{Im}(P(\omega))/\pi$ ergibt sich also einfach aus $P(\omega)$, wenn man die jeweilige Potenz durch $-a^2\varepsilon^2 \ln(\mu/2\omega) - a\varepsilon$ ersetzt,

$$\begin{aligned} \rho^0(\omega) &= \frac{32\omega^5}{(4\pi)^4} \mu^{-4\varepsilon} \left[\left(16\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 4\varepsilon \right) \left(P_0^0 + \frac{1}{\varepsilon} P_0^1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \left(36\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 6\varepsilon \right) \left(P_1^0 + \frac{1}{\varepsilon} P_1^1 + \frac{1}{\varepsilon^2} P_1^2 \right) \right] = \\ &\approx \frac{32\omega^5}{(4\pi)^4} \mu^{-4\varepsilon} \left[\left(16P_0^1 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 4P_0^0 \right) \varepsilon + 4P_0^1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \left(36P_1^2 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 6P_1^1 + \frac{6}{\varepsilon} P_1^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Die Subtraktion der Pole geschieht wie bei der Korrelatorfunktion mit Hilfe der Renormierungsfaktoren der Ströme. Da die Spektraldichte nur bis zur ersten Ordnung der Störungsreihe bestimmt wurde, reicht auch hier die erste Ordnung,

$$Z_J \approx 1 + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi\varepsilon} ((n_\gamma - 2)^2 + 2) = 1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} (n_\gamma^2 - 4n_\gamma + 6) = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} (Z_J)_1^1 \quad (11.43)$$

(wegen $\gamma_J = -2(Z_J)_1^1$ und Gleichung (10.78)), und es ergibt sich mit $Z_1^1 := 2(Z_J)_1^1$

$$\begin{aligned} \rho(\omega) = \rho^0(\omega) Z_J^{-2} &\approx \frac{32\omega^5}{(4\pi)^4} \mu^{-4\varepsilon} \left[4P_0^1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(16P_0^1 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 4P_0^0 + \frac{4}{\varepsilon} P_0^1 \right) Z_1^1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(36P_1^2 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 6P_1^1 + \frac{6}{\varepsilon} P_1^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Zu beachten ist, daß die jeweils gerade noch relevante Potenz von ε berücksichtigt wurde. Die Subtraktion gelingt, da $6P_1^2 = 4P_0^1 Z_1^1$ ist. Mit $Z_1^1 = 3P_1^2/2P_0^1$ ergibt sich dann

$$\rho_0^{(1)}(\omega, \mu) = \rho_0^{(0)}(\omega) \left(1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(r_1 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + r_2 \right) \right) \quad \text{mit}$$

$$\rho_0^{(0)}(\omega) = \frac{32\omega^5}{(4\pi)^4} 4P_0^1 = \frac{64\omega^5}{5(4\pi)^4} = \frac{\omega^5}{20\pi^4}, \quad (11.45)$$

$$r_1 = \frac{36P_1^2 - 16P_0^1 Z_1^1}{4P_0^1} = \frac{36P_1^2 - 24P_1^2}{4P_0^1} = \frac{3P_1^2}{P_0^1} = \frac{8}{3}(n_\gamma^2 - 4n_\gamma + 6) \quad \text{und}$$

$$r_2 = \frac{6P_1^1 - 4P_0^0 Z_1^1}{4P_0^1} = \frac{6(P_1^1 P_0^1 - P_1^2 P_0^0)}{4(P_0^1)^2} = \frac{8}{45}(38n_\gamma^2 - 137n_\gamma + 273 + 60\zeta(2)).$$

Zu erkennen ist, daß diese Rechnung das Ergebnis $\rho_0^{(0)}(\omega)$ führender Ordnung für den Korrelator reproduziert. Durch die Renormierung (bestehend aus dimensionaler Regularisierung und Subtraktion nach dem $\overline{\text{MS}}$ -Schema) erhält die Spektraldichte jetzt allerdings eine Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ . Die Spektraldichte kann nun entweder durch Multiplikation mit einem Wilson-Koeffizienten (vgl. Gleichung (10.90)) in eine Invariante der Renormierungsgruppe verwandelt oder für einen festen Wert der Renormierungsskala bestimmt und für andere Werte mittels Gleichung (10.95) berechnet werden. Hier wird der zweite Weg eingeschlagen, für die Renormierungsskala wird dabei der Wert $\mu = 1 \text{ GeV}$ verwendet, an dem auch die Kondensatwerte bekannt sind.

11.4 Strahlungskorrigierter nichtdiagonaler Korrelator

Wie bereits erwähnt, tritt beim nichtdiagonalen Korrelator an die Stelle der Vertexmatrix $\bar{\Gamma}$ die Matrix $\bar{\Gamma}\psi$. Da die Spur über eine ungerade Anzahl von Diracschen Matrizen aber verschwindet, tragen zum nichtdiagonalen Korrelator eben die Graphen bei, die eine ungerade Summe von Vertizes und Propagatoren auf den leichten Linien aufweisen. Es sind dies in führender Ordnung der Störungsreihe die Graphen (d–f) der Abbildung 11.1. Zum Graphen (d), der von diesen drei Graphen in der Operatorproduktentwicklung den führenden Platz einnimmt, soll in diesem Abschnitt die Strahlungskorrektur erster Ordnung berechnet werden. Dabei tritt als neue Feynmanregel diejenige für das Quarkcondensat hinzu. Sein Impuls verschwindet, und anstatt des leichten Quarkpropagators ist der normierte Faktor

$$\frac{1}{4N_C}\delta_i^j\delta_a^b\langle\bar{q}q\rangle, \quad (11.46)$$

zu wählen, wobei i und j Farb- und a und b QCD-Indizes sind. Es ergeben sich ein Einschleifen- und acht Zweischleifengraphen, wie sie in Abbildung 11.3 dargestellt sind.

11.4.1 Ergebnisse der Ein- und Zweischleifenintegrale

Die konkrete Berechnung der einzelnen Diagramme kann hier übergangen werden, sie folgt denselben Prinzipien wie bei den Strahlungskorrekturen zum Korrelator. Zu beachten ist, daß aufgrund des Quarkcondensats die Anzahl der Graphen verdoppelt ist, dafür aber der entsprechende kombinatorische Faktor wegfällt. Auch hier lassen sich die Ergebnisse in

$$P(\omega) = \sum_{j=0}^2 \left(\frac{(-2\omega)^{n-2}}{(4\pi)^{n/2}} C_0 b_{0,j}^{(qq)} + \frac{g_s^2 (-2\omega)^{2n-6}}{(4\pi)^n} \sum_{i=1}^8 C_i b_{i,j}^{(qq)} \right) (s_\gamma (n - 2n_\gamma))^j \quad (11.47)$$

zusammenfassen, mit Farbfaktoren $C_0 = N_C!$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = -N_C!C_B$ und $C_6 = C_7 = C_8 = N_C!C_F$, die Koeffizienten $b_{i,j}^{(qq)}$ sind erneut in Anhang E zusammengefaßt. Eine Entwicklung in $\varepsilon = \varepsilon_{\overline{\text{MS}}}$ ergibt

$$P(\omega) = \langle\bar{q}q\rangle \frac{(-2\omega)^2}{(4\pi)^2} \mu^{-2\varepsilon} \left[\left(\frac{-2\omega}{\mu} \right)^{-2\varepsilon} \left(P_0^0 + \frac{1}{\varepsilon} P_0^1 \right) + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \left(\frac{-2\omega}{\mu} \right)^{-4\varepsilon} \left(P_1^0 + \frac{1}{\varepsilon} P_1^1 + \frac{1}{\varepsilon^2} P_1^2 \right) \right]$$

mit

$$\begin{aligned} P_0^0 &= 4, & P_0^1 &= 2, & (11.48) \\ P_1^0 &= \frac{8}{3}(14n_\gamma^2 - 50n_\gamma + 65 + (14n_\gamma - 25)s_\gamma) + \\ &\quad + \frac{2}{3}(18n_\gamma^2 - 72n_\gamma + 87 + 18(n_\gamma - 2)s_\gamma)\zeta(2) - \frac{64}{3}\zeta(3), \\ P_1^1 &= \frac{2}{3}(12n_\gamma^2 - 44n_\gamma + 51 + (12n_\gamma - 22)s_\gamma) + \frac{16}{3}\zeta(2) \quad \text{und} \\ P_1^2 &= \frac{2}{3}(2n_\gamma^2 - 8n_\gamma + 7 + 2(n_\gamma - 2)s_\gamma). \end{aligned}$$

Ähnlich wie bei der Berechnung der anomalen Dimension des baryonischen Stroms kann man auch hier feststellen, daß bei Wahl einer allgemeinen kovarianten Eichung der eichabhängige Term herausfällt, wenn die QCD-Werte $C_B = 2/3$ und $C_F = 4/3$ verwendet werden, wie es bei der letzten Formel geschehen ist. Dieser Konsistenznachweis verleiht dem Ergebnis eine zusätzliche Sicherheit. Wie im Fall des diagonalen Korrelators entwickelt man die Potenzen $(-2\omega/\mu)^{-a\varepsilon}$ nach ε und erhält so die unrenormierte Spektraldichte

$$\begin{aligned} \rho^0(\omega) &= -\langle \bar{q}q \rangle \frac{4\omega^2}{(4\pi)^2} \mu^{-2\varepsilon} \left[\left(4\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 2\varepsilon \right) \left(P_0^0 + \frac{1}{\varepsilon} P_0^1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \left(16\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 4\varepsilon \right) \left(P_1^0 + \frac{1}{\varepsilon} P_1^1 + \frac{1}{\varepsilon^2} P_1^2 \right) \right] = \\ &\approx -\langle \bar{q}q \rangle \frac{4\omega^2}{(4\pi)^2} \mu^{-2\varepsilon} \left[\left(4P_0^1 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 2P_0^0 \right) \varepsilon + 2P_0^1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \left(16P_1^2 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 4P_1^1 + \frac{4}{\varepsilon} P_1^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.49)$$

Bei der Renormierung mit Hilfe der Renormierungsfaktoren der Ströme ist zu beachten, daß im Strom \bar{J} die Matrix Γ durch $\Gamma\psi$ (oder $\Gamma\gamma_0$ im Ruhesystem des schweren Baryons) ersetzt ist. Dies führt zu einer Ersetzung von n_γ , die sich mit Hilfe der Definitionen in (10.60) ergibt,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \Gamma \gamma_0 \gamma^\mu &= 2\gamma_0 \Gamma - \gamma_\mu \Gamma \gamma^\mu \gamma_0 = 2\gamma_0 \Gamma \gamma_0 \gamma_0 - \gamma_\mu \Gamma \gamma^\mu \gamma_0 = \\ &= 2(-1)^{n_\gamma} s_\gamma \Gamma \gamma_0 - (-1)^{n_\gamma} (n - 2n_\gamma) \Gamma \gamma_0 = (-1)^{n_\gamma + s_\gamma} (n - 2(n_\gamma + s_\gamma)) \Gamma \gamma_0, \end{aligned} \quad (11.50)$$

also $n_\gamma \rightarrow n_\gamma + s_\gamma$, während s_γ dasselbe bleibt. Damit ist dann aber

$$Z_{\bar{J}} \approx 1 + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi\varepsilon} ((n_\gamma + s_\gamma - 2)^2 + 2) = 1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} (n_\gamma^2 - 4n_\gamma + 7 + 2(n_\gamma - 2)s_\gamma) =: 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} (\bar{Z}_J)_1^1. \quad (11.51)$$

Zur Renormierung tritt ferner der Renormierungsfaktor des Quarkkondensats,

$$Z_{\bar{q}q} = 1 - 3 \frac{\alpha_s C_F}{4\pi\varepsilon} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\varepsilon} (Z_{\bar{q}q})_1^1, \quad (11.52)$$

so daß für Z_1^1 nun

$$Z_1^1 = (Z_J)_1^1 + (Z_{\bar{J}})_1^1 + (Z_{\bar{q}q})_1^1 = \frac{2}{3} (2n_\gamma^2 - 8n_\gamma + 7 + 2(n_\gamma - 2)s_\gamma) \quad (11.53)$$

zu setzen ist. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \rho(\omega) &= \rho^0(\omega) Z_J^{-1} Z_{\bar{J}}^{-1} Z_{\bar{q}q}^{-1} = \\ &\approx -\langle \bar{q}q \rangle \frac{4\omega^2}{(4\pi)^2} \mu^{-2\varepsilon} \left[2P_0^1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(4P_0^1 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 2P_0^0 + \frac{2}{\varepsilon} P_0^1 \right) Z_1^1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(16P_1^2 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + 4P_1^1 + \frac{4}{\varepsilon} P_1^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (11.54)$$

und auch hier gelingt die Subtraktion wegen $4P_1^2 = 2P_0^1 Z_1^1$, man erhält

$$\rho_3^{(1)}(\omega, \mu) = \rho_3^{(0)}(\omega) \left(1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(r_1 \ln\left(\frac{\mu}{2\omega}\right) + r_2 \right) \right) \quad \text{mit}$$

$$\rho_3^{(0)}(\omega) = -\langle \bar{q}q \rangle \frac{4\omega^2}{(4\pi)^2} 2P_0^1 = -\langle \bar{q}q \rangle \frac{16\omega^2}{(4\pi)^2} = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\pi^2} \omega^2, \quad (11.55)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{16P_1^2 - 4P_0^1 Z_1^1}{2P_0^1} = \frac{16P_1^2 - 8P_1^2}{2P_0^1} = \frac{4P_1^2}{P_0^1} = \\ &= \frac{4}{3}(2n_\gamma^2 - 8n_\gamma + 7 + 2(n_\gamma - 2)s_\gamma) \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{4P_1^1 - 2P_0^0 Z_1^1}{2P_0^1} = \frac{4(P_1^1 P_0^1 - P_1^2 P_0^0)}{2(P_0^1)^2} = \\ &= \frac{2}{3}(8n_\gamma^2 - 28n_\gamma + 37 + (8n_\gamma - 14)s_\gamma + 8\zeta(2)). \end{aligned}$$

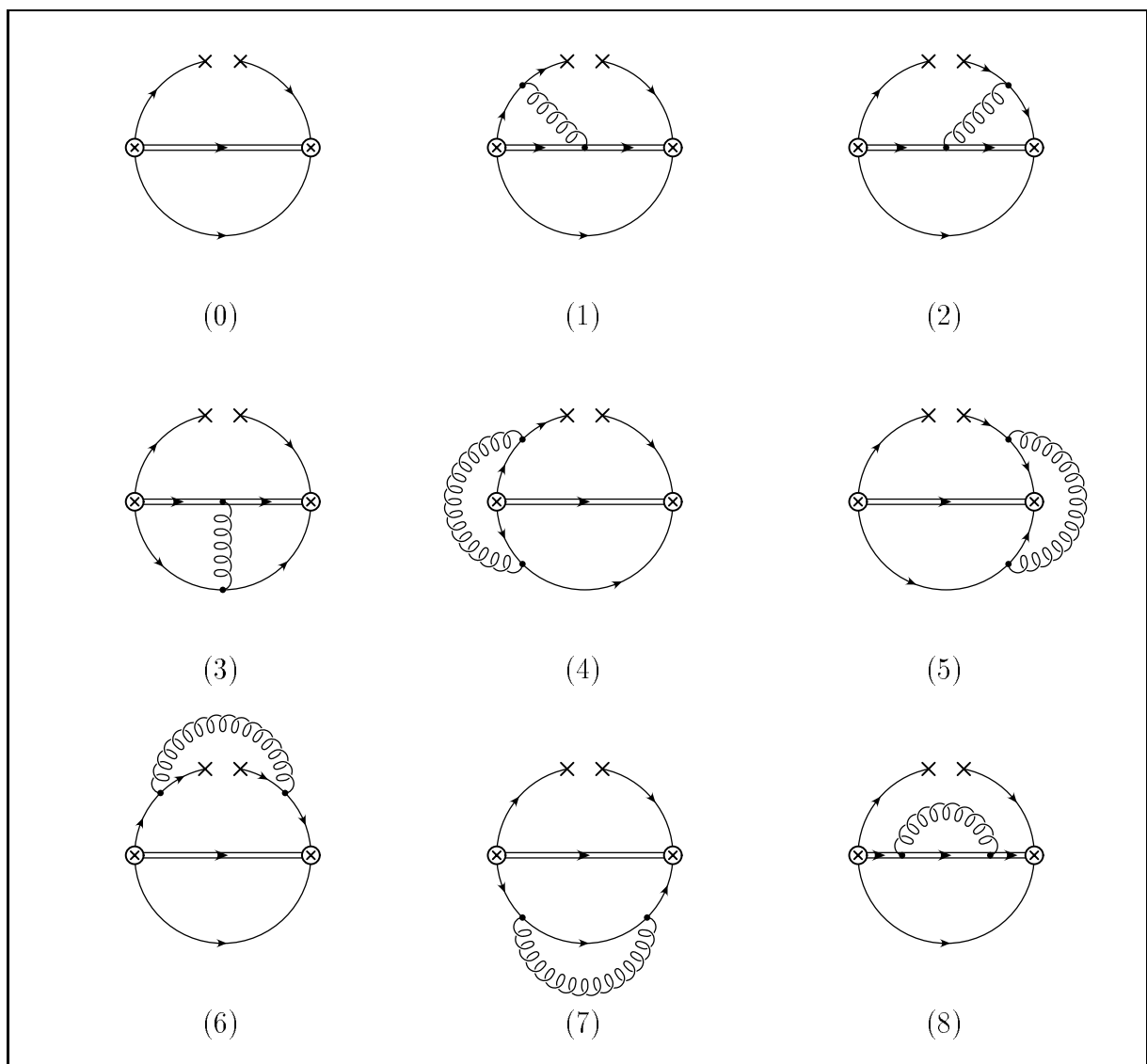


Abbildung 11.3: Bornscher Beitrag (0) und radiative Korrekturen (1–8) zum führenden Term des nichtdiagonalen Korrelators

Kapitel 12

QCD-Summenregeln

Ziel einer Analyse schwerer Hadronen muß es sein, wesentliche Parameter des Hadrons aus denjenigen seiner Bestandteile herzuleiten. Zu ihnen gehören die Masse des Hadrons oder die mittlere kinetische und chromomagnetische Energie des schweren Quarks im Innern des Hadrons. Es handelt sich hierbei um nichtperturbative Parameter, die nicht allein mit Hilfe der Störungstheorie berechnet werden können. Möglich, aber nicht besonders fundamental angelegt ist hier die Benutzung von Potentialmodellen. Daneben beanspruchen Rechnungen auf dem Gitter und QCD-Summenregeln einen immer wichtiger werdenden Platz bei der Berechnung dieser Größen.

Dieses Kapitel soll sich mit der Anwendung von Summenregeln auf die Bestimmung der Masse schwerer Baryonen befassen. Grundlegend für diese Methode ist, daß die *Bindungsenergie* $\bar{\Lambda} = m_B - m_Q$ des Grundzustandes sich im Spektrum als die Energie niederschlägt, bei der ein scharfes Signal auftritt. Dieses Spektrum wird durch die im letzten Kapitel berechnete Spektraldichte beschrieben. Die von Shifman, Vainstein und Zakharov entwickelte Methode [57] setzt die im unphysikalischen Bereich $\omega < 0$ berechnete Spektraldichte auf den physikalischen Bereich fort. Der Vergleich mit dem phänomenologisch zu erwartenden Spektrum liefert dann die QCD-Summenregel, welche durch Anwendung der Borel-Transformation weiter verbessert wird.

Nach der Vorstellung dieser Methode für schwere Mesonen wurde diese zunächst auf den Fall schwerer Baryonen unter der Annahme eines unendlich schweren Quarks angewendet [43], ohne die effektive Theorie schwerer Quarks dabei zur Verfügung zu haben. Baryonen mit großen, aber endlichen Massen wurden in [60, 61] untersucht. Die Einführung der effektiven Theorie (HQET) verstärkte die Aktivität auf dem Gebiet der Summenregeln (siehe beispielsweise [40] für einen Überblick über die Summenregeln im Grenzfall der Symmetrie schwerer Quarks (HQS)). So wurden HQS-Summenregeln für schwere Baryonen aufgestellt und diskutiert [54, 62], aber auch Korrekturen dieser Summenregeln durch eine endliche Quarkmasse untersucht [63]. Waren all dies Rechnungen zu führender Ordnung in der starken Kopplung gewesen, so erwiesen sich die nächstführenden Terme als wichtig. In [64, 65] wurden radiative Korrekturen zum Korrelator der schweren Mesonen mitberücksichtigt.

12.1 Das Residuum

Die QCD-Summenregel entsteht durch die Gleichsetzung des in dem letzten Kapitel entwickelten theoretisch berechneten Korrelators mit seinem phänomenologischen Gegenstück. Dieses kann ausgedrückt werden als eine Reihe von Polen über Grundzustands- und angeregten Zustandsenergien sowie das Kontinuum. Die entsprechenden Residuen des Korrelators werden beschrieben durch die *Residuen der baryonischen Ströme*, die für die Grundzustandsbaryonen gegeben sind als F_B ($B = \Lambda, \Sigma, \Sigma^*$) mit

$$\langle 0|J_\Lambda|\Lambda_Q\rangle = F_\Lambda u, \quad \langle 0|J_\Sigma|\Sigma_Q\rangle = F_\Sigma u \quad \text{und} \quad \langle 0|J_{\Sigma^*}^\nu|\Sigma_Q^*\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}F_{\Sigma^*}u^\nu, \quad (12.1)$$

wobei u und u^ν die üblichen Spinoren zu Spinwerten $1/2$ und $3/2$ sind. In der HQS stimmt F_{Σ^*} mit F_Σ überein. Bezeichnet $|X\rangle$ allgemein einen baryonischen Grund- oder Anregungszustand, so ist der phänomenologische Korrelator zunächst gegeben durch

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2} \sum_X \frac{|\langle 0|J_X|X\rangle|^2}{\omega_X - \omega - i0} + \Pi'(\omega), \quad (12.2)$$

wobei die Summe sowohl eine Summe über die diskreten Zustände wie auch ein Integral über das Kontinuum beinhaltet und $\Pi'(\omega)$ für mögliche Subtraktionsterme (Polynome in ω) steht. Der Nenner der Summe entsteht durch die Auswertung der Differenz zwischen der Masse des Baryonzustandes und seinem Impuls, der schwach von der Massenschale abweicht,

$$q^2 - m_B^2 = (m_Q v + p)^2 - (m_Q + \omega_X)^2 \approx 2m_Q(\omega - \omega_X). \quad (12.3)$$

Für den baryonischen Grundzustand $X = B$ ergibt sich $\omega_B = m_B - m_Q = \bar{\Lambda}$ und damit schließlich für die skalare Korrelatorfunktion

$$P(\omega) = \frac{\frac{1}{2}|F_B|^2}{\bar{\Lambda} - \omega - i0} + \sum_{X \neq B} \frac{\frac{1}{2}|F_X|^2}{\omega_X - \omega - i0} + P'(\omega) \quad (12.4)$$

(die bei Σ^* zusätzlich auftretende Summe über die Lorentzindizes kürzt den Normierungsfaktor in der Definition der Residuen, $P'(\omega)$ ist der dem Subtraktionsterm $\Pi'(\omega)$ entsprechende skalare Korrelatoranteil). Die entscheidende Annahme der QCD-Summenregeln, wie sie in [57] vorgestellt wurde, besteht nun darin, daß sich die angeregten Zustände zu einem Kontinuum „verschmieren“ lassen, dessen Gestalt genau durch die Spektraldichte $\rho(\omega)$ des theoretischen Teils (ohne den Anteil $\rho_{\text{pc}}(\omega)$) parametrisiert wird und an einer *Schwellenenergie* E_C beginnt,

$$\sum_{X \neq B} \frac{\frac{1}{2}|F_X|^2}{\omega_X - \omega - i0} \approx \int_{E_C}^{\infty} \frac{\rho(\omega')d\omega'}{\omega' - \omega - i0}. \quad (12.5)$$

Durch Gleichsetzung der phänomenologischen Korrelatorfunktion mit der theoretischen in Gleichung (11.14) ergibt sich

$$\frac{\frac{1}{2}F^2}{\bar{\Lambda} - \omega - i0} = \int_0^{E_C} \frac{\rho(\omega')d\omega'}{\omega' - \omega - i0} + P_{\text{pc}}(\omega) + P'(\omega). \quad (12.6)$$

12.2 Die Borel-Transformation

Die soeben entwickelte Summenregel ist für eine Analyse noch nicht geeignet. Um Informationen über den Grundzustand zu erhalten, muß man sich der (positiven) Grundzustandsenergie $\bar{\Lambda}$ vom negativen Ende der reellen Achse her nähern, und die Gewichtsfunktion des Integrals wichtet gerade Spektraldichten bei dieser Energie auf, während die Spektraldichte am sichersten für betragsmäßig große negative Werte von ω bekannt ist. Wünschenswert wäre eine Extrapolation dieser Spektraldichte von diesem Bereich hin zu $\omega \approx \bar{\Lambda}$. Eine solche Extrapolation läßt sich mit Hilfe von Ableitungen bewerkstelligen, und diese Ableitungen können einen umso höheren Grad annehmen, je mehr man $(-\omega)$ wachsen läßt. Dies ist der Grundgedanke der *Borel-Transformation*, welche den Grad n der Ableitungen und die Größe $(-\omega)$ für $\omega \rightarrow \infty$ in ein festes Verhältnis setzt und in ihrer Wirkung auf eine Funktion $f(\omega)$ beschrieben wird als

$$\hat{B}f(T) = \hat{B}_T^{(\omega)}(f(\omega)) := \lim_{-\omega, n \rightarrow \infty} \frac{(-\omega)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\omega^n} f(\omega), \quad T = \frac{-\omega}{n} \text{ fest.} \quad (12.7)$$

Das Verhältnis T , das die Einheit einer Energie trägt, wird als *Borel-Parameter* bezeichnet. Mit Hilfe der Stirlingschen Formel und der Definition der Eulerschen Konstanten [23]

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e \quad \text{für große Werte von } n \quad (12.8)$$

kann die Wirkung der Borel-Transformation auf die Gewichtsfunktionen bestimmt werden,

$$\begin{aligned} \hat{B}_T^{(\omega)} \frac{1}{\omega' - \omega} &= \lim_{-\omega, n \rightarrow \infty} \frac{(-\omega)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\omega^n} \frac{1}{\omega' - \omega} = \lim_{-\omega, n \rightarrow \infty} \frac{(-\omega)^{n+1}}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \frac{1}{(\omega' - \omega)^2} = \dots \\ &\dots = \lim_{-\omega, n \rightarrow \infty} \frac{(-\omega)^{n+1}}{n!} \frac{1}{n! (\omega' - \omega)^{n+1}} = \lim_{-\omega, n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\omega}{\omega' - \omega}\right)^{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nT}{nT + \omega'}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\omega'}{nT}\right)^{-n-1} = e^{-\omega'/T}. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Die Borel-Transformation verbessert die Summenregel auf zweifache Weise. Zum einen verwandelt sie die Gewichtsfunktion in eine Exponentialfunktion, welche die Spektraldichten für große Werte von $(-\omega)$ stärker wichtet als die für niedrige Werte. Zum anderen fällt durch die beliebig hohe Ableitungsordnung der unerwünschte Subtraktionsterm als Polynom in ω weg. Die Borel-transformierte und damit verbesserte Summenregel lautet

$$\frac{1}{2} |F_B|^2 e^{-\bar{\Lambda}/T} = \int_0^{E_C} \rho(\omega) e^{-\omega/T} d\omega + \hat{B}P_{pc}(T) =: K(E_C, T). \quad (12.10)$$

An dieser Stelle soll der Anteil $P_{pc}(\omega)$ genauer betrachtet werden. Er läßt sich auf verschiedene Arten bilden, die natürlich alle zum selben Ergebnis führen müssen.

Der erste Weg besteht in der Fouriertransformation der Anteile $P_{pc}(t)$ der Korrelatorfunktion im Ortsraum. Für einen Term $P^{(m)}(t) = \tilde{S}(t)t^m = i\theta(t)t^m$ ergibt sich

$$P^{(m)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^{(m)}(t) e^{i\omega t} dt = i \int_0^{\infty} t^m e^{i\omega t} dt. \quad (12.11)$$

Für $\omega > 0$ ist der Integrand in den Bereich $Im(t) > 0$ analytisch fortsetzbar, das Integral kann durch eine Wick-Rotation auf die obere imaginäre Achse gelegt werden, und die Wahl einer imaginären Zeit $t = i\tau$ liefert

$$\begin{aligned} P^{(m)}(\omega) &= i \int_0^{i\infty} t^m e^{i\omega t} dt = - \int_0^\infty (i\tau)^m e^{-\omega\tau} d\tau = -i^m \frac{m}{\omega} \int_0^\infty \tau^{m-1} e^{-\omega\tau} d\tau = \dots \\ \dots &= -i^m \frac{m!}{\omega^m} \int_0^\infty e^{-\omega\tau} d\tau = -\frac{i^m m!}{\omega^{m+1}} = \frac{(-i)^m m!}{(-\omega)^{m+1}}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Für $\omega < 0$ ist eine Drehung auf die negative imaginäre Achse möglich, es ergibt sich jedoch erneut dasselbe Ergebnis, welches auch den Pol bei $\omega = 0$ widerspiegelt.

Alternativ dazu kann von dem Anteil an der Spektraldichte $\rho_{pc}(\omega)$ ausgegangen werden, der für $P^{(m)}(t) = i\theta(t)t^m$ einen Beitrag $\rho^{(m)}(\omega) = (-i)^m \delta^{(m)}(\omega - 0)$ liefert, wie bereits festgestellt wurde. Die Dispersionsrelation (11.14) ergibt dann

$$\begin{aligned} P^{(m)}(\omega) &= (-i)^m \int_0^\infty \frac{\delta^{(m)}(\omega' - 0) d\omega'}{\omega' - \omega - i0} = (-i)^m \int_0^\infty \frac{\delta^{(m-1)}(\omega' - 0) d\omega'}{(\omega' - \omega - i0)^2} = \dots \\ \dots &= (-i)^m m! \int_0^\infty \frac{\delta(\omega' - 0) d\omega'}{(\omega' - \omega - i0)^{m+1}} = \frac{(-i)^m m!}{(-\omega - i0)^{m+1}}. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Die Borel-Transformation dieses Anteils kann also sowohl durch die Anwendung des Borel-Operators selbst wie auch durch die Auswertung des entsprechenden Spektralanteils erfolgen. Für die Borel-Transformation des soeben bestimmten Anteils $P^{(m)}(\omega)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{B}P^{(m)}(T) &= \hat{B}_T^{(\omega)}(P^{(m)}(\omega)) = \lim_{-\omega, n \rightarrow \infty} \frac{(-\omega)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\omega^n} \frac{(-i)^m m!}{(-\omega)^{m+1}} = \\ &= \lim_{-\omega, n \rightarrow \infty} (m+1) \frac{(-\omega)^{n+1}}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \frac{(-i)^m m!}{(-\omega)^{m+2}} = \dots \\ \dots &= \lim_{-\omega, n \rightarrow \infty} \frac{(m+n)! (-i)^m m!}{m! n!} \frac{(-i)^m m!}{(-\omega)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m+n}{e} \right)^{m+n} \left(\frac{n}{e} \right)^{-n} \frac{(-i)^m}{(nT)^m} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m+n}{e} \right)^m \left(\frac{m+n}{n} \right)^n \sqrt{\frac{m+n}{n}} \frac{(-i)^m}{(nT)^m} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e} \right)^m \left(1 + \frac{m}{n} \right)^{m+1/2} \left(1 + \frac{m}{n} \right)^n \frac{(-i)^m}{(nT)^m} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^m \frac{(-i)^m}{(nT)^m} = \frac{(-i)^m}{T^m}. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Geht man von der Spektraldichte aus, so erhält man

$$\begin{aligned} \hat{B}P^{(m)}(T) &= \int_0^{E_C} \rho^{(m)}(\omega) e^{-\omega/T} d\omega = (-i)^m \int_0^{E_C} \delta^{(m)}(\omega - 0) e^{-\omega/T} d\omega = \\ &= (-i)^m \frac{1}{T} \int_0^{E_C} \delta^{(m-1)}(\omega - 0) e^{-\omega/T} d\omega = \dots \\ &= \frac{(-i)^m}{T^m} \int_0^{E_C} \delta(\omega - 0) e^{-\omega/T} d\omega = \frac{(-i)^m}{T^m}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Es zeigt sich die Gleichheit beider Vorgehensweisen. Und auch die einfache Regel für den Übergang von polynomialen Anteilen $P_{pc}(t)$ zu $\hat{B}P_{pc}(T)$ wird klar: Unter Auslassung des Propagators $\tilde{S}(t)$ des schweren Quarks wird t durch $-i/T$ ersetzt.

12.3 Strahlungskorrigierte diagonale Summenregel

Die berechnete Spektraldichte $\rho_0^{(1)}(\omega, \mu)$ zum diagonalen Korrelator findet Verwendung bei der Aufstellung einer diagonalen Summenregel. Aufgrund der Diracstruktur, die stets eine gerade Anzahl von Diracschen Matrixen verlangt, tragen zu dieser Summenregel neben diesem strahlungskorrigierten Term nur die Spektraldichte $\rho_4^{(0)}(\omega)$ sowie die in t polynomialen Anteile aus den Graphen (b) und (c) der Abbildung 11.1 als Anteile von $\hat{B}P_{pc}(T)$ bei. Alle Bestandteile werden in die Borel-transformierte Summenregel (12.10) eingesetzt.

12.3.1 Eine neue Klasse von Funktionen

Für die Berechnung des Integrals über die Spektraldichten kann die Klasse der *unvollständigen Gammafunktionen* (siehe [66], 6.5.13) verwendet werden. Sie seien hier eingeführt als

$$f_k(x) := \int_0^x \frac{x'^k}{k!} e^{-x'} dx' = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \right) e^{-x}. \quad (12.16)$$

Mit ihrer Hilfe ergibt sich zunächst (mit $x_C := E_C/T$)

$$\begin{aligned} \int_0^{E_C} \rho_0^{(0)}(\omega) e^{-\omega/T} d\omega &= \frac{N_C!}{\pi^4} \int_0^{E_C} \frac{\omega^5}{5!} e^{-\omega/T} d\omega = \frac{N_C!}{\pi^4} T^6 \int_0^{x_C} \frac{x^5}{5!} e^{-x} dx = \frac{N_C!}{\pi^4} T^6 f_5(x_C), \\ \int_0^{E_C} \rho_4^{(0)}(\omega) e^{-\omega/T} d\omega &= \frac{c\alpha_s \langle GG \rangle}{32\pi^3} \int_0^{E_C} \omega e^{-\omega/T} d\omega = \frac{c\alpha_s \langle GG \rangle}{32\pi^3} T^2 f_1(x_C). \end{aligned} \quad (12.17)$$

Betrachtet man diese Ausdrücke, so ähneln sie einer Laplace-Transformation, allerdings über ein endliches Integrationsintervall, welche die Anteile $\omega^5/5!$ und ω bis auf die Funktionen $f_5(x_C)$ und $f_1(x_C)$ (die aber für $x_C \rightarrow \infty$ gegen Eins streben) in T^6 bzw. T^2 transformieren. Die Endlichkeit der Integrationsgrenze spielt insbesondere dann keine Rolle, wenn diese Anteile bezüglich ω für steigende Werte verschwinden. Das ist hier nicht der Fall, hat aber für den Anteil P_{pc} der Korrelatorfunktion zu der einfachen Ersetzungsregel geführt.

Für die strahlungskorrigierten Anteile der Spektraldichte ist eine weitere Klasse von Funktionen notwendig, welche das Auftreten von Logarithmen berücksichtigt,

$$f_k^\ell(x) := \int_0^x \frac{x'^k}{k!} \ln x' e^{-x'} dx'. \quad (12.18)$$

Dieses Integral kann mit Hilfe der *Integralexponentialfunktion*

$$\text{Ei}(-x) := \int_x^\infty \frac{e^{-x'}}{x'} dx', \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x'}}{x'} dx' = \gamma_E \quad (\text{Eulersche Konstante}) \quad (12.19)$$

(vgl. [23], Integral Nr. 451) ausgedrückt werden,

$$f_k^\ell(x) = \int_0^x \frac{x'^k}{k!} \ln x' e^{-x'} dx' = \ln x f_k(x) - \int_0^x \frac{1}{x'} f_k(x') dx' = \quad (12.20)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln x f_k(x) - \int_0^x \frac{1}{x'} dx' + \int_0^x \left(\frac{1}{x'} + 1 + \frac{x'}{2!} + \frac{x'^2}{3!} + \dots + \frac{x'^{k-1}}{k!} \right) e^{-x'} dx' = \\
&= \ln x f_k(x) + \int_0^x \frac{1}{x'} (e^{-x'} - 1) dx' + f_0(x) + \frac{f_1(x)}{2!} + \frac{f_2(x)}{3!} + \dots + \frac{f_{k-1}(x)}{k!} = \\
&= \ln x (f_k(x) - 1) + \gamma_E + \text{Ei}(-x) + f_0(x) + \frac{f_1(x)}{2!} + \frac{f_2(x)}{3!} + \dots + \frac{f_{k-1}(x)}{k!},
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Umformung

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{x'} (e^{-x'} - 1) dx' &= \ln x (e^{-x} - 1) + \gamma_E - \int_x^\infty \ln x' e^{-x'} dx' = \\
&= \ln x (e^{-x} - 1) + \gamma_E - \ln x e^{-x} - \int_x^\infty \frac{e^{-x'}}{x'} dx' = -\ln x + \gamma_E + \text{Ei}(-x)
\end{aligned} \tag{12.21}$$

verwendet wurde. Für die in Gleichung (11.45) gegebene Spektraldichte $\rho_0^{(1)}(\omega, \mu)$ ergibt sich mit Hilfe dieser Funktionen

$$\begin{aligned}
\int_0^{E_C} \rho_0^{(1)}(\omega, \mu) e^{-\omega/T} d\omega &= \\
&= \frac{N_C!}{\pi^4} \left[T^6 f_5(x_C) + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} T^6 \left(r_1 \left(\ln \left(\frac{2T}{\mu} \right) f_5(x_C) + f_5^\ell(x_C) \right) + r_2 f_5(x_C) \right) \right].
\end{aligned} \tag{12.22}$$

Insgesamt erhält man für die *strahlungskorrigierte diagonale Summenregel*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} F^2(\mu) e^{-\bar{\Lambda}/T} &= \frac{N_C!}{\pi^4} \left[T^6 f_5(x_C) + c E_G^4 T^2 f_1(x_C) + E_q^6 \exp \left(-2 \frac{E_0^2}{T^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_s}{4\pi} T^6 \left(r_1 \left(\ln \left(\frac{2T}{\mu} \right) f_5(x_C) + f_5^\ell(x_C) \right) + r_2 f_5(x_C) \right) \right]
\end{aligned} \tag{12.23}$$

unter Verwendung der Abkürzungen

$$x_C := \frac{E_C}{T}, \quad E_0 := \frac{m_0}{4}, \quad (E_q)^3 := -\frac{\pi^2}{2N_C} \langle \bar{q}q \rangle \quad \text{und} \quad (E_G)^4 := \frac{\pi \alpha_s \langle GG \rangle}{32N_C(N_C - 1)}, \tag{12.24}$$

wobei F den Betrag eines der Residuen F_B ($B = \Lambda, \Sigma, \Sigma^*$) bezeichnet. Für α_s wird die laufende Kopplung verwendet, die für $N_f = 5$ aktive Flavours auf der Resonanz des Z -Bosons ($m_Z = 91.187 \text{ GeV}$) zu $\alpha_s(m_Z) = 0.118$ normiert wurde. Sie ergibt für $\mu = 1 \text{ GeV}$ und $N_f = 3$ aktive Flavours einen Wert von $\alpha_s(\mu) = 0.333$.

12.3.2 Numerische Analyse der diagonalen Summenregel

Summenregeln dienen zur Bestimmung der in ihnen enthaltenen freien Parameter E_C , $\bar{\Lambda}$ und F . Um diese drei Parameter aus der einen Gleichung zu extrahieren, ist zum einen eine reichliche Portion an Geschick und Intuition, zum anderen aber ein Kriterium nötig, welches eine solche Bestimmung auslöst. Als Kriterium wird die Konstanz der Parameter $\bar{\Lambda}$ und F in ihrer Abhängigkeit vom Borel-Parameter T verwendet, da dieser keine physikalische Bedeutung besitzt. Die Methode ist selbstkonsistent, besitzt jedoch keine Gewähr für Stabilität in jedem Fall.

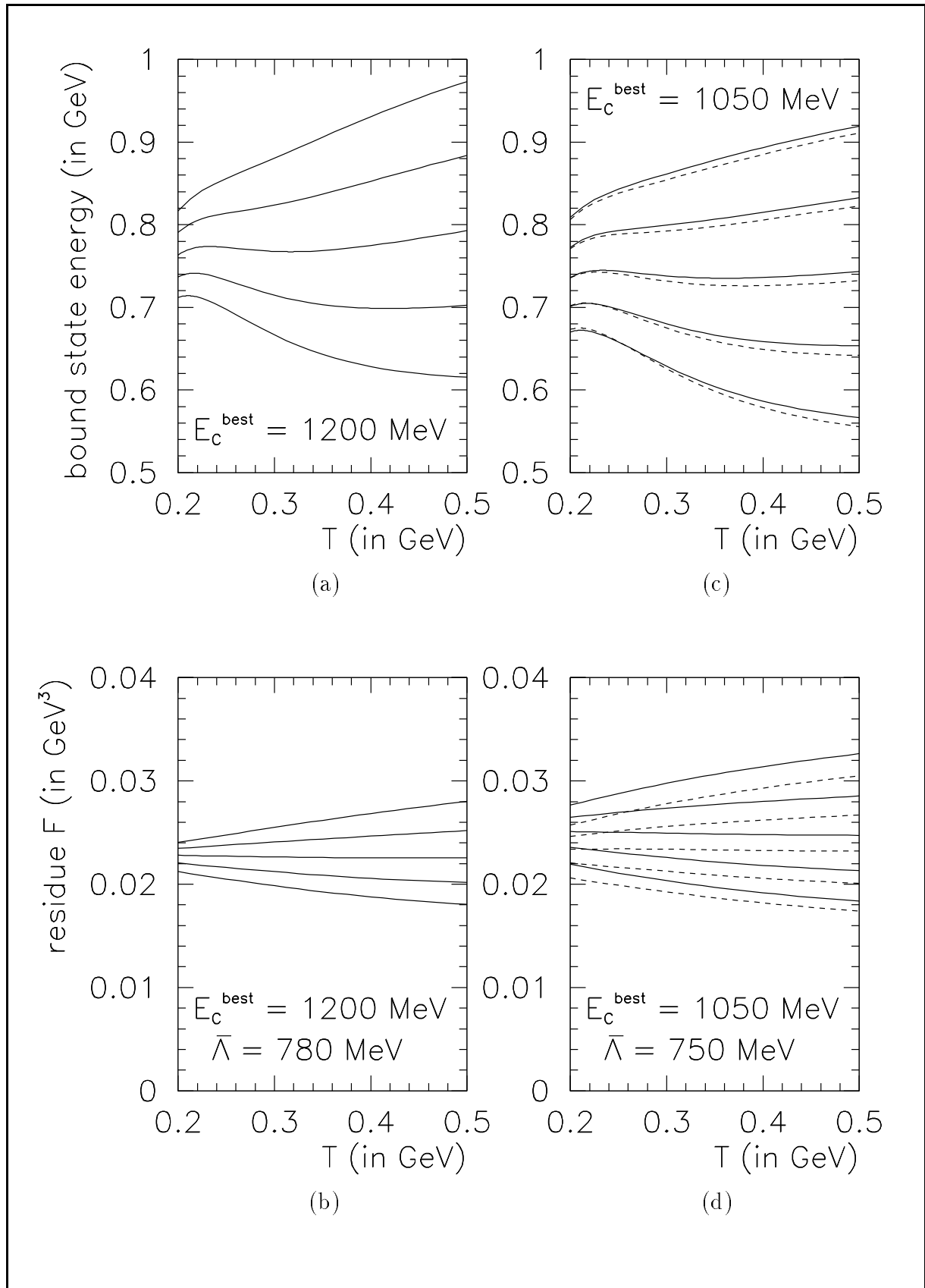


Abbildung 12.1: Analyse der diagonalen Summenregel für das schwere Baryon Λ_Q ohne (links) und mit Strahlungskorrekturen (rechts)

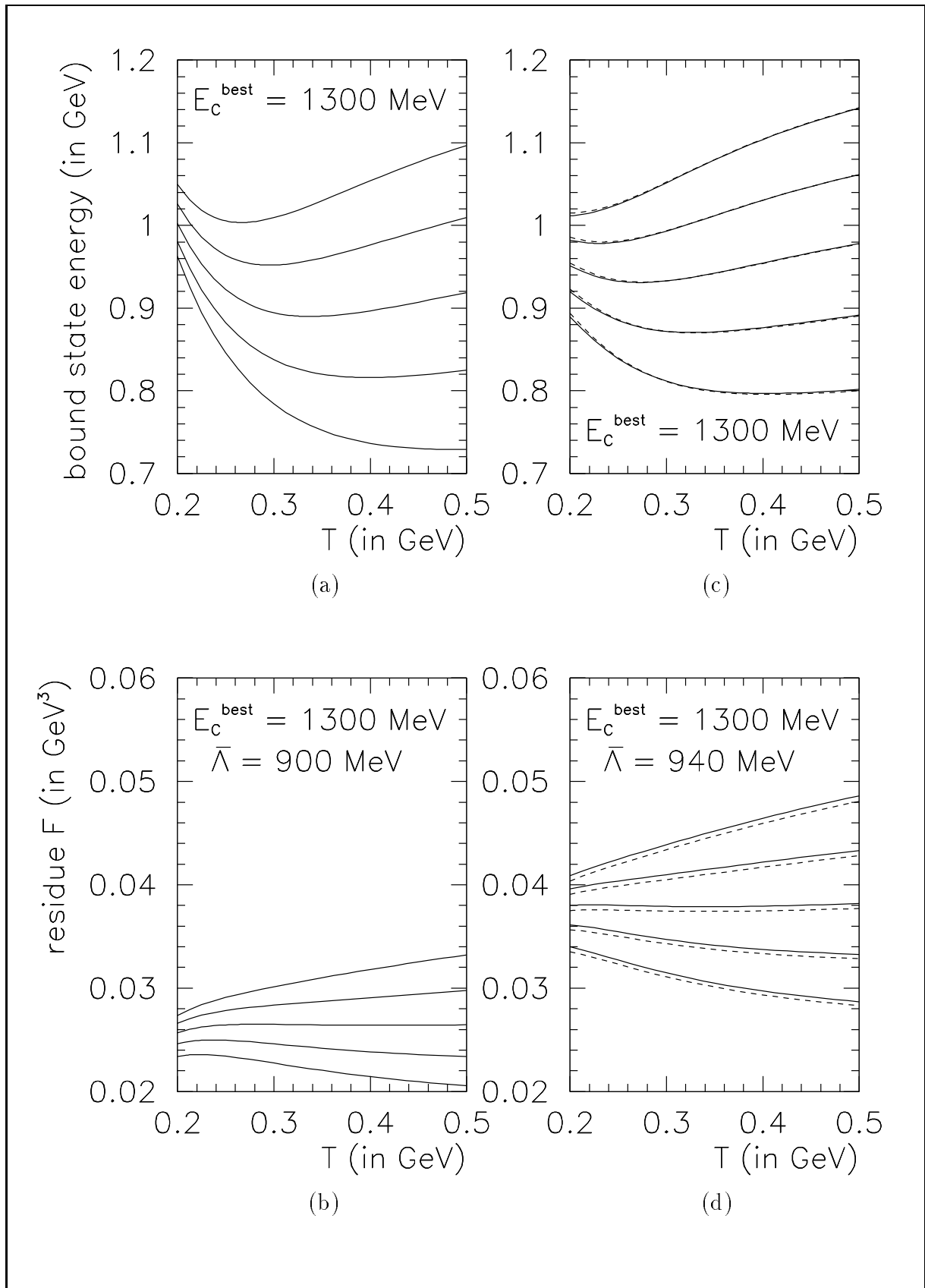


Abbildung 12.2: Analyse der diagonalen Summenregel für das schwere Baryondublett $\{\Sigma_Q, \Sigma_Q^*\}$ ohne (links) und mit Strahlungskorrekturen (rechts)

Der Bereich, aus dem die Werte des Borel-Parameters zu wählen sind, das „Fenster“ der Untersuchung also, wird durch zwei Bedingungen begrenzt. Um die Operatorproduktentwicklung konvergent zu halten, ist zu fordern, daß die nächstführenden Terme nicht mehr als 30% des führenden Terms ausmachen. Der Vergleich der Borel-transformierten Spektraldichte

$$\int_0^{E_C} \rho_4^{(0)}(\omega) e^{-\omega/T} d\omega \quad \text{mit} \quad \int_0^{E_C} \rho_0^{(1)}(\omega, \mu) e^{-\omega/T} d\omega \quad (12.25)$$

bei $E_C = 1000 \text{ MeV}$ liefert eine untere Schranke von $T > 300 \text{ MeV}$. Auf der anderen Seite sollte das Kontinuum der Summenregel, das aus den angeregten Zuständen und dem physikalischen Kontinuum besteht, keinen Beitrag liefern, der höher ist als das zehnfache des Grundzustandsbeitrags. Diese Forderung drückt sich aus als

$$K(\infty, T) - K(E_C, T) < 10K(E_C, T). \quad (12.26)$$

Für $E_C = 1000 \text{ MeV}$ liefert dies eine obere Schranke von $T < 400 \text{ MeV}$. Zu untersuchen bleibt also ein ziemlich schmales Fenster für den Borel-Parameter, und zu untersuchen ist in diesem Fenster zunächst einmal die Abhängigkeit der Grundzustandsenergie $\bar{\Lambda}$ für verschiedene Werte der Schwellenenergie E_C . Eine Formel für die Grundzustandsenergie erhält man durch Ableitung der Summenregel nach T^{-1} ,

$$\bar{\Lambda} = -(K(E_C, T))^{-1} \frac{d}{dT^{-1}} K(E_C, T). \quad (12.27)$$

Diese Analyse wurde für fünf verschiedene Werte von E_C durchgeführt, die sich im Abstand von 100 MeV um einen als besten angesehenen Wert E_C^{best} gruppieren. Die sich ergebende Grundzustandsenergie wurde dann zusammen mit denselben fünf Werten für E_C in einem zweiten Schritt dazu verwendet, um das Residuum zu analysieren,

$$F = \left(2e^{\bar{\Lambda}/T} K(E_C, T) \right)^{1/2}. \quad (12.28)$$

Die Analyse der Summenregeln für das schwere Baryon Λ_Q ist in Abbildung 12.1 dargestellt. Die Teilabbildungen (a) und (b) zeigen die Analyse der Summenregel ohne Strahlungskorrektur, in (a) ist die Grundzustandsenergie $\bar{\Lambda}$ und in (b) das Residuum dargestellt. Die Analyse ergibt hier

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}(\Lambda) &= 780 \pm 50 \text{ MeV} \quad \text{im Bereich} \quad E_C(\Lambda) = 1200 \pm 100 \text{ MeV} \quad (12.29) \\ &\text{mit dem Wert} \quad |F_\Lambda| = 0.023 \pm 0.001 \text{ GeV}^3 \quad \text{für das Residuum.} \end{aligned}$$

Die Teilabbildungen (c) und (d) stellen die Analyse der strahlungskorrigierten Summenregel dar. Die durchgezogenen Kurven sind diejenigen für Λ_1 , die gestrichelten für Λ_2 . Man erkennt eine Abweichung, die aber unter die Genauigkeit der Fehlerabschätzung fällt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}(\Lambda) &= 750 \pm 50 \text{ MeV} \quad \text{im Bereich} \quad E_C(\Lambda) = 1050 \pm 100 \text{ MeV} \quad (12.30) \\ &\text{mit dem Wert} \quad |F_\Lambda| = 0.025 \pm 0.002 \text{ GeV}^3 \quad \text{für das Residuum.} \end{aligned}$$

Die Analyse der Summenregel für das schwere Baryondublett $\{\Sigma, \Sigma^*\}$ erbrachte ohne Strahlungskorrekturen (Abbildung 12.2(a) und (b))

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}(\Sigma) &= 900 \pm 50 \text{ MeV} \quad \text{im Bereich} \quad E_C(\Sigma) = 1300 \pm 100 \text{ MeV} \quad (12.31) \\ &\text{mit dem Wert} \quad |F_\Sigma| = 0.027 \pm 0.002 \text{ GeV}^3 \quad \text{für das Residuum} \end{aligned}$$

und mit Strahlungskorrekturen (Abbildung 12.2(c) und (d))

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}(\Sigma) = 940 \pm 50 \text{ MeV} \quad \text{im Bereich} \quad E_C(\Sigma) = 1300 \pm 100 \text{ MeV} \quad (12.32) \\ \text{mit dem Wert} \quad |F_\Sigma| = 0.038 \pm 0.003 \text{ GeV}^3 \quad \text{für das Residuum.} \end{aligned}$$

Mit den hier gewonnenen Vorhersagen für die Grundzustandsenergie $\bar{\Lambda}$ und mit Hilfe experimenteller Daten für die Massen der Baryonen [67] lassen sich die Polmassen von Charm- und Bottom-Quark bestimmen. Es ist $m(\Lambda_c) = 2284.9 \pm 0.6 \text{ MeV}$, $m(\Sigma_c^+) = 2453.5 \pm 0.9 \text{ MeV}$ und $m(\Lambda_b) = 5641 \pm 50 \text{ MeV}$, woraus sich Polmassen $m_c \approx 1520 \text{ MeV}$ und $m_b \approx 4890 \text{ MeV}$ bestimmen lassen. Die experimentelle Differenz $m(\Lambda_c) - m(\Sigma_c^+) \approx 167 \text{ MeV}$ ist nahe der hier erhaltenen Differenz $m(\Lambda) - m(\Sigma) \approx 190 \text{ MeV}$. An dieser Stelle sollen nur die Zentralwerte angegeben werden. Die Genauigkeit der Vorhersagen ist verknüpft mit der inneren Genauigkeit der Summenregelmethode und ist wahrscheinlich nicht besser als 20%, was die bisherigen Fehlerangaben übertrifft.

12.3.3 Anmerkungen zum γ_5 -Schema

Die hier dargestellten Ergebnisse wurden mit Hilfe des naiv antivertauschenden γ_5 -Schemas erzielt [33]. Die Abweichungen, die durch Wahl des HVBM-Schemas [17, 31] entstehen, sind etwa in der Größenordnung der Abweichung durch Wahl der verschiedenen Stromanteile. Darüber hinaus benötigt das HVBM-Schema Regulationsterme, um den entsprechenden Ward-Identitäten genügen zu können. Diese Zusatzterme treten bei dem naiv antivertauschenden γ_5 -Schema nicht auf. Es sei abschließend erwähnt, daß die in Gleichung (10.86) vorgestellte endliche Renormierung die Ergebnisse der zwei γ_5 -Schemata wieder in Übereinstimmung bringt.

12.4 Strahlungskorrigierte nichtdiagonale Summenregel

Zur Aufstellung der nichtdiagonalen Summenregel werden die Spektraldichten $\rho_3^{(1)}(\omega, \mu)$ und $\rho_5^{(0)}(\omega)$ sowie die in t polynomialen Anteile aus den Graphen (d–f) der Abbildung 11.1 in die Borel-transformierte Summenregel (12.10) eingesetzt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F^2(\mu) e^{-\bar{\Lambda}/T} = \frac{2N_C!}{\pi^4} E_q^3 \left[T^3 f_2(x_C) - \left(1 - \frac{c}{2}\right) \left(E_0^2 T f_0(x_C) - \frac{2}{3} \frac{E_G^4}{T} \right) + \frac{\alpha_s C_F E_q^6}{36\pi T^3} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_s}{4\pi} T^3 \left(r_1 \left(\ln \left(\frac{\mu}{2T} \right) f_2(x_C) - f_2^\ell(x_C) \right) + r_2 f_2(x_C) \right) \right]. \quad (12.33) \end{aligned}$$

Dabei gelten dieselben Abkürzungen wie in Gleichung (12.23). In dieser Formel steckt außerdem die Annahme, daß die Residuen zu J_1 und J_2 nahezu übereinstimmen, was durch die Ergebnisse aus der Analyse des diagonalen Falls gerechtfertigt ist.

12.4.1 Numerische Analyse der nichtdiagonalen Summenregel

Für die nichtdiagonale Summenregel zeigt sich das „Fenster“ erlaubter Werte für den Borel-Parameter T sehr viel weiter geöffnet. Es ergibt sich hier aus denselben Forderungen der Bereich $250 \text{ MeV} < T < 1000 \text{ MeV}$. Aufgrund des weiten Bereiches erweist es

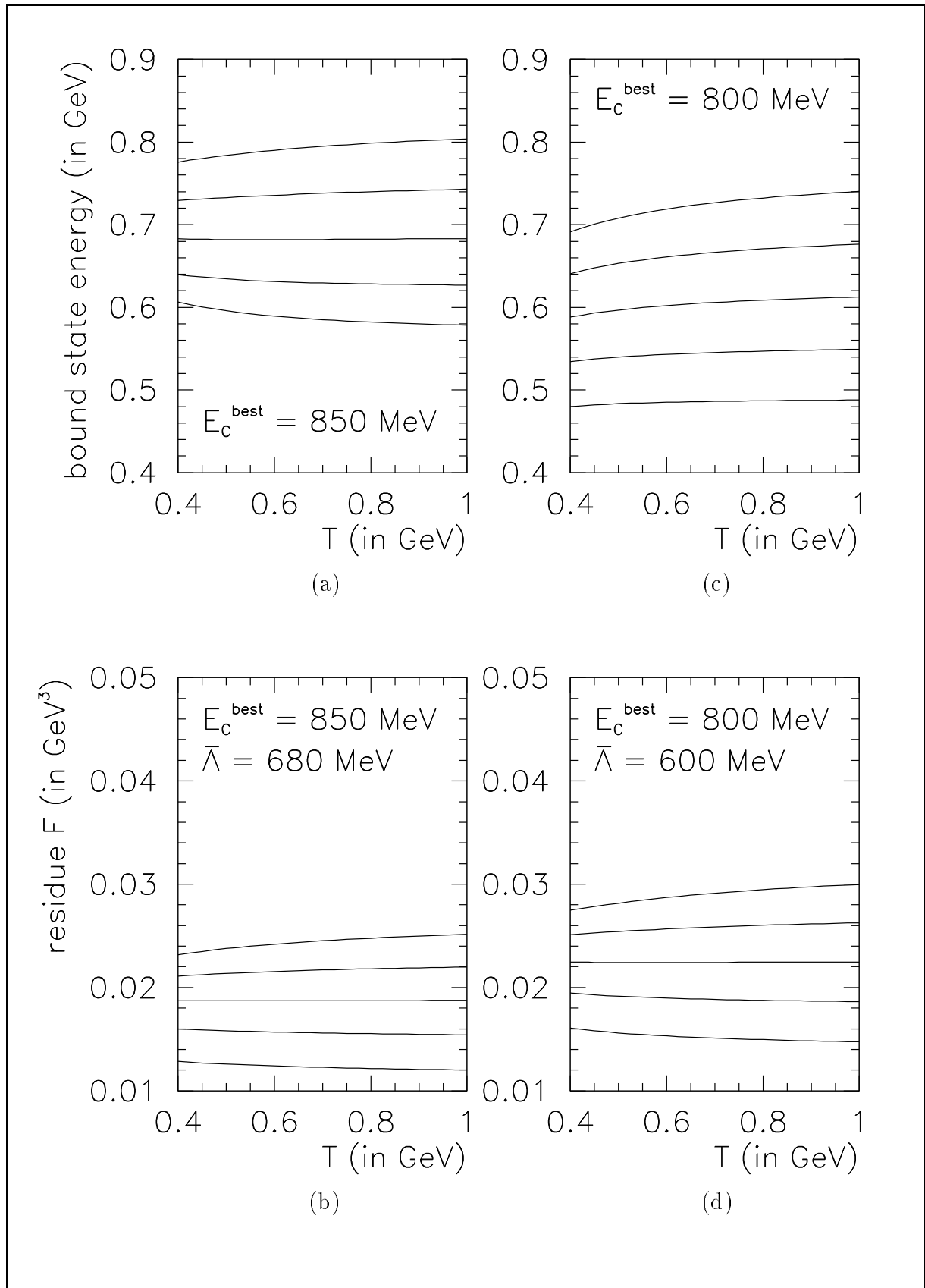


Abbildung 12.3: Analyse der nichtdiagonalen Summenregel für das schwere Baryon Λ_Q ohne (links) und mit Strahlungskorrekturen (rechts)

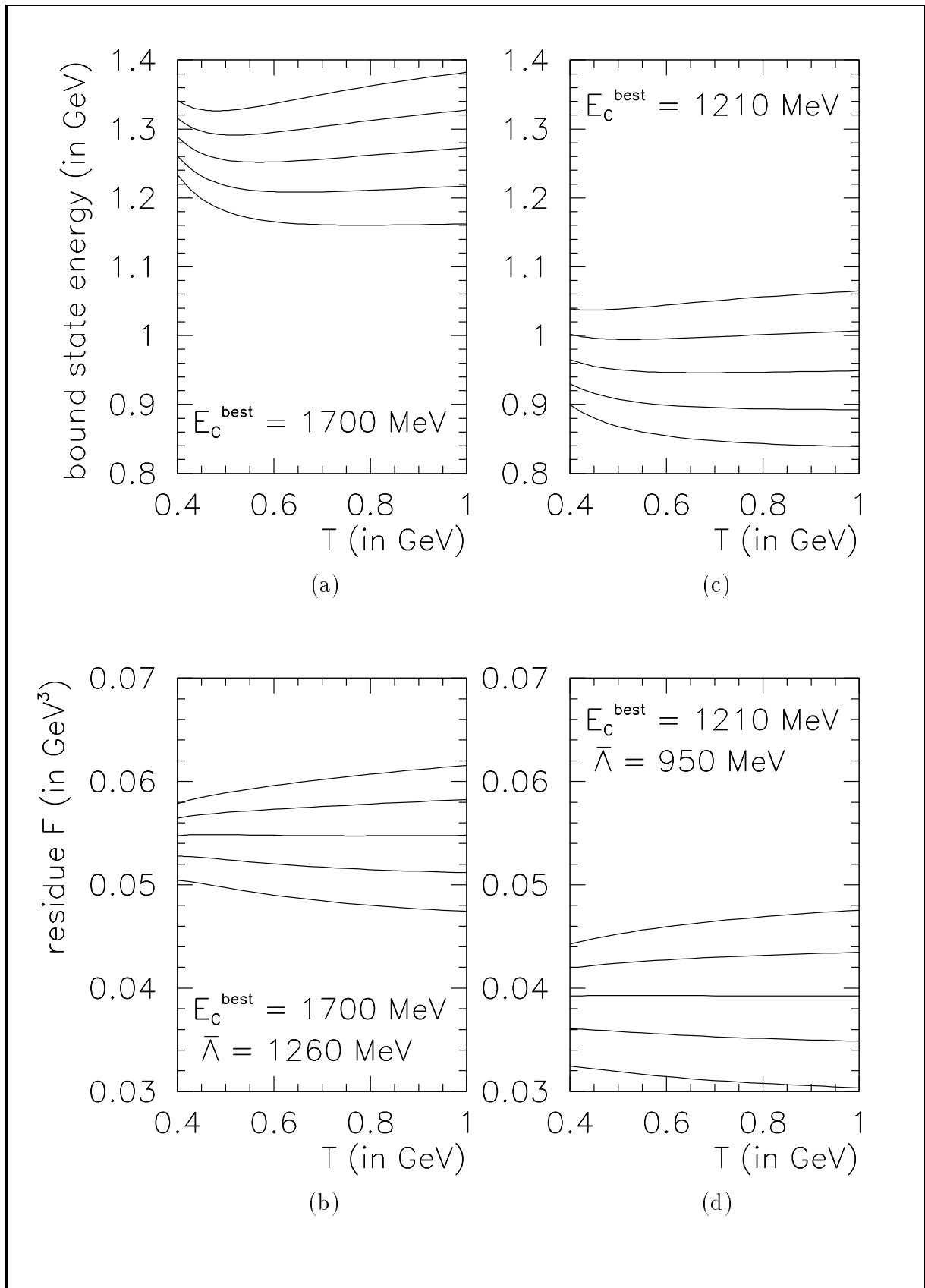


Abbildung 12.4: Analyse der nichtdiagonalen Summenregel für das schwere Baryondublett $\{\Sigma_Q, \Sigma_Q^*\}$ ohne (links) und mit Strahlungskorrekturen (rechts)

sich bei der Analyse dieser Summenregeln als sinnvoll, die Parameter nicht mit Hilfe einer Konstanz der Schwellenenergie E_C , sondern derjenigen des Residuums F zu bestimmen. Die Konstanz kann mathematisch formuliert werden als der Anteil des Fensters, innerhalb dessen das Residuum in einem schmalen Wertebereich bleibt. Trägt man diesen Wert (zwischen Null von Eins) über der Ebene aus E_C und $\bar{\Lambda}$ auf, so ergibt sich ein schmaler „Gebirgszug“, der $\bar{\Lambda}$ und E_C in eine über weite Strecken lineare Beziehung zueinander setzt. Demgegenüber ist es schwierig, „Gipfel“ auszumachen, also ein optimales Paar der beiden Energiegrößen. Dennoch ist diese Methode in schwierigen Situationen hilfreich.

Eine solche Situation tritt eben bei der Analyse des schweren Baryons Λ_Q auf, die in Abbildung 12.3 dargestellt ist (es gilt dieselbe Aufteilung in Teilabbildungen wie im diagonalen Fall). Während bei Betrachtung der Summenregel ohne Strahlungskorrektur noch eine Optimierung der Schwellenenergie möglich ist, gelingt dies mit Strahlungskorrektur nicht mehr. Hier muß auf eine Optimierung des Residuums zurückgegriffen werden. Die Analyse für das schwere Baryondublett $\{\Sigma_Q, \Sigma_Q^*\}$ in Abbildung 12.4 ist wieder problemlos. Die Ergebnisse der Analyse lassen sich aus Tabelle 12.1 ablesen.

Summenregel für ...	E_C	$\bar{\Lambda}$	F
Λ_Q (0. Ordnung)	$850 \pm 100 \text{ MeV}$	$680 \pm 100 \text{ MeV}$	$0.019 \pm 0.003 \text{ GeV}^3$
Λ_Q (1. Ordnung)	$800 \pm 100 \text{ MeV}$	$600 \pm 100 \text{ MeV}$	$0.022 \pm 0.002 \text{ GeV}^3$
Σ_Q (0. Ordnung)	$1700 \pm 100 \text{ MeV}$	$1260 \pm 100 \text{ MeV}$	$0.055 \pm 0.002 \text{ GeV}^3$
Σ_Q (1. Ordnung)	$1210 \pm 100 \text{ MeV}$	$950 \pm 100 \text{ MeV}$	$0.039 \pm 0.003 \text{ GeV}^3$

Tabelle 12.1: Ergebnisse aus der Analyse der nichtdiagonalen Summenregel (führende Ordnung und Korrekturen erster Ordnung)

12.5 Projektion auf die großen Komponenten

Wie zu Beginn des Kapitels erwähnt, wird der baryonische Strom allgemein durch die Linearkombination $J = aJ_1 + (1 - a)J_2$ beschrieben. Für die Wahl $a = 0$ oder $a = 1$ für beide am Korrelator beteiligten Ströme ergeben sich daraus die diagonalen Korrelatoren, für $a = 0$ für den einen und $a = 1$ für den anderen beteiligten Strom der nichtdiagonale Korrelator. Wählt man dagegen $a = 1/2$ für beide beteiligten Ströme, so bedeutet dies, daß durch die Kombination der Vertexstrukturen der Projektor $(1 + \not{v})/2$ entsteht, welcher alle Spinoren auf die großen Komponenten projiziert, also auch allen auftretenden leichten Quarks den Charakter schwerer Quarks verleiht. Dies ist in etwa zu vergleichen mit der Situation im *Quarkkonstituentenmodell* (constituent quark model).

12.5.1 Numerische Analyse der Summenregel

Verwendet man erneut die Konstanz des Residuums als Maß für die Güte der Energieparameter E_C und $\bar{\Lambda}$, so liefert dies auch hier eine nahezu lineare Abhängigkeit zwischen E_C und $\bar{\Lambda}$, ohne ein Paar dieser Größen gegenüber anderen besonders auszuzeichnen. Für die vorliegende Summenregel kann jedoch in jedem Fall die Schwellenenergie optimiert

werden. Die Analyse ist in Abbildung 12.5 dargestellt, die Ergebnisse in Tabelle 12.2 festgehalten.

Summenregel für ...	E_C	$\bar{\Lambda}$	F
Λ_Q	$830 \pm 100 \text{ MeV}$	$600 \pm 100 \text{ MeV}$	$0.020 \pm 0.002 \text{ GeV}^3$
Σ_Q	$1200 \pm 100 \text{ MeV}$	$920 \pm 100 \text{ MeV}$	$0.038 \pm 0.002 \text{ GeV}^3$

Tabelle 12.2: Ergebnisse aus der Analyse der Summenregel des Quarkkonstituentenmodells (mit Strahlungskorrekturen erster Ordnung zum diagonalen und nichtdiagonalen Anteil)

12.6 Vergleich der Analysen

Den Abschluß dieses Kapitels soll die Gegenüberstellung der Analyse der drei Summenregeln bilden. Zunächst kann man mit einem gewissen Grad an „physikalischer Genugtuung“ feststellen, daß die Summenregeln nur sehr schwach von der Wahl des jeweiligen Stromes J_1 bzw. J_2 abhängig sind. Dies wurde bereits im Abschnitt zur diagonalen Summenregel erwähnt. Da die Unterschiede unter die Fehlerschwelle fallen, verbietet sich eine Zerlegung der Ergebnisse in Anteile zu den entsprechenden Residuen F_1 und F_2 . Zugleich ist aber auch ein Vergleich der Summenregeln untereinander schwierig, beruhen sie doch auf sehr verschiedenen funktionellen Abhängigkeiten. Man vergleiche so etwa die riesige Spanne zwischen dem Potenzverhalten des führenden ω^6 -Terms in der Spektraldichte der diagonalen Summenregel und dem nächstführenden ω^2 -Term mit dem Verhältnis in der nichtdiagonalen Summenregel (ω^3 zu ω), was zu gänzlich anderen Wichtungen führt. Unter den genannten Vorbehalten wird hier dennoch ein Mittelwert aller drei Analysen angegeben, er ergibt sich zu

$$F_\Lambda = 0.022 \pm 0.001 \text{ GeV}^{-3}, \quad F_\Sigma = 0.038 \pm 0.002 \text{ GeV}^{-3}. \quad (12.34)$$

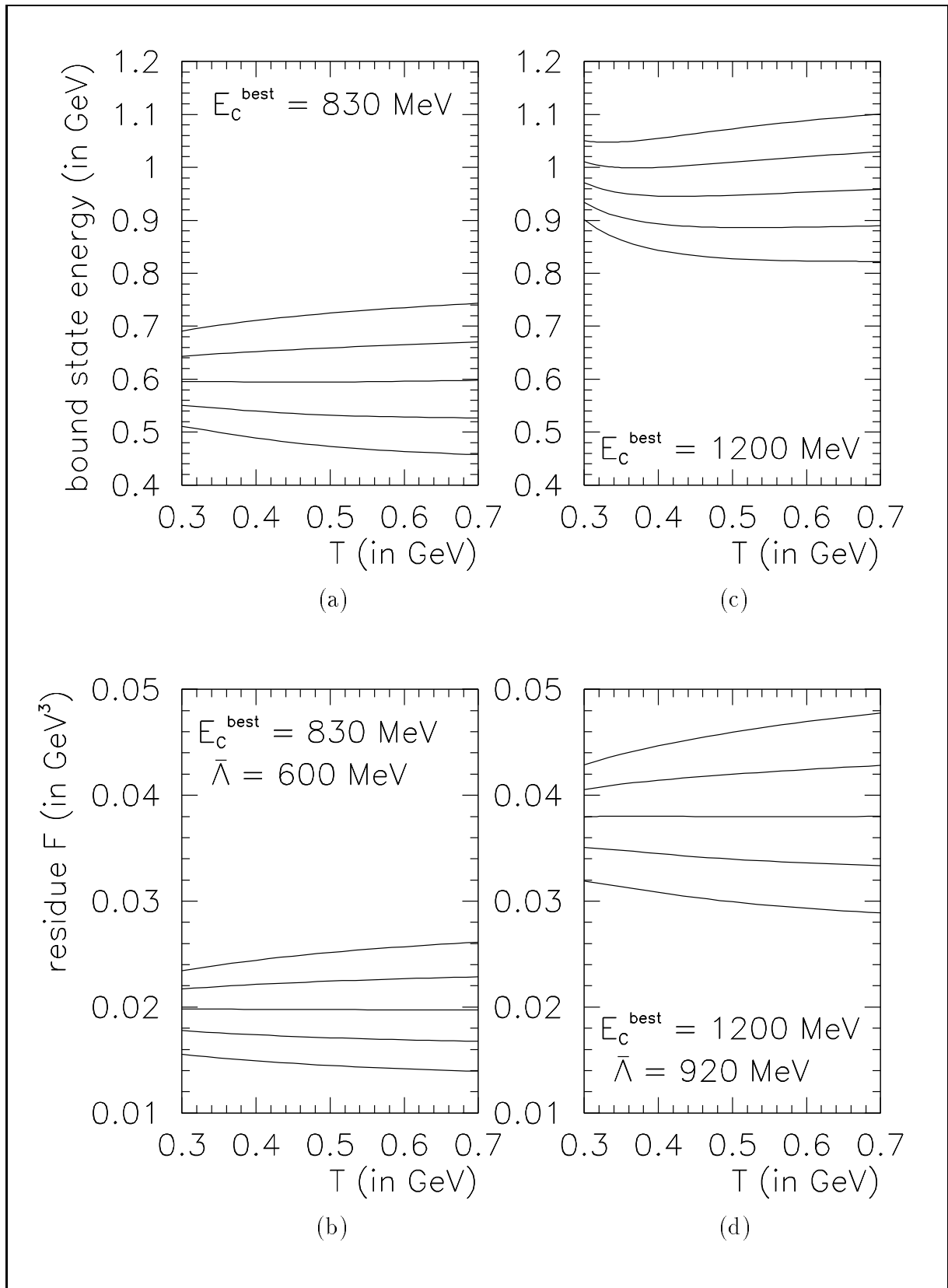


Abbildung 12.5: Analyse der Summenregel der Projektion auf die großen Komponenten für das schwere Baryon Λ_Q (links) und das schwere Baryondublett $\{\Sigma_Q, \Sigma_Q^*\}$ (rechts) mit Strahlungskorrekturen

Anhang A

Drehungen und Projektoren

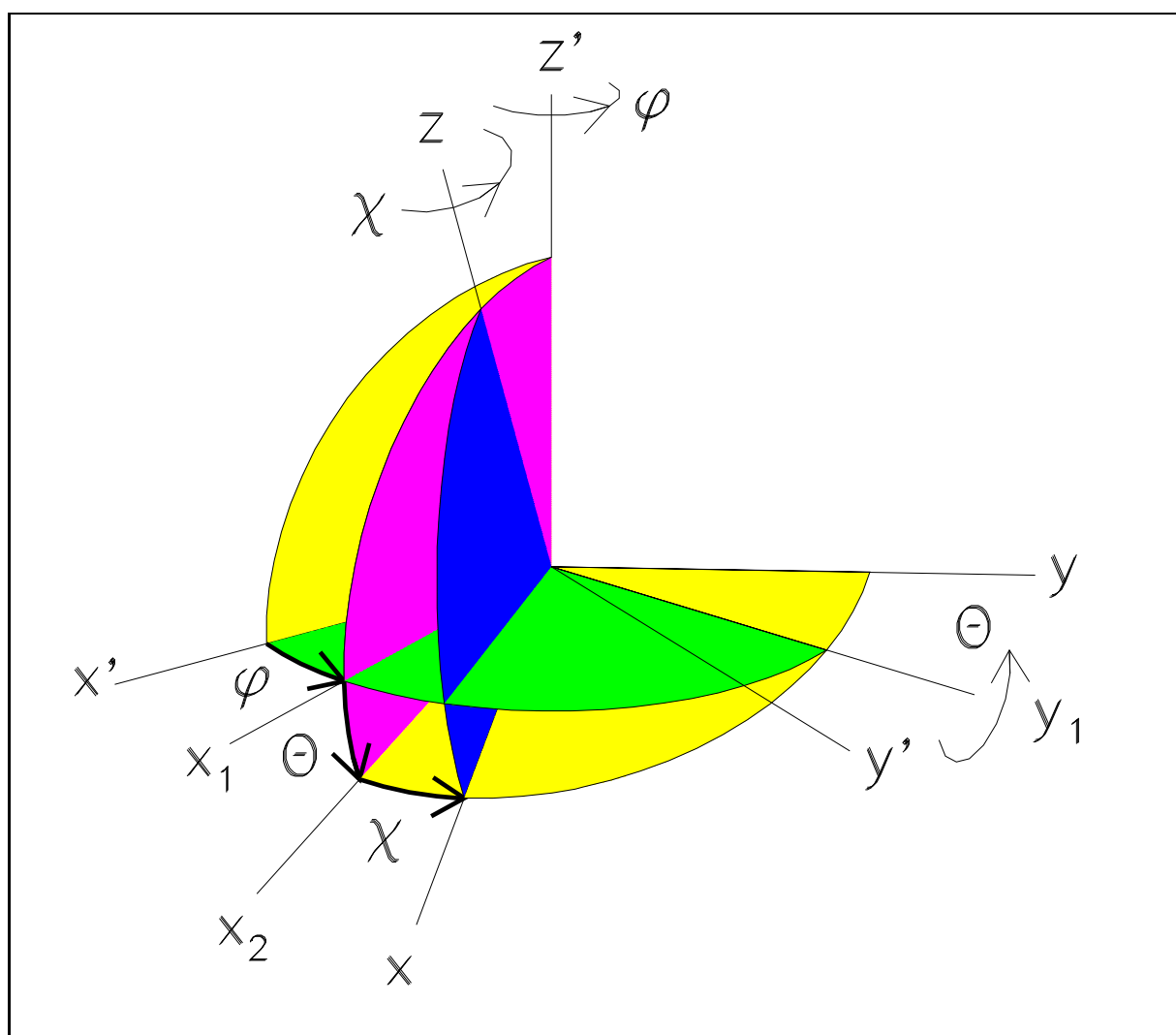


Abbildung A.1: Drehung um die Eulerschen Winkel φ , θ und χ

A.1 Die Eulerschen Drehungen

Um ein kartesisches Koordinatensystem (x', y', z') in ein Koordinatensystem (x, y, z) mit festgehaltenem Ursprung zu überführen, bedarf es Drehungen um drei Winkel. Ein häufig verwendeter Satz solcher Winkel ist derjenige der *Eulerschen Winkel* φ , θ und χ , der in Abbildung A.1 dargestellt ist. An dieser Stelle soll die Drehmatrix konstruiert werden. Zu beachten ist dabei, daß sich wie üblich die Koordinaten genau entgegengesetzt zu den Achsenvektoren transformieren. Angenommen, die Eulerdrehung bestünde nur aus einer Drehung um den Winkel φ . Dann gilt

$$\vec{e}'_1 = R(\varphi)\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{jedoch } x = R(\varphi)x'. \quad (\text{A.1})$$

Entsprechend verhält es sich für die Drehungen

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R(\chi) = \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

als Gesamtdrehung ergibt sich damit

$$x = R(\chi)R(\theta)R(\varphi)x' = R(\varphi, \theta, \chi)x' \quad (\text{A.3})$$

mit

$$\begin{aligned} R(\varphi, \theta, \chi) &= \quad (\text{A.4}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \chi - \sin \varphi \sin \chi & \sin \varphi \cos \theta \cos \chi + \cos \varphi \sin \chi & -\sin \theta \cos \chi \\ -\cos \varphi \cos \theta \sin \chi - \sin \varphi \cos \chi & -\sin \varphi \cos \theta \sin \chi + \cos \varphi \cos \chi & \sin \theta \sin \chi \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um im Fall der Quarkpolarisation die Strahl- in die Ereignisebene zu überführen, kann die Drehung um den Winkel φ fortgelassen werden. So sind für

$$p'_+ = \frac{1}{2}\sqrt{q^2}(1; 0, 0, -1), \quad p'_- = \frac{1}{2}\sqrt{q^2}(1; 0, 0, 1) \quad (\text{A.5})$$

(gestrichene Größen sind diejenigen im Strahlsystem) die Komponenten

$$L'^1 = \frac{1}{2}q^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L'^4 = \frac{1}{2}q^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

des Leptontensors im Strahlsystems gegeben. Beim Übergang ins Ereignissystem erfahren die räumlichen Komponenten eine Drehung gemäß

$$L_{kl}(\theta, \chi) = R_{km}(0, \theta, \chi)R_{ln}(0, \theta, \chi)L'_{mn}, \quad (\text{A.7})$$

welche die Ausdrücke in (2.25) reproduziert.

A.2 Darstellung der Projektoren

Gezeigt werden soll die Darstellung der in Kapitel 2 eingeführten Projektoren im Ereignissystem für die Spinrichtungen s_x und s_y .

$$\hat{\Pi}_{U+L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\Pi}_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{\Pi}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{\Pi}_I(s_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \chi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \chi \\ 0 & \cos \chi & -\sin \chi & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\Pi}_I(s_y) = -\hat{\Pi}_E(s_x) \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{\Pi}_A(s_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \sin \chi \\ 0 & 0 & 0 & i \cos \chi \\ 0 & -i \sin \chi & -i \cos \chi & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\Pi}_A(s_y) = -\hat{\Pi}_R(s_x) \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{\Pi}_T(s_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \chi & -\sin \chi \cos \chi & 0 \\ 0 & -\sin \chi \cos \chi & \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\Pi}_T(s_y) = \hat{\Pi}_O(s_x) \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{\Pi}_E(s_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \chi \\ 0 & -\sin \chi & -\cos \chi & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\Pi}_E(s_y) = \hat{\Pi}_I(s_x) \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{\Pi}_R(s_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \cos \chi \\ 0 & 0 & 0 & -i \sin \chi \\ 0 & -i \cos \chi & i \sin \chi & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\Pi}_R(s_y) = \hat{\Pi}_A(s_x) \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{\Pi}_O(s_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \chi & \sin \chi \cos \chi & 0 \\ 0 & \sin \chi \cos \chi & \cos^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\Pi}_O(s_y) = \hat{\Pi}_T(s_x) \quad (\text{A.15})$$

Aus diesen expliziten Darstellungen ergibt sich mit Hilfe von (2.25) für die jeweilige Spinrichtung die Entwicklung des Leptontensors in diese Projektoren.

Anhang B

Integrale und Zerfallsratenterme

Zusammengestellt werden sollen in diesem Anhang die Integrale der Typen \mathcal{I} , \mathcal{J} , \mathcal{S} und \mathcal{T} , wie sie in Kapitel 5 eingeführt wurden. Wie dort erwähnt wurde, brauchen von den Integralen in (5.39) lediglich die Integrale am „Rand“ der durch die ganzen Zahlen n und m gegebenen „Ebene“ berechnet zu werden, die fehlenden Integrale ergeben sich durch die Rekursionsformel (5.40). Zu beachten ist das ergänzende Integral, welches analog zu (5.63) für jeden Integraltypen auftritt. Als Abkürzungen werden

$$v := \sqrt{1-\xi}, \quad a := 2 + \sqrt{\xi}, \quad b := 2 - \sqrt{\xi} \quad \text{und} \quad w := \sqrt{(1-\sqrt{\xi})/(1+\sqrt{\xi})} \quad (\text{B.1})$$

verwendet. Dieser Anhang dient zugleich dazu, die Entstehung der im letzten Abschnitt zusammengestellten Zerfallsratenterme darzustellen.

B.1 Integrale vom Typ \mathcal{I}

$$\mathcal{I}(0, -1) = v \left(-\ln \Lambda^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{4(1-\xi)}{\xi} \right) - 2 \right) - \frac{1}{2}t_3 \quad \text{und} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{I}_a = v \left(1 - \frac{2-\xi}{2v}t_3 \right) \quad \text{mit} \quad t_3 := \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{I}(0, 0) = -\frac{1}{4}\xi t_3 + \frac{1}{2}v \quad \mathcal{I}(1, 0) = \frac{1}{8}(2-\xi)t_3 - \frac{1}{4}v \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{I}(2, 0) = -\frac{2+\xi}{8(4-\xi)}t_3 + \frac{v}{4\xi} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{I}_l(-1) = -2 \ln \Lambda^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + t_9 \quad \text{mit} \quad (\text{B.6})$$

$$t_9 := 2 \ln \left(\frac{2(1-\xi)}{\sqrt{\xi}} \right) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + 2 \left(\text{Li}_2 \left(\frac{1+v}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1-v}{2} \right) \right) + \\ + 3 \left(\text{Li}_2 \left(-\frac{2v}{1-v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2v}{1+v} \right) \right)$$

$$\mathcal{I}_l(0) = \frac{1}{2}(2 - \xi)t_3 - v \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{I}_l(1) = \frac{1}{16}(8 + \xi^2)t_3 - \frac{1}{8}(10 - \xi)v \quad (\text{B.8})$$

B.2 Integrale vom Typ \mathcal{J}

$$\mathcal{J}(0, -1) = \frac{1}{v} \left(-\ln \Lambda^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{4(1 - \xi)}{\xi} \right) - 1 \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{J}_a = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{2 - \xi}{2v} t_3 \right) \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{J}(0, 0) = \frac{1}{2}t_3 \quad \mathcal{J}(0, 1) = \mathcal{J}(0, 0) - v \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{J}(0, 2) = \frac{2 + \xi}{4}t_3 - \frac{3}{2}v \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{J}(1, 0) = \frac{3t_3}{2(4 - \xi)} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{J}(2, 0) = \frac{1}{(4 - \xi)^2} \left(\frac{3(4 + \xi)}{2(4 - \xi)} t_3 + \frac{4v}{\xi} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$\mathcal{J}_l(-1) = \frac{1}{1 - \xi} (-2 \ln \Lambda^{\frac{1}{2}} + t_9 - \mathcal{J}_l(1) + 2\mathcal{J}_l(0)) \quad (\text{B.15})$$

$$\mathcal{J}_l(0) = \frac{t_4}{\sqrt{\xi}} \quad \text{mit} \quad (\text{B.16})$$

$$t_4 := \text{Li}_2(w) - \text{Li}_2(-w) + \text{Li}_2\left(\frac{a}{b}w\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{a}{b}w\right)$$

$$\mathcal{J}_l(1) = (1 - \sqrt{\xi})\mathcal{J}_l(0) + t_5 \quad \text{mit} \quad (\text{B.17})$$

$$t_5 := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}a}{4(1 + \sqrt{\xi})} \right) \ln \left(\frac{1 + v}{1 - v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1 + w)} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1 - w)} \right) + \\ + \text{Li}_2 \left(\frac{1 + w}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1 - w}{2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{a(1 + w)}{4} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{a(1 - w)}{4} \right)$$

$$\mathcal{J}_l(2) = t_5 + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} t_4 + \frac{2 - \xi}{2} t_3 - v \quad (\text{B.18})$$

$$\mathcal{J}_l(3) = (3 + \xi)t_5 + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} t_4 + \frac{40 - 16\xi + \xi^2}{16} t_3 - \frac{26 - \xi}{8} v \quad (\text{B.19})$$

B.3 Integrale vom Typ \mathcal{S}

$$\mathcal{S}(0, -1) = \ln\left(\frac{2(1-\sqrt{\xi})}{\sqrt{\Lambda\xi}}\right) - 1 \quad \mathcal{S}_a = 1 - \frac{2-\xi}{2v}t_3 \quad (\text{B.20})$$

$$\mathcal{S}(0, 0) = 1 - \sqrt{\xi} \quad \mathcal{S}(0, 1) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\xi})^2 \quad (\text{B.21})$$

$$\mathcal{S}(1, 0) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{b^2}{\xi}\right) = -\frac{1}{4}(t_1 - t_2) \quad \text{mit} \quad (\text{B.22})$$

$$t_1 := \ln\left(\frac{2\xi\sqrt{\xi}}{b^2(1+\sqrt{\xi})}\right) \quad \text{und} \quad t_2 := \ln\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}\right)$$

$$\mathcal{S}(2, 0) = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{\xi b^2} \quad (\text{B.23})$$

$$\mathcal{S}_l(-1) = \frac{1}{v} \left(-2 \ln \Lambda^{\frac{1}{2}} t_3 + t_7\right) \quad \text{mit} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} t_7 := & 2 \ln\left(\frac{1+\xi}{2\xi}\right) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2v}{(1+v)^2}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{2v}{(1-v)^2}\right) + \\ & -\frac{1}{2} \text{Li}_2\left(-\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^2\right) + \frac{1}{2} \text{Li}_2\left(-\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^2\right) + \\ & + \text{Li}_2\left(\frac{2w}{1+w}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{2w}{1-w}\right) - 2 \text{Li}_2\left(\frac{w}{1+w}\right) + 2 \text{Li}_2\left(-\frac{w}{1-w}\right) + \\ & + \text{Li}_2\left(\frac{2aw}{b+aw}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{2aw}{b-aw}\right) - 2 \text{Li}_2\left(\frac{aw}{b+aw}\right) + 2 \text{Li}_2\left(-\frac{aw}{b-aw}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_i(0) = t_6 \quad \text{mit} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} t_6 := & \ln^2(1+w) + \ln^2(1-w) + \ln\left(\frac{a}{8}\right) \ln(1-w^2) + \text{Li}_2\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1+w)}\right) + \\ & + \text{Li}_2\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1-w)}\right) - 2 \text{Li}_2\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1+w}{2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1-w}{2}\right) + \\ & - 2 \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{a(1+w)}{4}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{a(1-w)}{4}\right) - 2 \text{Li}_2\left(\frac{a}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_i(1) = t_6 - 2vt_3 - \frac{1}{4}(4-\xi)(t_1 - t_2) + 1 - \sqrt{\xi} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i(2) = & \frac{1}{2}(2+\xi)t_6 - 3vt_3 - \frac{1}{32}(4-\xi)(12-\xi)(t_1 - t_2) + \\ & + \frac{1}{8}(1-\sqrt{\xi})(18-2\sqrt{\xi}-\xi) \quad (\text{B.27}) \end{aligned}$$

B.4 Integrale vom Typ \mathcal{T}

$$\mathcal{T}(0, -1) = -\frac{t_0}{2\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})} + \frac{1}{v^2} \left(-\ln \Lambda^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{1-\xi}{\xi} \right) - 1 \right) \quad \text{und} \quad (\text{B.28})$$

$$\mathcal{T}(0, 0) = -\frac{t_0}{2\sqrt{\xi}} \quad \text{mit} \quad t_0 := \ln \left(\frac{\varepsilon^2(1-\sqrt{\xi})}{2\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi})} \right) \quad (\text{B.29})$$

$$\mathcal{T}_a = \frac{1}{v^2} \left(1 - \frac{2-\xi}{2v} t_3 \right) \quad (\text{B.30})$$

$$\mathcal{T}(0, 1) = \mathcal{T}(0, 0) + \frac{1}{2} t_0 + t_2 = -\frac{1-\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}} t_0 + t_2 \quad (\text{B.31})$$

$$\mathcal{T}(0, 2) = -\frac{(1-\sqrt{\xi})^2}{2\sqrt{\xi}} t_0 + 2t_2 + 1 - \sqrt{\xi} \quad (\text{B.32})$$

$$\mathcal{T}(0, 3) = -\frac{(1-\sqrt{\xi})^3}{2\sqrt{\xi}} t_0 - (3+\xi)t_2 + \frac{1}{2}(1-\sqrt{\xi})(5-\sqrt{\xi}) \quad (\text{B.33})$$

$$\mathcal{T}(1, 1) = -\frac{1-\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}b^2} t_0 + \frac{\xi}{(4-\xi)^2} t_1 \quad (\text{B.34})$$

$$\mathcal{T}(2, 1) = -\frac{1-\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}b^4} t_0 - \frac{16-16\xi-\xi^2}{(4-\xi)^4} t_1 - \frac{4(1-\sqrt{\xi})}{b^2(4-\xi)^2} \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_l(-1) &= \frac{1}{\xi v^2} \left(\frac{2(1+\sqrt{\xi})}{2-\sqrt{\xi}} (2-t_0) - \frac{4+5\xi}{4-\xi} t_1 - t_2 - 2\frac{1+\xi}{v} t_3 \right) + \\ &+ \frac{1}{v^3} (-2 \ln \Lambda^{\frac{1}{2}} t_3 + t_7) \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

$$\mathcal{T}_l(0) = \frac{1}{\xi} \left(\frac{2(2-t_0)}{2-\sqrt{\xi}} - \frac{4+\xi}{4-\xi} t_1 - t_2 - \frac{2}{v} t_3 \right) \quad (\text{B.37})$$

$$\mathcal{T}_l(1) = \frac{1}{\xi} \left(\frac{2(1-\sqrt{\xi})}{2-\sqrt{\xi}} (2-t_0) - \frac{4-3\xi}{4-\xi} t_1 - t_2 - 2vt_3 \right) \quad (\text{B.38})$$

$$\mathcal{T}_l(2) = \frac{1}{\xi} \left(\frac{2(1-\sqrt{\xi})^2}{2-\sqrt{\xi}} (2-t_0) - \frac{4-3\xi+\xi^2}{4-\xi} t_1 - (1+\xi)t_2 - 2vt_3 \right) + t_6$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_l(3) &= \frac{1}{\xi} \left(\frac{2(1-\sqrt{\xi})^3}{2-\sqrt{\xi}} (2-t_0) - \frac{16+20\xi-12\xi^2+\xi^3}{4(4-\xi)} t_1 + \right. \\ &\left. - \frac{4+8\xi+\xi^2}{4} t_2 - 2(1+2\xi)vt_3 \right) + 1 - \sqrt{\xi} + 3t_6 \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

B.5 Tabelle der Zerfallsratenterme

$$t_1 := \ln\left(\frac{2\xi\sqrt{\xi}}{b^2(1+\sqrt{\xi})}\right), \quad t_2 := \ln\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}\right) \Rightarrow t_1 - t_2 = \ln\left(\frac{\xi}{b^2}\right) \quad (\text{B.40})$$

$$t_3 := \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \quad (\text{B.41})$$

$$t_4 := \text{Li}_2(w) - \text{Li}_2(-w) + \text{Li}_2\left(\frac{a}{b}w\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{a}{b}w\right) \quad (\text{B.42})$$

$$t_5 := \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{\xi}a}{4(1+\sqrt{\xi})}\right) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1+w)}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1-w)}\right) + \\ + \text{Li}_2\left(\frac{1+w}{2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1-w}{2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{a(1+w)}{4}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{a(1-w)}{4}\right) \quad (\text{B.43})$$

$$t_6 := \ln^2(1+w) + \ln^2(1-w) + \ln\left(\frac{a}{8}\right) \ln(1-w^2) + \\ + \text{Li}_2\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1+w)}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1-w)}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a}\right) + \\ + \text{Li}_2\left(\frac{1+w}{2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1-w}{2}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \\ + \text{Li}_2\left(\frac{a(1+w)}{4}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{a(1-w)}{4}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{a}{4}\right) \quad (\text{B.44})$$

$$t_7 := 2 \ln\left(\frac{1-\xi}{2\xi}\right) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2v}{(1+v)^2}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{2v}{(1-v)^2}\right) + \\ - \frac{1}{2} \text{Li}_2\left(-\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^2\right) + \frac{1}{2} \text{Li}_2\left(-\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^2\right) + \\ + \text{Li}_2\left(\frac{2w}{1+w}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{2w}{1-w}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{w}{1+w}\right) + 2\text{Li}_2\left(-\frac{w}{1-w}\right) + \\ + \text{Li}_2\left(\frac{2aw}{b+aw}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{2aw}{b-aw}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{aw}{b+aw}\right) + 2\text{Li}_2\left(-\frac{aw}{b-aw}\right) \quad (\text{B.45})$$

$$t_8 := \ln\left(\frac{\xi}{4}\right) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{2v}{1-v}\right) - \pi^2 \quad (\text{B.46})$$

$$t_9 := 2 \ln\left(\frac{2(1-\xi)}{\sqrt{\xi}}\right) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + 2 \left(\text{Li}_2\left(\frac{1+v}{2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1-v}{2}\right) \right) + \\ + 3 \left(\text{Li}_2\left(-\frac{2v}{1-v}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) \right) \quad (\text{B.47})$$

$$t_{10} := \ln\left(\frac{4}{\xi}\right), \quad t_{11} := \ln\left(\frac{4(1-\sqrt{\xi})^2}{\xi}\right), \quad t_{12} := \ln\left(\frac{4(1-\xi)}{\xi}\right) \quad (\text{B.48})$$

Anhang C

Massive Leptonen

Ab der Konstruktion des Leptontensors in (2.25) wurde die Masse der Leptonen für die hier betrachteten Anwendungen vernachlässigt. Das hatte zur Folge, daß die Zeit- oder *temporalen Komponenten* des Leptontensors verschwanden. In diesem Anhang soll der Fall nichtverschwindender Leptonmasse behandelt und ein neuer *temporaler Projektor* benutzt werden, um entsprechende Beiträge zu erhalten. Ziel dieses Anhangs ist ein Vergleich mit Ergebnissen aus [68]. Wie Rechnungen mit

$$\begin{aligned} (p_+^\mu) &= \frac{1}{2}\sqrt{q^2}(1; \tilde{v}\sin\theta\cos\chi, -\tilde{v}\sin\theta\sin\chi, -\tilde{v}\cos\theta) \quad \text{und} \\ (p_-^\mu) &= \frac{1}{2}\sqrt{q^2}(1; -\tilde{v}\sin\theta\cos\chi, \tilde{v}\sin\theta\sin\chi, \tilde{v}\cos\theta) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

zeigen, ergeben sich die Leptontensorkomponenten zu

$$\begin{aligned} \tilde{L}^1 &= \tilde{v}^2 L^1 + \frac{1}{4}q^2(1 - \tilde{v}^2)(\Pi_S + \Pi_U + \Pi_L), \\ \tilde{L}^2 &= \frac{1}{4}q^2(1 - \tilde{v}^2)(\Pi_S - \Pi_U - \Pi_L), \\ \tilde{L}^3 &= 0 \quad \text{und} \\ \tilde{L}^4 &= \tilde{v}L^4. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Dabei soll die Tilde den massiven Fall andeuten, $\tilde{v} = \sqrt{1 - 4m_e^2/q^2}$ ist die Geschwindigkeit der Leptonen in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c , und

$$\Pi_S = (\hat{\Pi}_{\mu\nu}^S) \quad \text{mit} \quad \Pi_{\mu\nu}^S := e_{0\mu}e_{0\nu} = \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \quad (\text{C.3})$$

ist der neue Projektor, der im Schwerpunktsystem die $(0,0)$ -Komponente des Hadrontensors herausprojiziert. Zu diesem Projektor können die Projektionen bestimmt werden, und es ergibt sich für die Bornsche Näherung

$$H_S^{VV}(\text{born}) = H_S^{VA}(\text{born}) = H_S^{AV}(\text{born}) = 0, \quad H_S^{AA}(\text{born}) = N_C q^2 \xi, \quad (\text{C.4})$$

für die Schleifengraphen erster Ordnung

$$H_S^{VV}(\text{loop}) = H_S^{VA}(\text{loop}) = H_S^{AV}(\text{loop}) = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$H_S^{AA}(\text{loop}) = N_C \left[(C + \bar{C})\xi + (D + \bar{D}) \right] q^2 \quad (\text{C.6})$$

(wobei die Formfaktoren C und D der Vertexkorrektur in Kapitel 3 angegeben sind) und für die Baumgraphen erster Ordnung unintegriert zunächst

$$\begin{aligned} H_S^{VV}(y, z) &= H_S^{VA}(y, z) = H_S^{AV}(y, z) = 0, \\ H_S^{AA}(y, z) &= 4\pi\alpha_s N_C C_F \xi \left[4 - \frac{\xi}{y^2} - \frac{4}{y} - \frac{\xi}{z^2} - \frac{4}{z} + \frac{4}{yz} - \frac{2\xi}{yz} + \frac{2y}{z} + \frac{2z}{y} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Das Verschwinden der Komponenten VV , VA und AV ist eine Konsequenz aus der Vektorstromerhaltung. Die Integration über die Phasenraumvariable z liefert für die einzige nichtverschwindende Komponente H_S^{AA}

$$\begin{aligned} H_S^{AA}(y) &= 4\pi\alpha_s N_C C_F \xi \left[\left\{ 2\frac{2-\xi}{y} - 4 + 2y \right\} \ln \left(\frac{z_+(y)}{z_-(y)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{y} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \left\{ -\frac{4\xi y}{\xi y^2 + 4\Lambda(1-y-\xi+\Lambda)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -\frac{4}{y} + 3 + \frac{4(1-\xi)}{4y+\xi} - \frac{\xi(4-\xi)}{(4y+\xi)^2} \right\} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

die Integration über y ergibt dann unter Einbeziehung des relativen Phasenraumfaktors formal

$$\begin{aligned} H_S^{AA}(tree) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2 \xi}{4\pi v} \left[2(2-\xi)\mathcal{I}_l(-1) - 8\mathcal{I}(-1, 0) + 4\mathcal{I}_a + \right. \\ &\quad \left. - 4\mathcal{I}_l(0) + 2\mathcal{I}_l(1) + 3\mathcal{I}(0, 0) + 4(1-\xi)\mathcal{I}(1, 0) - \xi(4-\xi)\mathcal{I}(2, 0) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Aus der Summe der beiden Beiträge erster Ordnung kürzen sich die IR-Singularitäten heraus, und die Summe läßt sich schließlich durch die in Anhang B.5 angegebenen Zerfallsratenterme ausdrücken,

$$\begin{aligned} \text{Re}(H_S^{AA}(\alpha_s)) &= \frac{\alpha_s N_C C_F q^2 \xi}{4\pi v} \left[\left(9 + \frac{3}{2}\xi\right)v - 8vt_{12} - 4vt_{10} + \right. \\ &\quad \left. - 2(2-\xi)(t_8 - t_9) + \left(6 - 2\xi + \frac{3}{4}\xi^2\right)t_3 \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

In expliziter Form ergibt sich

$$\begin{aligned} H_S^{AA}(\alpha_s) &= \frac{N_C q^2}{v} \xi \left[v + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left\{ \left(9 + \frac{3}{2}\xi\right)v + 8v \ln \left(\frac{\xi}{4v^2} \right) + 4v \ln \left(\frac{\xi}{4} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(6 - 2\xi + \frac{3}{4}\xi^2\right) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(2-\xi) \left(2 \ln \left(\frac{\xi}{4v^2} \right) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + 4 \left(\text{Li}_2 \left(\frac{2v}{1+v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{-2v}{1-v} \right) \right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 2 \left(\text{Li}_2 \left(\frac{1+v}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1-v}{2} \right) \right) - \pi^2 \right) \right\} \right] + O(\alpha_s^2). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

An dieser Stelle bietet sich ein Vergleich mit den Ergebnissen aus [68] an. Dort wird die Spektralfunktion, die im wesentlichen dem von der Schwerpunktsenergie abhängigen totalen Wirkungsquerschnitt entspricht, in einen transversalen und longitudinalen Anteil

zerlegt. Der transversale Anteil entspricht hier der Projektion $U + L$, der longitudinale Anteil der Projektion S . Anders als in [68] sind die Massen von Quark und Antiquark hier gleichgesetzt. Zu vergleichen ist also mit den Ausdrücken $\rho_L^V(s)$ und $\rho_L^A(s)$ der Gleichung (4.2) aus [68] für den Grenzfall gleicher Massen. Zu diesem Zwecke müssen die im Anhang von [68] definierten Integrale K , J_i und L_i umgeschrieben werden. Es ergibt sich unter Ausnutzung der Dilogarithmenbeziehungen

$$\begin{aligned} 2\text{Li}_2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) &= -\text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{-2v}{1-v}\right) + \\ &\quad + \ln\left(\frac{4v^2}{1-v^2}\right) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + \frac{\pi^2}{3}, \\ 4\text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) &= 2\text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{-2v}{1-v}\right) - \ln^2\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

(beide lassen sich mit Hilfe der Regeln (3.75) und (3.76) herleiten)

$$\text{Re}(K(q^2)) = \frac{1}{q^2 v} \left[4 \ln 2 \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + \pi^2 - \text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{-2v}{1-v}\right) \right], \quad (\text{C.13})$$

$$K(0) = \frac{1}{m^2} \ln\left(\frac{m^2}{16m^2}\right) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^{2t} - 1} = -\frac{1}{2m} \ln(16) = -\frac{8}{\xi q^2} \ln 2,$$

$$J_0(q^2) = \frac{1}{32} q^2 \left[2v(2 + \xi) - \xi(4 - \xi) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \right], \quad (\text{C.14})$$

$$J_1(q^2) = J_2(q^2) = \frac{2}{\xi q^2} \left[2v \left(\ln\left(\frac{2v^2}{\xi}\right) - 1 \right) - v \ln \xi - (3 - \xi) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \right],$$

$$\begin{aligned} L_0(q^2) &= \frac{1}{q^2} \left[2 \ln\left(\frac{v^2}{\xi}\right) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + 2\text{Li}_2\left(\frac{1+v}{2}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{1-v}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. - 3\text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) + 3\text{Li}_2\left(\frac{-2v}{1-v}\right) \right], \end{aligned}$$

$$L_1(q^2) = (2 - \xi) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) - 2v,$$

$$L_2(q^2) = \frac{1}{4} q^2 \left[(4v^2 + \frac{3}{2} \xi^2) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + 3v(2 - \xi) \right]. \quad (\text{C.15})$$

Es ist zunächst $\rho_L^V(q^2) = 0$, wiederum spiegelt dies die Erhaltung des Vektorstroms wider. Für den Axialvektoranteil ergibt sich mit $\bar{F}_A(0) = F_A(0) = 1 - \alpha_s C_F / 2\pi$

$$\begin{aligned} \text{Re}(\rho_L^A(q^2)) &= \frac{3\xi}{8\pi^2} \left[v(2\bar{F}_A(0) - 1) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left\{ 4q^2 v K(q^2) - 2\xi q^2 v (K(q^2) - K(0)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \xi q^2 (J_1(q^2) + J_2(q^2)) + 2q^2 (2 - \xi) L_0(q^2) - 4L_1(q^2) + \frac{2}{q^2} L_2(q^2) \right\} \right] = \\ &= \frac{3\xi}{8\pi^2} \left[v + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left\{ (9 + \frac{3}{2} \xi) v - 8vt_{12} - 4vt_{10} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(2 - \xi)(t_8 - t_9) + (6 - 2\xi + \frac{3}{4} \xi^2) t_3 \right\} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

also bis auf den Vorfaktor dasselbe Ergebnis wie nach den Methoden dieser Arbeit.

Anhang D

Dirac- und Pre-Diracstruktur

D.1 Konstruktion der Diracstruktur

Wie in Kapitel 8 ausgeführt, kann ein Tensorintegral in Kovariante entwickelt werden. Solche sind Kombinationen aus dem metrischen Tensor und den äußeren Impulsen bzw. Geschwindigkeitsvierervektoren. Die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten oder *Invarianten* erhalten im Folgenden die Bezeichnungen A_p, B_p, \dots , wobei p den Grad des Tensorintegrals angibt. Der vorliegende Anhang stellt eine Schematisierung des Passarino-Veltman-Verfahrens [44] dar, welche die Vorlage für die Konstruktion eines Algorithmus bildete.

D.1.1 Bildung der Kontraktionen

Zu den Invarianten dual sind die *Kontraktionsintegrale*, die mit I_{A_p}, I_{B_p}, \dots bezeichnet werden. Sie entstehen durch Kontraktion des Tensorintegrals mit dem zum entsprechenden Entwicklungsterm dualen Tensor. Die Bildung aller möglichen Kontraktionen liefert unter Beachtung von $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = n$ (n ist die Raumzeitdimension) für jeden Grad p des Tensorintegrals ein lineares Gleichungssystem,

$$\begin{aligned} I_{A0} &= A_0, & I_{A1} &= A_1, & I_{A2} &= nA_2 + B_2, & I_{B2} &= A_2 + B_2, \\ I_{A3} &= nA_3 + B_3 + C_3 + D_3, & I_{C3} &= A_3 + B_3 + nC_3 + D_3, \\ I_{B3} &= A_3 + nB_3 + C_3 + D_3, & I_{D3} &= A_3 + B_3 + C_3 + D_3, \\ I_{A4} &= n^2A_4 + nB_4 + nC_4 + nD_4 + E_4 + F_4 + G_4 + H_4 + nI_4 + J_4, \\ I_{B4} &= nA_4 + n^2B_4 + nC_4 + D_4 + nE_4 + F_4 + G_4 + nH_4 + I_4 + J_4, \\ I_{C4} &= nA_4 + nB_4 + n^2C_4 + D_4 + E_4 + nF_4 + nG_4 + H_4 + I_4 + J_4, \\ I_{D4} &= nA_4 + B_4 + C_4 + nD_4 + E_4 + F_4 + G_4 + H_4 + I_4 + J_4, \\ I_{E4} &= A_4 + nB_4 + C_4 + D_4 + nE_4 + F_4 + G_4 + H_4 + I_4 + J_4, \\ I_{F4} &= A_4 + B_4 + nC_4 + D_4 + E_4 + nF_4 + G_4 + H_4 + I_4 + J_4, \\ I_{G4} &= A_4 + B_4 + nC_4 + D_4 + E_4 + F_4 + nG_4 + H_4 + I_4 + J_4, \\ I_{H4} &= A_4 + nB_4 + C_4 + D_4 + E_4 + F_4 + G_4 + nH_4 + I_4 + J_4, \\ I_{I4} &= nA_4 + B_4 + C_4 + D_4 + E_4 + F_4 + G_4 + H_4 + nI_4 + J_4, \\ I_{J4} &= A_4 + B_4 + C_4 + D_4 + E_4 + F_4 + G_4 + H_4 + I_4 + J_4. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Diese linearen Gleichungssysteme lassen sich jeweils nach den Invarianten auflösen, und man erhält

$$A_2 = \frac{I_{A2} - I_{B2}}{n-1}, \quad B_2 = I_{B2} - A_2, \quad (D.2)$$

$$A_3 = \frac{I_{A3} - I_{D3}}{n-1}, \quad B_3 = \frac{I_{B3} - I_{D3}}{n-1}, \quad C_3 = \frac{I_{C3} - I_{D3}}{n-1},$$

$$D_3 = I_{D3} - A_3 - B_3 - C_3, \quad (D.3)$$

$$I'_{A4} := \frac{I_{A4} - I_{J4}}{n-1}, \quad I'_{B4} := \frac{I_{B4} - I_{J4}}{n-1}, \quad \dots \quad I'_{I4} := \frac{I_{I4} - I_{J4}}{n-1},$$

$$I''_{A4} := I'_{A4} - I'_{D4} - I'_{I4}, \quad I''_{B4} := I'_{B4} - I'_{E4} - I'_{H4}, \quad I''_{C4} := I'_{C4} - I'_{F4} - I'_{G4},$$

$$A_4 = \frac{(n-1)I''_{A4} - I''_{B4} - I''_{C4}}{(n+1)(n-2)}, \quad D_4 = I'_{D4} - A_4, \quad I_4 = I'_{I4} - A_4,$$

$$B_4 = \frac{(n-1)I''_{B4} - I''_{C4} - I''_{A4}}{(n+1)(n-2)}, \quad E_4 = I'_{E4} - B_4, \quad H_4 = I'_{H4} - B_4,$$













$$C_4 = \frac{(n-1)I''_{C4} - I''_{A4} - I''_{B4}}{(n+1)(n-2)}, \quad F_4 = I'_{F4} - C_4, \quad G_4 = I'_{G4} - C_4,$$

$$J_4 = I_{J4} - A_4 - B_4 - C_4 - D_4 - E_4 - F_4 - G_4 - H_4 - I_4. \quad (D.4)$$

Da sich die Kontraktionsintegrale als skalare Integrale berechnen lassen, sind damit die Invarianten bestimmt.

D.1.2 Schematisierung der Kontraktion

Das Vorgehen läßt sich schematisieren, wenn man die Indizes als Punkte auf einem eindimensionalen Gitter ansieht. Die Komponenten $g^{\mu\nu}$ des metrischen Tensors sind dann Paarungen dieser Punkte, die Komponenten v^p des Geschwindigkeitsvektors einzelne Punkte. So kann man jedes Invariante als ein solches Schema darstellen,

A_2  B_2 	A_4  B_4  C_4  D_4  E_4  F_4  G_4  H_4  I_4  J_4 	(D.5)
--	--	-------

Die Kontraktionsintegrale werden nun genauso dargestellt, und die Koeffizienten der Kontraktion können als Verkettung der jeweiligen Paarstrukturen aufgefaßt werden. Die Regel, daß jede geschlossene Schleife dabei einen Faktor n liefert, ergibt das oben dargestellte System. Als Beispiel hier nur der Koeffizient von A_4 in I_{C_4} :

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \otimes \quad \text{---} \quad \text{---} \quad = \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad = \quad n. \quad (\text{D.6})$$

D.2 Konstruktion der Pre-Diracstruktur

Auch für die Konstruktion der Pre-Diracstruktur bewährt sich das Gitterschema. Bezugnehmend auf das Beispiel in Kapitel 11 kann die dort gezeigte Zuordnung der Invarianten dritten in solche vierten Grades ausgedrückt werden durch

$$\begin{array}{llll} A_3 & \text{---} \cdot & \rightarrow & D_4 \text{---} \cdot \cdot \\ B_3 & \text{---} \cdot & \rightarrow & E_4 \text{---} \cdot \\ C_3 & \cdot \text{---} & \rightarrow & G_4 \cdot \text{---} \cdot \\ D_3 & \cdot \cdot & \rightarrow & J_4 \cdot \cdot \cdot \end{array} \quad (\text{D.7})$$

So kann die Situation dritten auf diejenige vierten Grades übertragen werden, die hier als Beispiel behandelt werden soll.

D.2.1 Die Neukombination

In den in Kapitel 11 behandelten Teilgraphen ist der für diesen Teil äußere Impuls mit u bezeichnet. Daß nicht v gewählt wird, soll andeuten, daß über diesem Impuls bei der Berechnung des Gesamtgraphen noch zu integrieren ist. Die nachher zu vollziehende kovariante Entwicklung kann bereits vor der Integration durchgeführt werden, und so ergab sich auch im gewählten Beispiel

$$[\mu, \mu, \psi, \psi]D_4(u) = [\mu, \mu, \rho, \rho]A_2D_4(u) + [\mu, \mu, \psi, \psi]B_2D_4(u). \quad (\text{D.8})$$

Die Operatoren A_2 und B_2 werden als *Kombinatoren* bezeichnet. Ersetzt man auf ähnliche Weise in $Q(u)$ sämtliche Terme, so ergibt sich (im folgenden wird das Argument „ u “ fortgelassen)

$$\begin{aligned} Q &= [\mu, \mu, \rho, \rho]A_0A_4 + [\mu, \nu, \mu, \nu]A_0B_4 + [\mu, \nu, \nu, \mu]A_0C_4 + \\ &+ [\mu, \mu, \rho, \rho]A_2D_4 + [\mu, \mu, \psi, \psi]B_2D_4 + [\mu, \nu, \mu, \nu]A_2E_4 + [\mu, \psi, \mu, \psi]B_2E_4 + \\ &+ [\mu, \nu, \nu, \mu]A_2F_4 + [\mu, \psi, \psi, \mu]B_2F_4 + [\mu, \nu, \nu, \mu]A_2G_4 + [\psi, \nu, \nu, \psi]B_2G_4 + \\ &+ [\mu, \nu, \mu, \nu]A_2H_4 + [\psi, \nu, \psi, \nu]B_2H_4 + [\mu, \mu, \rho, \rho]A_2I_4 + [\psi, \psi, \rho, \rho]B_2I_4 + \\ &+ [\mu, \mu, \rho, \rho]A_4J_4 + [\mu, \nu, \mu, \nu]B_4J_4 + [\mu, \nu, \nu, \mu]C_4J_4 + [\mu, \mu, \psi, \psi]D_4J_4 + \\ &+ [\mu, \psi, \mu, \psi]E_4J_4 + [\mu, \psi, \psi, \mu]F_4J_4 + [\psi, \nu, \nu, \psi]G_4J_4 + [\psi, \nu, \psi, \nu]H_4J_4 + \\ &+ [\psi, \psi, \rho, \rho]I_4J_4 + [\psi, \psi, \psi, \psi]J_4J_4 \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

und nach Zusammenfassen der gleichen Diracstrukturen

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_4 &= A_4 J_4 + A_2 D_4 + A_2 I_4 + A_0 A_4, & \tilde{D}_4 &= D_4 J_4 + B_2 D_4, \\
\tilde{B}_4 &= B_4 J_4 + A_2 E_4 + A_2 H_4 + A_0 B_4, & \tilde{E}_4 &= E_4 J_4 + B_2 E_4, \\
\tilde{C}_4 &= C_4 J_4 + A_2 F_4 + A_2 G_4 + A_0 C_4, & \tilde{F}_4 &= F_4 J_4 + B_2 F_4, \\
& & \tilde{G}_4 &= G_4 J_4 + B_2 G_4, \\
& & \tilde{H}_4 &= H_4 J_4 + B_2 H_4, \\
& & \tilde{I}_4 &= I_4 J_4 + B_2 I_4.
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Auch diese Neukombination folgt einem einfachen Prinzip, welches anhand des Gitterschemas veranschaulicht werden kann. Zur Summe zusammengetragen werden nämlich alle möglichen Kombinationen der noch freien Punkte bestehender Elemente, die auf das neue Element führen. Beispielsweise erhält man die Konstruktion von \tilde{A}_4 aus

$$\begin{array}{ccc}
J_4 & \bullet \bullet \bullet \bullet & + \quad D_4 \quad \text{---} \bullet \bullet \bullet & + \\
& & \downarrow A_4 & \downarrow A_2 \\
\tilde{A}_4 & \text{---} \bullet \quad \text{---} \bullet & & \tilde{A}_4 \quad \text{---} \bullet \quad \text{---} \bullet
\end{array} \tag{D.11}$$

$$\begin{array}{ccc}
+ \quad I_4 & \bullet \bullet \quad \text{---} \bullet & + \quad A_4 \quad \text{---} \bullet \quad \text{---} \bullet \\
& \downarrow A_2 & \downarrow A_0 \\
\tilde{A}_4 & \text{---} \bullet \quad \text{---} \bullet & \tilde{A}_4 \quad \text{---} \bullet \quad \text{---} \bullet
\end{array}$$

und diejenige von \tilde{D}_4 aus

$$\begin{array}{ccc}
J_4 & \bullet \bullet \bullet \bullet & + \quad D_4 \quad \text{---} \bullet \bullet \bullet & . \\
& & \downarrow D_4 & \downarrow B_2 \\
\tilde{D}_4 & \text{---} \bullet \bullet \bullet & & \tilde{D}_4 \quad \text{---} \bullet \bullet \bullet
\end{array} \tag{D.12}$$

Genauso wie in (D.1) erhält man für die neukombinierten Größen ein lineares Gleichungssystem. Da aus den Kontraktionsintegralen des neuen Systems aber am Ende die Invarianten des ursprünglichen Systems bestimmt werden sollen, werden in dieses System nun die Neukombinationen eingesetzt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{A4} &= n^2 \tilde{A}_4 + n \tilde{B}_4 + n \tilde{C}_4 + n \tilde{D}_4 + \tilde{E}_4 + \tilde{F}_4 + \tilde{G}_4 + \tilde{H}_4 + n \tilde{I}_4 + \tilde{J}_4 = \\
&= n^2 A_0 A_4 + n A_0 B_4 + n A_0 C_4 + n(n A_2 + B_2) D_4 + (n A_2 + B_2) E_4 + \\
&\quad + (n A_2 + B_2) F_4 + (n A_2 + B_2) G_4 + (n A_2 + B_2) H_4 + n(n A_2 + B_2) I_4 + \\
&\quad + (n^2 A_4 + n B_4 + n C_4 + n D_4 + E_4 + F_4 + G_4 + H_4 + n I_4 + J_4) J_4 = \\
&= n^2 I_{A0} A_4 + n I_{A0} B_4 + n I_{A0} C_4 + n I_{A2} D_4 + I_{A2} E_4 + I_{A2} F_4 + \\
&\quad + I_{A2} G_4 + I_{A2} H_4 + n I_{A2} I_4 + I_{A4} J_4,
\end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{D_4} &= n\tilde{A}_4 + \tilde{B}_4 + \tilde{C}_4 + n\tilde{D}_4 + \tilde{E}_4 + \tilde{F}_4 + \tilde{G}_4 + \tilde{H}_4 + \tilde{I}_4 + \tilde{J}_4 = \\
&= nA_0A_4 + A_0B_4 + A_0C_4 + n(A_2 + B_2)D_4 + (A_2 + B_2)E_4 + \\
&\quad + (A_2 + B_2)F_4 + (A_2 + B_2)G_4 + (A_2 + B_2)H_4 + (nA_2 + B_2)I_4 + \\
&\quad + (nA_4 + B_4 + C_4 + nD_4 + E_4 + F_4 + G_4 + H_4 + I_4 + J_4)J_4 = \\
&= nI_{A_0}A_4 + I_{A_0}B_4 + I_{A_0}C_4 + nI_{B_2}D_4 + I_{B_2}E_4 + I_{B_2}F_4 + \\
&\quad + I_{B_2}G_4 + I_{B_2}H_4 + I_{A_2}I_4 + I_{D_4}J_4, \tag{D.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{J_4} &= \tilde{A}_4 + \tilde{B}_4 + \tilde{C}_4 + \tilde{D}_4 + \tilde{E}_4 + \tilde{F}_4 + \tilde{G}_4 + \tilde{H}_4 + \tilde{I}_4 + \tilde{J}_4 = \\
&= A_0A_4 + A_0B_4 + A_0C_4 + (A_2 + B_2)D_4 + (A_2 + B_2)E_4 + (A_2 + B_2)F_4 + \\
&\quad + (A_2 + B_2)G_4 + (A_2 + B_2)H_4 + (A_2 + B_2)I_4 + \\
&\quad + (A_4 + B_4 + C_4 + D_4 + E_4 + F_4 + G_4 + H_4 + I_4 + J_4)J_4 = \\
&= nI_{A_0}A_4 + I_{A_0}B_4 + I_{A_0}C_4 + nI_{B_2}D_4 + I_{B_2}E_4 + I_{B_2}F_4 + \\
&\quad + I_{B_2}G_4 + I_{B_2}H_4 + I_{B_2}I_4 + I_{J_4}J_4. \tag{D.15}
\end{aligned}$$

Dabei wurden die *Kontraktoren* I_{A_0} , I_{A_2} , I_{B_2} , I_{A_4} , \dots analog zu den Kontraktionsintegralen eingeführt. Das Schema hilft auch hier, den jeweiligen operatorwertigen Faktor zu finden. Dazu werden die Paarstrukturen zu dem neukombinierten Kontraktionsintegral \tilde{I}_i und dem bisherigen Invarianten A_j wie gewohnt verkettet, was für geschlossene Ketten jeweils einen Faktor n liefert. Anschließend werden die Paare aus A_j wieder herausgestrichen, wobei einmal aufgebaute Verkettungen erhalten bleiben. Dieses sehr kompliziert auszudrückende Schema sei an Beispielen für \tilde{I}_{A_4} und \tilde{I}_{D_4} veranschaulicht:

Schema für \tilde{I}_{A_4} :

$$\begin{aligned}
\text{zu } A_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \otimes \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet = \begin{array}{c} \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \end{array} \begin{array}{c} \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \end{array} \rightarrow n^2 I_{A_0} \tag{D.16} \\
\text{zu } D_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \otimes \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet \quad \bullet = \begin{array}{c} \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \end{array} \bullet\text{---}\bullet \rightarrow n I_{A_2} \quad \bullet\text{---}\bullet \\
\text{zu } H_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \otimes \quad \bullet \quad \bullet\text{---}\bullet = \begin{array}{c} \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \end{array} \rightarrow I_{A_2} \quad \bullet\text{---}\bullet \\
\text{zu } I_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \otimes \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet\text{---}\bullet = \bullet\text{---}\bullet \begin{array}{c} \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \end{array} \rightarrow n I_{A_2} \bullet\text{---}\bullet \\
\text{zu } J_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \otimes \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet = \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet \rightarrow I_{A_4} \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet
\end{aligned}$$

Schema für \tilde{I}_{D_4} :

$$\begin{aligned}
\text{zu } A_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \otimes \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet = \begin{array}{c} \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \end{array} \bullet\text{---}\bullet \rightarrow n I_{A_0} \tag{D.17} \\
\text{zu } D_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \otimes \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet \quad \bullet = \begin{array}{c} \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \end{array} \bullet \quad \bullet \rightarrow n I_{B_2} \quad \bullet \quad \bullet \\
\text{zu } H_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \otimes \quad \bullet \quad \bullet\text{---}\bullet = \begin{array}{c} \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \end{array} \rightarrow I_{B_2} \quad \bullet \quad \bullet \\
\text{zu } I_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \otimes \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet\text{---}\bullet = \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet\text{---}\bullet \rightarrow I_{A_2} \quad \bullet\text{---}\bullet \\
\text{zu } J_4: & \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \otimes \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet = \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet \quad \bullet \rightarrow I_{D_4} \quad \bullet\text{---}\bullet \quad \bullet \quad \bullet
\end{aligned}$$

Anhang E

Beiträge der HQS-Graphen

Die hier dargestellten Koeffizienten der Form $b_{i,j}^{(x)}$ werden in den Kapiteln 9 und 11 benötigt, wobei x dann jeweils für hl , ll , ir , co oder qq steht. i bezeichnet den berechneten Graphen, j nimmt Bezug auf die Grundstrukturen Γ_j aus (8.9) bzw. $\tilde{\Gamma}_j$ aus (11.37). Neben den Farbfaktoren sind die Koeffizienten auch von einem generellen Faktor befreit, welcher im wesentlichen die Kopplung in n Raumzeitdimensionen und die Abhängigkeit von den äußeren Impulsen enthält. Ausgedrückt werden sie durch die Terme

$$E_p = \Gamma(1 - \varepsilon)^p \Gamma(1 + p\varepsilon) \quad \text{und} \quad Q_p = \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)^{p+1} \Gamma(1 + p\varepsilon)}{\Gamma(1 - (p+1)\varepsilon)} \quad (\text{E.1})$$

für $p = 1, 2, \dots$, wobei $\varepsilon = (4 - n)/2$ und $\Gamma(x)$ die Eulersche Gammafunktion ist.

E.1 Koeffizienten für die schwer-leichten Graphen

$$b_0^{(hl)} = \frac{-2aE_1}{n-4} \quad (\text{E.2})$$

$$b_1^{(hl)} = \frac{4E_1^2}{(n-4)^3} - \frac{2(3n^2 - 24n + 44)E_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)} \quad (\text{E.3})$$

$$b_2^{(hl)} = \frac{4E_1^2}{(n-4)^3(n-3)} - \frac{4(n-5)(n-2)E_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)} \quad (\text{E.4})$$

$$b_3^{(hl)} = \frac{4E_2}{(n-4)^2(n-3)} \quad (\text{E.5})$$

$$b_4^{(hl)} = \frac{2(n-2)E_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)} \quad (\text{E.6})$$

$$b_5^{(hl)} = \frac{8E_1^2}{(n-4)^2(n-3)} + \frac{4E_2}{(n-4)^2(n-3)} \quad (\text{E.7})$$

$$b_6^{(hl)} = \frac{-2(n-2)E_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)} \quad (\text{E.8})$$

$$b_7^{(hl)} = 0 \quad (\text{E.9})$$

$$b_8^{(hl)} = \frac{E_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)} \quad (\text{E.10})$$

$$b_9^{(hl)} = \frac{-E_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)} \quad (\text{E.11})$$

$$b_{10}^{(hl)} = \frac{-4E_1^2}{(n-4)^2(n-3)} - \frac{2nE_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)} \quad (\text{E.12})$$

$$b_{11}^{(hl)} = \frac{-4(n-1)E_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)} \quad (\text{E.13})$$

E.2 Koeffizienten für die doppellichten Graphen

$$b_{0,0}^{(ll)} = (1-a) \frac{(n-2)Q_1}{(n-4)(n-3)}$$

$$b_{0,1}^{(ll)} = \frac{-Q_1}{2(n-3)} \quad (\text{E.14})$$

$$b_{0,2}^{(ll)} = \frac{-Q_1}{2(n-4)(n-3)}$$

$$b_{1,1}^{(ll)} = \frac{4(n-2)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)(n-1)} - \frac{4(n-2)(n^3-9n^2+20n-4)Q_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)}$$

$$b_{1,2}^{(ll)} = \frac{(n^3-12n^2+52n-72)Q_1^2}{2(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} - \frac{(n^4-13n^3+66n^2-168n+176)Q_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)}$$

$$b_{1,3}^{(ll)} = \frac{Q_1^2}{(n-4)(n-3)^2(n-1)} - \frac{2Q_2}{(n-4)(n-1)(3n-10)(3n-8)} \quad (\text{E.15})$$

$$b_{1,4}^{(ll)} = \frac{Q_1^2}{2(n-4)^2(n-3)^2(n-1)} - \frac{Q_2}{(n-4)^2(n-1)(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{2,0}^{(ll)} = -\frac{2(n-2)(n^2-12n+24)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} - \frac{8(n-2)(n^3-8n^2+12n+8)Q_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)}$$

$$b_{2,1}^{(ll)} = -\frac{4(3n^2-18n+26)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} + \frac{4(5n^5-71n^4+350n^3-680n^2+296n+320)Q_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{2,2}^{(ll)} = \frac{(n^2-18n+40)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} + \frac{4(4n^4-43n^3+124n^2-40n-160)Q_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{2,3}^{(II)} = \frac{2Q_1^2}{(n-4)^2(n-3)^2(n-1)} - \frac{4nQ_2}{(n-4)^2(n-1)(3n-10)(3n-8)} \quad (\text{E.16})$$

$$b_{2,4}^{(II)} = \frac{Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} - \frac{2nQ_2}{(n-4)^3(n-1)(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{3,1}^{(II)} = \frac{-4(n-2)Q_2}{(n-4)(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{3,2}^{(II)} = \frac{-2(n-2)Q_2}{(n-4)^2(3n-10)(3n-8)} \quad (\text{E.17})$$

$$b_{4,1}^{(II)} = \frac{4(n-2)^2Q_2}{(n-6)(n-4)(n-3)(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{4,2}^{(II)} = \frac{2(n-2)^2Q_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)(3n-10)(3n-8)} \quad (\text{E.18})$$

$$b_{5,0}^{(II)} = -\frac{(n-2)(n^3-16n^2+68n-88)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} - \frac{2(n-2)(n^2-8)Q_2}{(n-4)^3(n-1)(3n-10)}$$

$$b_{5,1}^{(II)} = \frac{(n-6)(n-2)Q_1^2}{(n-4)(n-3)^2(n-1)} + \frac{2(n^2+6n-12)Q_2}{(n-4)(n-1)(3n-10)(3n-8)} \quad (\text{E.19})$$

$$b_{5,2}^{(II)} = \frac{(n-6)(n-2)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)(n-1)} - \frac{2(n^3-17n^2+62n-56)Q_2}{(n-4)^3(n-1)(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{6,0}^{(II)} = \frac{2(n-2)^2Q_2}{(n-6)(n-4)(n-3)(3n-10)}$$

$$b_{6,1}^{(II)} = \frac{-4(n-2)^2Q_2}{(n-6)(n-4)(3n-10)(3n-8)} \quad (\text{E.20})$$

$$b_{6,2}^{(II)} = \frac{-2(n-2)^2Q_2}{(n-6)(n-4)^2(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{7,0}^{(II)} = \frac{-8(n-2)^2Q_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)(n-1)(3n-10)}$$

$$b_{7,1}^{(II)} = \frac{16(n-2)^2Q_2}{(n-6)(n-4)(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)} \quad (\text{E.21})$$

$$b_{7,2}^{(II)} = \frac{8(n-2)^2Q_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{8,0}^{(II)} = \frac{(n-2)(7n-6)Q_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)(n-1)(3n-10)}$$

$$b_{8,1}^{(II)} = \frac{-2(n-2)(6n-5)Q_2}{(n-6)(n-4)(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)} \quad (\text{E.22})$$

$$b_{8,2}^{(II)} = \frac{-(n-2)(6n-5)Q_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)}$$

$$b_{9,0}^{(II)} = \frac{-(n-2)^2Q_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)(n-1)(3n-10)}$$

$$b_{9,1}^{(II)} = \frac{-2(n-2)Q_2}{(n-6)(n-4)(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)} \quad (\text{E.23})$$

$$\begin{aligned}
b_{9,2}^{(II)} &= \frac{-(n-2)Q_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)} \\
b_{10,0}^{(II)} &= \frac{(n-2)^2(n^2-12n+30)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} \\
&\quad - \frac{2(n-2)(n^4-17n^3+106n^2-268n+216)Q_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)} \\
b_{10,1}^{(II)} &= \frac{(5n^3-48n^2+138n-116)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} \\
&\quad - \frac{2(11n^5-195n^4+1314n^3-4148n^2+6072n-3264)Q_2}{(n-6)(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)} \\
b_{10,2}^{(II)} &= \frac{2(2n^2-9n+8)Q_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2(n-1)} - \frac{4(5n^3-34n^2+71n-44)Q_2}{(n-4)^3(n-3)(n-1)(3n-10)(3n-8)} \\
b_{11,1}^{(II)} &= \frac{-8(n-2)(n-1)Q_2}{(n-6)(n-4)(n-3)(3n-10)(3n-8)} \\
b_{11,2}^{(II)} &= \frac{-4(n-2)(n-1)Q_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)(3n-10)(3n-8)}
\end{aligned} \tag{E.24}$$

E.3 Koeffizienten für die irreduziblen Graphen

$$b_{1,0}^{(ir)} = b_{5,0}^{(ir)} = \frac{2E_2}{(n-4)^2} \quad b_{2,1}^{(ir)} = b_{6,1}^{(ir)} = \frac{-E_2}{(n-6)(n-4)(n-3)} \tag{E.26}$$

$$b_{2,2}^{(ir)} = b_{6,2}^{(ir)} = \frac{-E_2}{(n-6)(n-4)^2(n-3)} \quad b_{4,j}^{(ir)} = 0 \tag{E.27}$$

$$b_{3,1}^{(ir)} = b_{7,1}^{(ir)} = \frac{-(n-4)E_2}{2(n-8)(n-6)(n-3)} + \frac{E_1Q_1}{(n-4)(n-3)} \tag{E.28}$$

$$b_{3,2}^{(ir)} = b_{7,2}^{(ir)} = \frac{(n^2-8n+8)E_2}{2(n-8)(n-6)(n-4)^2(n-3)} + \frac{E_1Q_1}{(n-4)^2(n-3)} \tag{E.29}$$

E.4 Koeffizienten für die Korrelatorkorrekturen

$$b_{0,0}^{(co)} = \frac{-(n-2)E_2}{4(n-4)(n-3)(2n-7)(2n-5)(2n-3)} \quad (\text{E.30})$$

$$b_{1,0}^{(co)} = \frac{16(n-2)^2((3n-10)E_2 - 2(2n-7)E_1^2)E_3}{9(n-4)^3(n-3)^2(3n-11)(3n-10)(3n-8)(3n-7)E_2}, \quad (\text{E.31})$$

$$b_{2,0}^{(co)} = \frac{4(n-2)^2(2n(n-3)^2Q_2 - (3n-10)(3n-8)Q_1^2)E_3}{3(n-4)^3(n-3)^3(n-1)(3n-11)(3n-10)(3n-8)(3n-7)Q_2},$$

$$b_{2,1}^{(co)} = \frac{(4(n^2 - 4n + 8)(n-3)^2Q_2 - (n^2 - 7n + 16)(3n-10)(3n-8)Q_1^2)E_3}{9(n-4)^2(n-3)^3(n-1)(3n-11)(3n-10)(3n-8)(3n-7)Q_2}, \quad (\text{E.32})$$

$$b_{2,2}^{(co)} = \frac{(4(n-4)(n-3)Q_2 - 3(3n-10)(3n-8)Q_1^2)E_3}{9(n-4)^2(n-3)^2(n-1)(3n-11)(3n-10)(3n-8)(3n-7)Q_2},$$

$$b_{3,0}^{(co)} = \frac{-8(n-2)^2E_3}{9(n-4)^2(n-3)(3n-11)(3n-10)(3n-8)(3n-7)}, \quad (\text{E.33})$$

$$b_{4,0}^{(co)} = \frac{8(n-2)^2E_3}{9(n-4)^2(n-3)^2(3n-11)(3n-10)(3n-8)(3n-7)}. \quad (\text{E.34})$$

E.5 Koeffizienten für Korrekturen zum Quarkkondensatbeitrag

Mit der Kurzschreibweise

$$b_i^{(qq)} := \sum_{j=0}^2 b_{i,j}^{(qq)} \tilde{\Gamma}_j \quad (\text{E.35})$$

ergibt sich hier

$$b_0^{(qq)} = \frac{4\tilde{\Gamma}_0 E_1}{(n-4)(n-3)}, \quad b_1^{(qq)} = b_2^{(qq)} = \frac{2(n-2)\tilde{\Gamma}_0 E_2}{(n-4)^2(n-3)(2n-7)}, \quad (\text{E.36})$$

$$b_3^{(qq)} = \frac{8(n-2)\tilde{\Gamma}_0 E_1^2}{(n-4)^3(n-3)^2} - \frac{4(n-2)(3n-10)\tilde{\Gamma}_0 E_2}{(n-4)^3(n-3)^2(2n-7)}, \quad (\text{E.37})$$

$$b_4^{(qq)} = \frac{(n-4)\tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2}{(n-4)^2(n-3)(2n-7)} E_2, \quad b_5^{(qq)} = \frac{2(n-2)\tilde{\Gamma}_0 - n\tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2}{(n-4)^2(n-3)(2n-7)} E_2, \quad (\text{E.38})$$

$$b_6^{(qq)} = \frac{2n(n-2)\tilde{\Gamma}_0 E_2}{(n-4)^2(n-3)(2n-7)}, \quad b_7^{(qq)} = \frac{2(n-2)\tilde{\Gamma}_0 E_2}{(n-4)^2(n-3)(2n-7)}, \quad (\text{E.39})$$

$$b_8^{(qq)} = \frac{-4(n-2)\tilde{\Gamma}_0 E_2}{(n-4)^2(n-3)^2(2n-7)}. \quad (\text{E.40})$$

Literaturverzeichnis

- [1] J. Kühn, A. Reiter und P. Zerwas, Nucl. Phys. **B272** (1986) 560
- [2] A.F. Falk und M.E. Peskin, Phys. Rev. **D49** (1994) 3320
- [3] F.E. Close, J.G. Körner, R.J.N. Phillips und D.J. Summers, J. Phys. **G18** (1992) 1716
- [4] J.G. Körner und M. Krämer, Phys. Lett. **275 B** (1992) 495; Z. Phys. **C55** (1992) 659
- [5] S. Groote, J.G. Körner und M.M. Tung, Z. Phys. **C70** (1996) 281
- [6] S. Groote und J.G. Körner, Z. Phys. **C72** (1996) 255
- [7] S. Groote, J.G. Körner und M.M. Tung, “Polar angle dependence of the longitudinal polarization of quarks produced in e^+e^- -annihilation”, Mainz preprint MZ-TH/95-19, hep-ph/9601313, zur Veröffentlichung in Z. Phys. C vorgesehen
- [8] S. Groote, J.G. Körner und O.I. Yakovlev, Phys. Rev. **D54** (1996) 3447
- [9] S. Groote, J.G. Körner und O.I. Yakovlev, “QCD sum rules for heavy baryons at next-to-leading order in α_s ”, Mainz preprint MZ-TH/96-21, hep-ph/960469, zur Veröffentlichung in Phys. Rev. D freigegeben
- [10] J.D. Bjørken, S.D. Drell, „*Relativistische Quantenmechanik*“ Bibliographisches Institut, Hochschultaschenbücher **98**
- [11] J. Jerzak, E. Laermann und P.M. Zerwas, Phys. Rev. **D25** (1982) 1218; Erratum: **D36** (1987) 310(E)
- [12] J.B. Stav und H.A. Olsen, Z. Phys. **C57** (1993) 519; J.B. Stav und H.A. Olsen, Phys. Rev. **D52** (1995) 1359; J.B. Stav und H.A. Olsen, Phys. Rev. **D54** (1996) 817
- [13] A.B. Arbuzov, D.Y. Bardin und A. Leike, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992) 2029; Erratum: **A9** (1994) 1515
- [14] J.G. Körner und D.H. Schiller, preprint DESY-81-043 (1981)
- [15] A. Hsieh und E. Yehudai, “HIP: symbolic high-energy physics calculations”, Comput. Phys. **6** (1992) 253

- [16] S. Wolfram, „Mathematica: Ein System für Mathematik auf dem Computer“, Addison-Wesley Publishing Company, 2. Aufl., Bonn 1992
- [17] G. 't Hooft und M. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972)189;
C.G. Bollini und J.J. Giambiagi, Phys. Lett. **40 B** (1972) 566;
G.M. Cicutta und E. Montaldi, Nuovo Cimento Lett. **4** (1972) 329;
J.F. Ashmore, Nuovo Cimento Lett. **4** (1972) 289
- [18] W.A. Bardeen, A.J. Buras, D.W. Duke und T. Muta, Phys. Rev. **D18** (1978) 3998
- [19] L. Lewis, “Polylogarithms and associated functions”, North Holland, New York 1981
- [20] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650
- [21] T.D. Lee und M. Nauenberg, Phys. Rev. **133** (1964) 1549
- [22] J.G. Körner, A. Pilaftsis und M.M. Tung, Z. Phys. **C63** (1994) 575
- [23] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch, 20. Aufl., Thun und Frankfurt am Main 1983
- [24] B. Falk und L.M. Sehgal, Phys. Lett. **325 B** (1994) 509
- [25] M. Gell-Mann und F.E. Low, Phys. Rev. **95** (1954) 1300
- [26] C. Callan, Phys. Rev. **D2** (1970) 1541;
K. Symanzik, Commun. Math. Phys. **18** (1970) 227
- [27] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B61** (1973) 455;
S. Weinberg, Phys. Rev. **D8** (1973) 3497
- [28] S. Narison, “Techniques of dimensional regularization and the two-point functions of QCD and QED”, Phys. Rep. **84** (1982) 263
- [29] J. Gasser und H. Leutwyler, “Quark masses”, Phys. Rep. **87** (1982) 77
- [30] J.G. Körner, G. Schuler, G. Kramer und B. Lampe, Z. Phys. **C32** (1986) 181;
J.G. Körner, D. Kreimer und K. Schilcher, Z. Phys. **C54** (1992) 503
- [31] P. Breitenlohner und D. Maison, Commun. Math. Phys. **52** (1977) 11, 39, 55
- [32] A. Barroso et al., Phys. Lett. **261 B** (1991) 123
- [33] D. Kreimer, Phys. Lett. **237 B** (1990) 59
- [34] T. Muta, “Foundations of quantum chromodynamics”, Singapore, World Scientific Lect. Notes in Phys. **5**
- [35] M.M. Tung, Phys. Rev. **D52** (1995) 1353
- [36] A.V. Smilga, Comm. Nucl. Part. Phys. **20** (1991) 69
- [37] Z. Was, Acta Phys. Pol. **B18** (1987) 1099

- [38] siehe z.B. M.B. Wise in “Proceeding of the 6th Lake Louise Winter Institute”, Lake Louise (1991), herausgegeben von B.A. Campbell, A.N. Kitching und F.G. Khanna (World Scientific, Singapur, 1991) S. 222
- [39] S. Balk, J.G. Körner und D. Pirjol, Nucl. Phys. **B428** (1994) 449;
S. Balk, A. Ilakovac, J.G. Körner und D. Pirjol, “Two different formulations of the heavy quark effective theory”, in Proc. Int. Conf. “Hadron Structure ’93”, Banska Stiavnica, Slovakia (1993), Slowakische Akademie der Wissenschaften, Bratislawa (1993) 17 und in Proc. “XXVII Int. Symp. Ahrenshoop”, DESY 94-053 (1994) 315
- [40] M. Neubert, “Heavy quark symmetry”, Phys. Rep. **245** (1994) 259
- [41] B. Grinstein, Nucl. Phys. **B339** (1990) 253
- [42] C. Itzykson und J.B. Zuber, “Quantum field theory”, McGraw-Hill, 1980
- [43] E.V. Shuryak, Nucl. Phys. **B198** (1982) 83
- [44] G. Passarino und M. Veltman, Nucl. Phys. **B160** (1979) 151
- [45] D.J. Broadhurst und A.G. Grozin, Phys. Lett. **267 B** (1991) 105
- [46] E.C.G. Stueckelberg und A. Peterman, Helv. Phys. Acta **26** (1953) 499
- [47] P. Pascual und R. Tarrach, “Renormalization for the practitioner”, Lecture Notes in Physics **194** (Springer, Berlin, 1984)
- [48] D.R. Jones, Nucl. Phys. **B75** (1974) 531
- [49] E.S. Egorian und O.V. Tarasov, Theor. Math. Phys. **41** (1979) 26
- [50] V. Gimenez, Nucl. Phys. **B375** (1992) 582
- [51] X. Ji und M.J. Musolf, Phys. Lett. **257 B** (1991) 409
- [52] T.L. Trueman, Phys. Lett. **88 B** (1979) 331;
S.A. Larin, Phys. Lett. **303 B** (1993) 113
- [53] K. Wilson, Phys. Rev. **179** (1969) 1499
- [54] A.G. Grozin und O.I. Yakovlev, Phys. Lett. **285 B** (1992) 254
- [55] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein und V.I. Zakharov, Fortschr. Phys. **32** (1984) 585;
A.G. Grozin, Novosibirsk preprint INP/92-11
- [56] S.V. Mikhailov und A.V. Radyushkin, Sov. J. Nucl. Phys. **49** (1989) 494
- [57] M.A. Shifman, A.I. Vainstein und V.I. Zakharov, Nucl. Phys. **B147** (1979) 385; **B147** (1979) 488
- [58] M.A. Shifman, “Vacuum structure and QCD sum rules”, North-Holland, Amsterdam, 1992

- [59] N.N. Bogoljubov, B.V. Medvedev und M.K. Polivanov, Fortschr. Phys. **6** (1958) 169
- [60] B.Y. Block und V.L. Eletsy, Z. Phys. **C30** (1986) 151; **C30** (1986) 229
- [61] E. Bagan, M. Chabab, H.G. Dosch und S. Narison, Phys. Lett. **278 B** (1992) 367; **287 B** (1992) 176
- [62] E. Bagan, M. Chabab, H.G. Dosch und S. Narison, Phys. Lett. **301 B** (1993) 243
- [63] Y.B. Dai, C.S. Huang, C. Liu und C.D. Lü, Phys. Lett. **371 B** (1996) 99
- [64] E. Bagan, P. Ball, V. Braun und H.G. Dosch, Phys. Lett. **278 B** (1992) 457
- [65] M. Neubert, Phys. Rev. **D45** (1992) 2451
- [66] M. Abramowitz und I.A. Stegun, "Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs and mathematical tables", Dover publ., New York, 1972
- [67] Particle Data Group, Phys. Rev. **D54** (1996) PART I
- [68] K. Schilcher, M.D. Tran und N.F. Nasrallah, Nucl. Phys. **B181** (1981) 91
- [69] T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren und S.A. Larin, "The four-loop β -function in Quantum Chromodynamics", Preprint no. UM-TH-97-01 und NIKHEF-97-001, hep-ph/9701390

Anhang F

Ströme schwerer Baryonen

Es ist unmöglich, innerhalb einer Frist von zwanzig bis dreißig Minuten, die meinem Vortrag gesetzt sind, den ganzen Umfang meiner Dissertation auch nur in Ansätzen darzustellen. Daher habe ich mich entschlossen, nur einen Teilaspekt herauszugreifen, Ihnen diesen aber möglichst verständlich darzustellen. Es handelt sich um die Berechnung von Strahlungskorrekturen zu Strömen schwerer Baryonen, ihre Renormierung und Verwendung in Zweipunktkorrelatoren und QCD-Summenregeln. Doch bevor ich in Einzelheiten einsteige, möchte ich zunächst auf die zugrundeliegende effektive Theorie eingehen.

Inhaltsverzeichnis

F.1	Die HQET, eine effektive Theorie schwerer Quarks	210
F.1.1	Konstruktion der effektiven Theorie	210
F.1.2	Wie sehen baryonische Ströme aus?	211
F.2	Renormierung der Ströme	212
F.2.1	Wie wird die anomale Dimension bestimmt?	213
F.2.2	Berechnung der anomalen Dimension	214
F.3	Strahlungskorrekturen zu QCD-Summenregeln	215
F.3.1	Konstruktion der diagonalen QCD-Summenregel	215
F.3.2	Analyse der diagonalen QCD-Summenregel	216
F.4	Zusammenfassung und Ausblick	217

F.1 Die HQET, eine effektive Theorie schwerer Quarks

Systeme wie die schweren Baryonen Λ_c , Λ_b , Σ_c und Σ_b , die ein schweres Quark enthalten, sind im gewissen Sinne mit einem Atom zu vergleichen (siehe Abbildung F.1). Das schwere Quark tritt dabei an die Stelle des Atomkerns, die leichten oder Beobachterquarks spielen die Rolle der Bindungselektronen. Und genauso, wie es bei den Atomen die Eigenschaft gibt, daß Isotope, also solche mit gleicher Kernladungszahl aber verschiedener Kernmassenzahl gleiche chemische Eigenschaften besitzen, so auch hier: Die Eigenschaften der starken Wechselwirkung, welche die Quarks zu Baryonen verbindet, ist unabhängig davon, welche Masse das schwere Quark besitzt. Man hat inzwischen sechs verschiedene Quarks (indirekt) beobachtet, und viele Indizien sprechen dafür, daß keine weiteren mehr zu finden sein werden. Die verschiedenen Quarks werden durch ihre *Flavour* beschrieben.

Ebenfalls entkoppelt sind die Spins von schwerem und leichtem Anteil des Baryons. Insgesamt spricht man von der *Spin-Flavour-Symmetrie*, alles gültig natürlich nur unter der Annahme, daß das schwere Quark sehr viel schwerer als der Rest des Baryons ist. Doch wann gilt diese Annahme? Die Quantenchromodynamik, welche die Wechselwirkung der Quarks im Rahmen der Störungstheorie gut beschreibt, kennt eine Skala, die etwa bei 300 MeV liegt. Alle Quarks, deren Masse darunter liegt, also etwa diejenigen mit den Flavours up ($2 - 8 \text{ MeV}$), down ($5 - 15 \text{ MeV}$) und strange ($100 - 300 \text{ MeV}$) können als leichte, die Quarks mit den Flavours charm ($1.0 - 1.6 \text{ GeV}$), bottom ($4.1 - 4.5 \text{ GeV}$) und top ($\approx 175 \text{ GeV}$) als schwere Quarks betrachtet werden (das top-Quark allerdings zerfällt, bevor es sich in einem Baryon einschließen läßt). Die Energielücke zwischen strange- und charm-Quark ermöglicht die Konstruktion einer effektiven Theorie, der HQET.

Und noch ein Vergleich läßt sich ziehen, nämlich derjenige mit dem Bloch-Nordsieck-Modell weicher Photonabstrahlung durch Elektron, Myon und Tau. Für weiche Photonen, also solche geringer Energie, spielt die Masse wie der Spin des Leptons keine Rolle, vorausgesetzt, man betrachtet das ganze in einem Energiebereich, in dem die Elektronenmasse groß ist. Björken hat diese Situation, die auch als Eikonalnäherung bezeichnet wird, anschaulich mit der einer Kanonenkugel beschrieben, die durch dünne Luft fliegt.

F.1.1 Konstruktion der effektiven Theorie

Wie kann nun eine solche effektive Theorie konstruiert werden? Ausgangspunkt ist der Quark-kinetische Anteil

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \bar{q}_h(i\not{D})q_h + \bar{q}(i\not{D})q \quad (\text{F.1})$$

der Lagrangedichte. Die Konstruktion vollzieht sich nun in drei Schritten. Im ersten wird der durch die große Masse hervorgerufene schnell oszillierende Anteil der Wellenfunktion der schweren Quarks abgespalten, $q_h = e^{-im_Q v \cdot x} Q_v$, im zweiten wird diese neue Wellenfunktion in eine große und eine kleine Komponente aufgeteilt,

$$Q_v = Q_v^+ + Q_v^-, \quad Q_v^\pm = \frac{1 \pm \not{v}}{2} Q_v. \quad (\text{F.2})$$

Schließlich kann die kleine Komponente Q_v^- durch die große Komponente ausgedrückt und dies in eine Reihe in $1/m_Q$ entwickelt werden. Die in Mainz dazu verwendete Foldy-Wouthuysen-Transformation ermöglicht gegenüber dem sonst üblichen Verfahren die massenunabhängige Normierung der Quarkfelder [39]. Dieser Effekt tritt allerdings erst in der

Ordnung $O(1/m_Q^2)$ auf. In dem Vortrag wie in der Arbeit beschränke ich mich dagegen auf die führende Ordnung, und die Lagrangedichte zu dieser Ordnung besitzt die Gestalt ($Q := Q_v^+$)

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = Q^\dagger (i v \cdot D) Q + \bar{q} (i \not{D}) q. \quad (\text{F.3})$$

Was ist zu erkennen? Aus dem ersten Term, dem kinetischen Anteil des schweren Quarks, ist die Diracstruktur verschwunden. Spaltet man die Diracsche Matrix γ_μ auf in eine Komponente senkrecht und eine parallel zur Geschwindigkeit v des Baryons,

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu - \psi v_\mu + \psi v_\mu = \gamma_\mu^\perp + \gamma_\mu^\parallel, \quad (\text{F.4})$$

so fällt erstere weg. Dies kann auch verstanden werden, wenn man sich vorstellt, daß eine solche Matrix stets zwischen zwei Projektoren $(1 + \psi)/2$ zu stehen kommt, womit sich

$$\frac{1 + \psi}{2} \gamma_\mu \frac{1 + \psi}{2} = \frac{1 + \psi}{2} v_\mu \frac{1 + \psi}{2} \quad (\text{F.5})$$

ergibt.

F.1.2 Wie sehen baryonische Ströme aus?

Im Rahmen dieser Theorie sollen baryonische Ströme betrachtet werden. Diese besitzen die allgemeine Struktur

$$J_B = [(q_1)^{iT} C \Gamma \tau (q_2)^j] \Gamma' Q^k \varepsilon_{ijk}, \quad (\text{F.6})$$

wobei i, j und k Farbindizes sind, τ die Flavourstruktur des leichten Systems beschreibt und Γ und Γ' für Diracstrukturen stehen. Für die Baryonen Λ_Q beispielsweise ist $\Gamma' = 1$ und $\Gamma = \gamma_5$ oder $\Gamma = \gamma_5 \gamma_0$. Beide Werte für Γ liefern dieselben Quantenzahlen für die Ströme wie die Teilchen. Ich habe in meiner Arbeit zeigen können, daß der unphysikalische Effekt, der durch diese Beliebigkeit hervorgerufen wird, unter die Fehlerschwelle der Summenregelabschätzungen fällt, bei denen er eine Rolle spielen würde. Der Ausdruck in eckigen Klammern ist das Diquarksystem, das dem mesonischen Strom

$$J_M = (\bar{q}_1) i \Gamma (q_2)^i \quad (\text{F.7})$$

ähnelt. Betrachtet man nicht die Farbstruktur, so geht es tatsächlich aus diesem hervor, wenn der Antiquarkspinor \bar{q}_1 durch einen transponierten und ladungskonjugierten Quarkspinor $(q_1)^T C$ ersetzt wird. Es ergeben sich damit auch dieselben Feynman-Regeln. Allerdings ist die Farbstruktur des Baryons komplizierter als die des Mesons. Durch die Ersetzung $C_B \rightarrow C_F$ der Farbformfaktoren können die mesonischen Ergebnisse aus denjenigen des baryonischen Diquarksystems abgeleitet werden, umgekehrt ist ein solcher Schritt jedoch nicht möglich. Damit sind die Rechnungen, die ich in meiner Arbeit vorgestellt habe, eine Erweiterung der Rechnungen für den mesonischen Fall, welche diese beinhaltet.

F.2 Renormierung der Ströme

Die Berechnung von Strahlungskorrekturen zum baryonischen Strom führen zu Divergenzen im infraroten und ultravioletten Bereich. Diese lassen sich im Rahmen eines Renormierungsverfahrens in die Parameter der Theorie absorbieren, indem deren zunächst unphysikalischen Werte auf die physikalisch gemessenen Werte re-normiert werden. Die Renormierung besteht aus zwei voneinander zu unterscheidenden Schritten,

- der Regularisierung und
- der Subtraktion der Divergenzen.

Als Regularisierung wird die dimensionale Regularisierung verwendet, welche die Divergenzen dadurch in den Griff zu bekommen sucht, indem sie die Dimension der betrachteten Raumzeit von 4 auf $4 - 2\varepsilon$ Dimensionen verändert. Der berechnete Strom ist dann nicht nur eine Entwicklung in die Kopplungskonstante α_s , sondern auch in Potenzen von $1/\varepsilon$,

$$J^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^m \frac{1}{\varepsilon^k} J_m^k. \quad (\text{F.8})$$

Dies ist eine nackte, also noch nicht renormierte Größe. Sie wird „bekleidet“ mit einem Renormierungsfaktor Z_J , und dieser Vorgang bewirkt eine Subtraktion der Pole. Denn wird dieser Renormierungsfaktor ebenfalls durch eine Doppelsumme

$$Z_J = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^m \frac{1}{\varepsilon^k} Z_m^k \quad (\text{F.9})$$

dargestellt, so liefert die Forderung, daß $J = Z_J^{-1} J^0$ keine Divergenzen mehr enthalten soll, durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten des Renormierungsfaktors. Das hier vorgestellte minimale Subtraktionsverfahren (MS) kann modifiziert werden ($\overline{\text{MS}}$), indem $1/\varepsilon_{\text{MS}}$ durch

$$\frac{1}{\varepsilon_{\text{MS}}} - \gamma_E + \ln(4\pi) =: \frac{1}{\varepsilon_{\overline{\text{MS}}}} \quad (\text{F.10})$$

ersetzt wird. Die Regularisierung führt aus Dimensionsgründen als Faktor zu den verschiedenen Koeffizienten J_m^k einen Subtraktionsparameter μ von der Dimension einer Masse ein. Dieser ändert sich mit der Wahl des Schemas, es ist $\mu_{\overline{\text{MS}}}^2 = \mu_{\text{MS}}^2 e^{\gamma_E} / 4\pi$. Da die Gleichungen, die sich aus dem Koeffizientenvergleich ergeben, homogen in den Koeffizienten des nackten Stroms sind, kann die Abhängigkeit von μ vollständig in den Renormierungsparameter absorbiert werden, und aus der nunmehr erreichten Unabhängigkeit des nackten Stroms von diesem Parameter ergibt sich eine Differentialgleichung, die die Abhängigkeit des renormierten Stroms von μ beschreibt, die *Renormierungsgruppengleichung*:

$$0 = \frac{dJ^0}{d\mu} = Z_J \frac{dJ^0}{d\mu} + \frac{dZ_J}{d\mu} J \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mu \frac{d}{d\mu} + \gamma_J \right) J(\mu) = 0. \quad (\text{F.11})$$

Die Konstante

$$\gamma_J = \frac{\mu}{Z_J} \frac{dZ_J}{d\mu} = \frac{d(\ln Z_J)}{d(\ln \mu)} \quad (\text{F.12})$$

wird als *anomale Dimension* bezeichnet. In der Annahme, daß die Abhängigkeit des Stromes vom Parameter μ unter anderem in der Kopplungskonstanten α_s liegt, wird die Renormierung auf einen der Parameter der Theorie übertragen. Für die Kopplungskonstante ergibt sich dann die autonome Differentialgleichung

$$\mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = \alpha_s \beta(\alpha_s), \quad (\text{F.13})$$

für die Renormierungsgruppengleichung selbst

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \alpha_s \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + \gamma_J\right) J(\mu) = 0. \quad (\text{F.14})$$

Zu erklären ist an dieser Stelle, was mit dem Namen „Renormierungsgruppe“ gemeint ist. Diese Lie-Gruppe beschreibt den Zusammenhang zwischen verschiedenen Wahlen für die Parameter der Theorie in einer unendlichen Reihe, so beispielsweise für die Kopplungskonstante

$$\alpha'_s = c_1 \alpha_s + c_2 \alpha_s^2 + c_3 \alpha_s^3 + \dots \quad (\text{F.15})$$

Die autonome Differentialgleichung (F.13) ist invariant unter der einparametrischen Untergruppe, die durch $\alpha'_s(\mu) = \alpha_s(e^c \mu)$ gegeben ist. Damit ist sie auch invariant gegenüber der Wahl des Subtraktionsschemas, denn beim Übergang vom minimalen zum modifizierten minimalen Schema ist $c = \gamma_E - \ln(4\pi)$ zu wählen.

F.2.1 Wie wird die anomale Dimension bestimmt?

Die *Beta-Funktion* $\beta(\alpha_s)$

$$\beta(\alpha_s) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^m \beta_m \quad (\text{F.16})$$

ist im $\overline{\text{MS}}$ -Schema inzwischen bis zur vierten Schleifenordnung bekannt [69]. Die anomale Dimension γ_J leitet sich aus ihrer Definitionsgleichung (F.12) mit der Forderung ab, daß auch diese in eine Reihe

$$\gamma_J = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^m \gamma_m \quad (\text{F.17})$$

ohne Divergenzen entwickelt werden kann. Diese Ableitung geschieht erneut durch Koeffizientenvergleich mit dem Renormierungsfaktor Z_J . Doch was nützt einem die Kenntnis der anomalen Dimension zu dieser Ordnung? Um diese Frage zu klären, bleibe ich noch einen Moment bei der Renormierungsgruppengleichung. Der renormierte Strom hängt vom Parameter μ ab. Damit ist an jedem Renormierungspunkt ein anderer Wert für den Strom gegeben. Es ist jedoch möglich, einen gegenüber der Renormierungsgruppe invarianten Strom zu konstruieren, indem man einen *Wilson-Koeffizienten* $C(\alpha_s(\mu))$ einführt und die Unabhängigkeit des Produktes $J_{\text{inv}} := C(\alpha_s(\mu))J(\mu)$ von μ verlangt. Dann ergibt sich

$$0 \stackrel{!}{=} \mu \frac{dJ_{\text{inv}}}{d\mu} \Rightarrow \left(\alpha_s \beta(\alpha_s) \frac{d}{d\alpha_s} - \gamma_J\right) C(\alpha_s) = 0. \quad (\text{F.18})$$

Diese Differentialgleichung wird formal durch

$$C(\alpha_s) = \exp\left(\int_{\alpha_s^0}^{\alpha_s} \frac{\gamma_J(\alpha) d\alpha}{\alpha \beta(\alpha)}\right) = \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_s^0}\right)^{\gamma_1/\beta_1} \left(1 + \frac{\gamma_1}{\beta_1} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \frac{\alpha_s - \alpha_s^0}{4\pi} + O(\alpha_s^2)\right). \quad (\text{F.19})$$

gelöst (die Wahl von α_s^0 bestimmt nachher die Normierung), wobei ich für die Funktionen $\beta(\alpha)$ und $\gamma_J(\alpha)$ die entsprechenden Reihenentwicklungen eingesetzt habe. Für den Zusammenhang zwischen Stromwerten an zwei verschiedenen Renormierungspunkten, für

das *Evolutionsverhalten* oder „Laufen“ des Stromes also, ergibt sich aus der Invarianzforderung die Beziehung $J(\mu_2) = J(\mu_1)U(\mu_1, \mu_2)$ mit

$$U(\mu_1, \mu_2) = \left(\frac{\alpha_s(\mu_1)}{\alpha_s(\mu_2)} \right)^{\gamma_1/\beta_1} \left(1 + \frac{\gamma_1}{\beta_1} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \frac{\alpha_s(\mu_1) - \alpha_s(\mu_2)}{4\pi} + O(\alpha_s^2) \right). \quad (\text{F.20})$$

Zu erkennen ist: Soll das Evolutionsverhalten einer Größe bestimmt werden, die zur ersten Ordnung in α_s bestimmt ist, so ist dafür die Kenntnis der anomalen Dimension (und der Beta-Funktion) in der nächsten Ordnung erforderlich.

F.2.2 Berechnung der anomalen Dimension

Ich habe die Berechnung der anomalen Dimension in meiner Arbeit in der zweiten Schleifenordnung durchgeführt und habe zu diesem Zwecke ein Paket in MATHEMATICA entwickeln können, das diese Berechnungen automatisiert. Die zur Berechnung beitragenden Diagramme sind in Abbildung F.3 dargestellt. Als ein Beispiel möchte ich hier lediglich die anomale Dimension für den Vertex $\Gamma = \gamma_5$ des Baryons Λ_Q angeben,

$$\gamma_{\Lambda 1} = -8 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) + \frac{1}{9} (16\zeta(2) + 40N_f - 796) \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 + O(\alpha_s^3). \quad (\text{F.21})$$

Verwendet wurde das naiv antivertauschenden γ_5 -Schema [33], der Unterschied zum Schema nach t' Hooft, Veltman, Breitenlohner und Maison [17, 31] kann durch eine endliche Renormierung wieder beseitigt werden [52]. Bei der obigen Darstellung des Ergebnisses habe ich die Farbformfaktoren

$$C_B = \frac{N_C + 1}{2N_C}, \quad C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}, \quad C_A = N_C \quad \text{und} \quad T_F = \frac{1}{2} \quad (\text{F.22})$$

explizit für $N_C = 3$ Farbfreiheitsgrade eingesetzt. Erneut möchte ich darauf hinweisen, daß sich das mesonische Ergebnis durch die Ersetzung $C_B \rightarrow C_F$ ableiten läßt. Da diese Ersetzung aber nicht injektiv ist, ist der umgekehrte Weg nicht gangbar. Die anomale Dimension für das Meson, wie sie bereits an anderer Stelle berechnet wurde, ergibt sich also als ein Spezialfall unserer Ergebnisse.

F.3 Strahlungskorrekturen zu QCD-Summenregeln

Als prinzipielle Anwendung der Evolutionsfunktion erster Ordnung erweist sich die Berechnung der Strahlungskorrekturen gleicher Ordnung zum Zweipunktkorrelator, die ich als nächstes durchführte. Es zeigte sich, daß nach geringfügigen Modifikationen dasselbe MATHEMATICA-Paket zur Anwendung kommen konnte. Für den so korrigierten Zweipunktkorrelator schwerer baryonischer Ströme konnte ich in einem zweiten Schritt QCD-Summenregeln aufstellen und analysieren. Ich berechnete dabei Korrekturen zu den ersten beiden Entwicklungstermen der Operatorproduktentwicklung, die in Abbildung F.2 dargestellt ist.

F.3.1 Konstruktion der diagonalen QCD-Summenregel

In diesem Vortrag möchte ich mich auf Korrekturen zum ersten Term konzentrieren. Aufgrund der Diracstruktur führen diese Korrekturen zu diagonalen Summenregeln, d.h. solchen zu Korrelatoren, die gleiche Ströme aneinander koppeln. Der Zweipunktkorrelator ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Pi(\omega = p \cdot v) &= i \int \langle 0 | T \{ J(x) \bar{J}(0) \} | 0 \rangle e^{ipx} d^4x = \\ &= \Gamma' \frac{1 + \psi}{2} \bar{\Gamma}' \frac{1}{4} \text{Sp}(\Gamma \bar{\Gamma}) 2 \text{Sp}(\tau \tau^\dagger) P(\omega).\end{aligned}\quad (\text{F.23})$$

Für die skalare Korrelatorfunktion $P(\omega)$ gilt für negative Werte von ω die Dispersionsrelation

$$P(\omega) = \int_0^\infty \frac{\rho(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega - i0} \quad (\text{F.24})$$

wobei der Imaginärteil die Spektraldichte $\rho(\omega) := \text{Im}(P(\omega))/\pi$ bestimmt. Dies ist die eine Seite der Medaille. Auf der anderen Seite liefert die Phänomenologie für den Zweipunktkorrelator die Spektraldarstellung

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2} \sum_X \frac{|\langle 0 | J_X | X \rangle|^2}{\omega_X - \omega - i0} + \Pi'(\omega), \quad (\text{F.25})$$

wobei $\Pi'(\omega)$ mögliche Subtraktionsterme darstellt. Die skalare Korrelatorfunktion läßt sich dann ausdrücken durch die Residuen

$$\langle 0 | J_\Lambda | \Lambda_Q \rangle = F_\Lambda u, \quad \langle 0 | J_\Sigma | \Sigma_Q \rangle = F_\Sigma u \quad \text{und} \quad \langle 0 | J_{\Sigma^*} | \Sigma_Q^* \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} F_{\Sigma^*} u^\nu \quad (\text{F.26})$$

in der Form

$$P(\omega) = \frac{\frac{1}{2} |F_B|^2}{\bar{\Lambda} - \omega - i0} + \sum_{X \neq B} \frac{\frac{1}{2} |F_X|^2}{\omega_X - \omega - i0} + P'(\omega), \quad (\text{F.27})$$

wobei $\bar{\Lambda} = m_B - m_Q$ die Bindungsenergie des Grundzustandes ist. Die entscheidende Annahme der QCD-Summenregeln, wie sie in [57] vorgestellt wurden, besteht darin, daß sich die verbleibende Summe als ein Integral schreiben läßt, das von einer Schwellenenergie E_C bis zu beliebig hohen Energien läuft und von der Spektraldichte der Dispersionsrelation bestimmt wird. Unter dieser Annahme ergibt die Gleichsetzung beider Formeln für die Korrelatorfunktion

$$\frac{\frac{1}{2} |F_B|^2}{\bar{\Lambda} - \omega - i0} = \int_0^{E_C} \frac{\rho(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega - i0} + P'(\omega). \quad (\text{F.28})$$

Diese erste Vorstufe der Summenregel nützt zunächst nicht viel, da die Spektraldichte für betragsmäßig große negative Werte von ω vertrauenswürdig, das Integral aber für $\omega = \bar{\Lambda}$ zu berechnen ist. Hier hilft man sich, indem man die Spektraldichte durch eine Potenzreihe zu positiven Werten hin extrapoliert und die verwendeten Ableitungsordnungen mit wachsendem $-\omega$ steigen läßt. Formal drückt sich dies aus in der Borel-Transformation

$$\hat{B}f(T) = \hat{B}_T^{(\omega)}(f(\omega)) := \lim_{-\omega, n \rightarrow \infty} \frac{(-\omega)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\omega^n} f(\omega), \quad T = \frac{-\omega}{n} \quad \text{fest.} \quad (\text{F.29})$$

Unter dieser Borel-Transformation ergibt sich die Summenregel

$$\frac{1}{2}|F_B|^2 e^{-\bar{\Lambda}/T} = \int_0^{E_C} \rho(\omega) e^{-\omega/T} d\omega. \quad (\text{F.30})$$

Die Borel-Transformation bringt den Subtraktionsterm zum Verschwinden. Das konstante Verhältnis T wird als *Borel-Parameter* bezeichnet. Dieser Parameter der Dimension einer Energie ist eine unphysikalische Größe. Es lassen sich lediglich Abschätzungen über ein sinnvolles „Fenster“ für diesen Parameter bestimmen. Daher sollte die in der Summenregel dargestellte Abhängigkeit zwischen E_C , $\bar{\Lambda}$ und $|F_B|$ innerhalb dieses Fensters möglichst konstant bleiben. Diese Bedingung reicht aus, um in einer Summenregelanalyse alle drei Parameter, allerdings mit durch diese Methode hervorgerufenen nicht unbedeutenden Fehlern, zu bestimmen.

F.3.2 Analyse der diagonalen QCD-Summenregel

Ich habe diese Analyse für Strahlungskorrekturen zur diagonalen und nichtdiagonalen QCD-Summenregel, aber auch für eine Kombination durchgeführt, die dem Quarkkonstituentenmodell entspricht. In Abbildung F.4 werden die Prinzipien dieser Analyse sichtbar. Im diagonalen Fall ergeben sich im Vergleich mit dem nicht strahlungskorrigierten Fall die Ergebnisse der Tabelle F.1.

	führende Ordnung	nächstführende Ordnung
$ F_\Lambda $	$0.023 \pm 0.001 \text{ GeV}^3$	$0.025 \pm 0.002 \text{ GeV}^3$
$ F_\Sigma $	$0.055 \pm 0.002 \text{ GeV}^3$	$0.039 \pm 0.003 \text{ GeV}^3$

Tabelle F.1: Vergleich der Analyseergebnisse für die diagonale QCD-Summenregel

F.4 Zusammenfassung und Ausblick

- Die Bestimmung der anomalen Dimension zur zweiten Schleifenordnung ist wichtig zur Beschreibung des Evolutionsverhaltens des Stromes in erster Schleifenordnung.
- Die anomale Dimension für schwere mesonische Ströme ergibt sich aus der von mir berechneten als Spezialfall.
- Die Beiträge der Strahlungskorrekturen erster Ordnung zu dem Zweipunktkorrelator sind wie im mesonischen Fall bedeutend. Mit $\bar{\Lambda}(\Lambda_Q) = 0.78 \pm 0.05 \text{ GeV}$ und $\bar{\Lambda}(\Sigma_Q^{(*)}) = 0.90 \pm 0.05 \text{ GeV}$ ergeben sich Quarkmassen $m_c \approx 1500 \text{ MeV}$ und $m_b \approx 4860 \text{ MeV}$ und eine Differenz $m(\Lambda_Q) - m(\Sigma_Q) \approx 170 \text{ MeV}$.
- Die Ergebnisse der vorgestellten Arbeit sind anwendbar und auszubauen auf die Berechnung von Dreipunktkorrelatoren, also die Bestimmung der Isgur-Wise-Funktion. Dies soll in nächster Zeit in Angriff genommen werden.

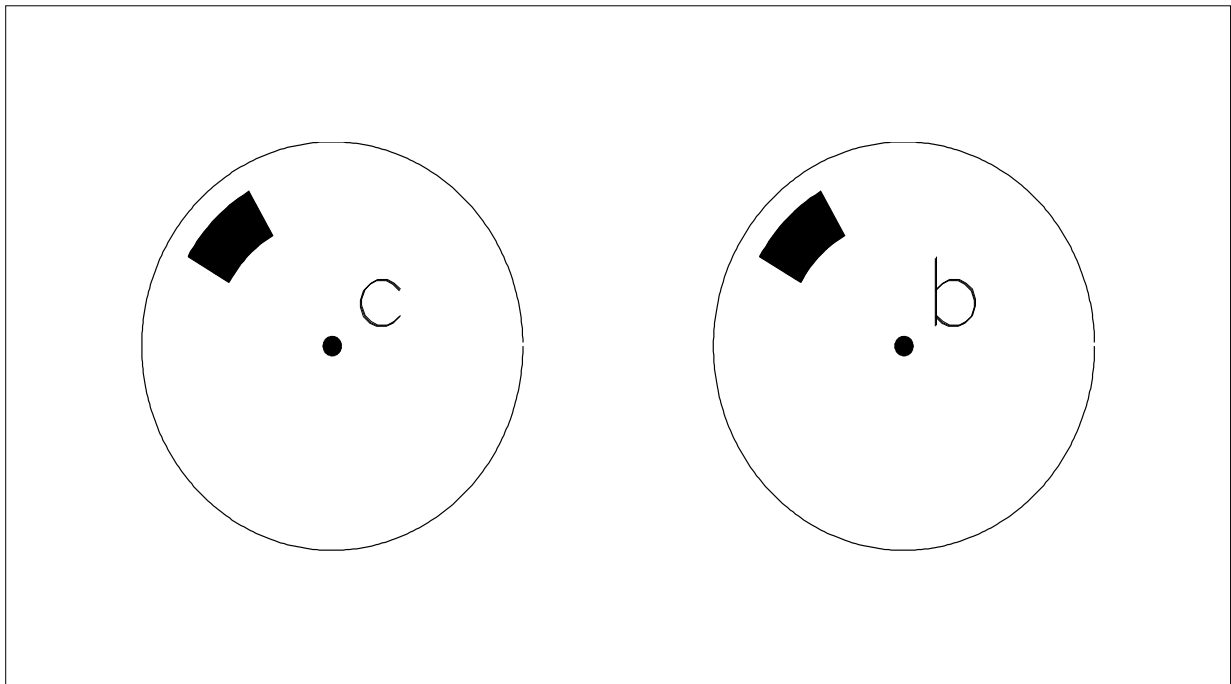


Abbildung F.1: Symbolischer Vergleich zwischen zwei Baryonen, die bis auf das enthaltene schwere Quark denselben Quarkinhalt besitzen und daher Isotopen ähneln

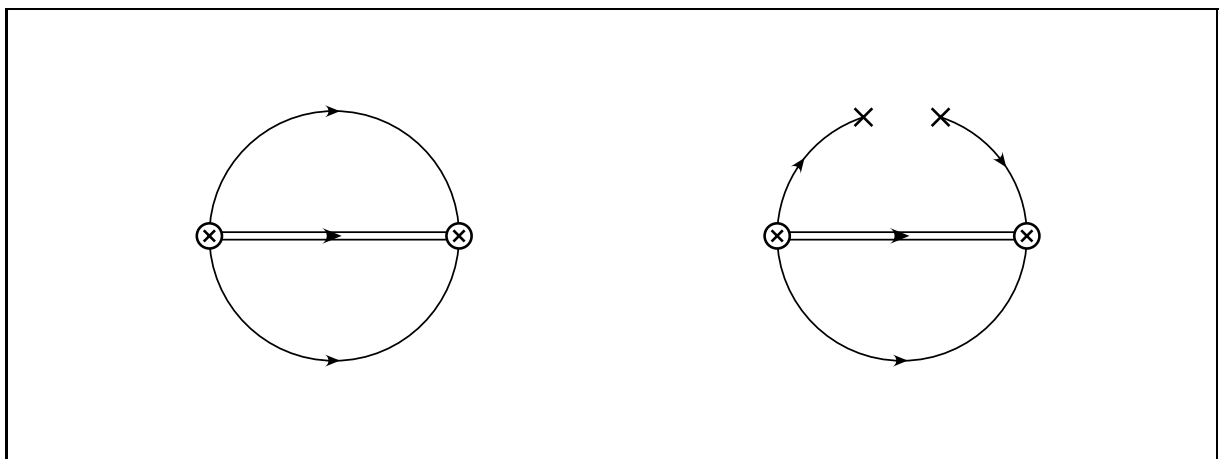


Abbildung F.2: Die behandelten führenden Graphen der Operatorproduktentwicklung

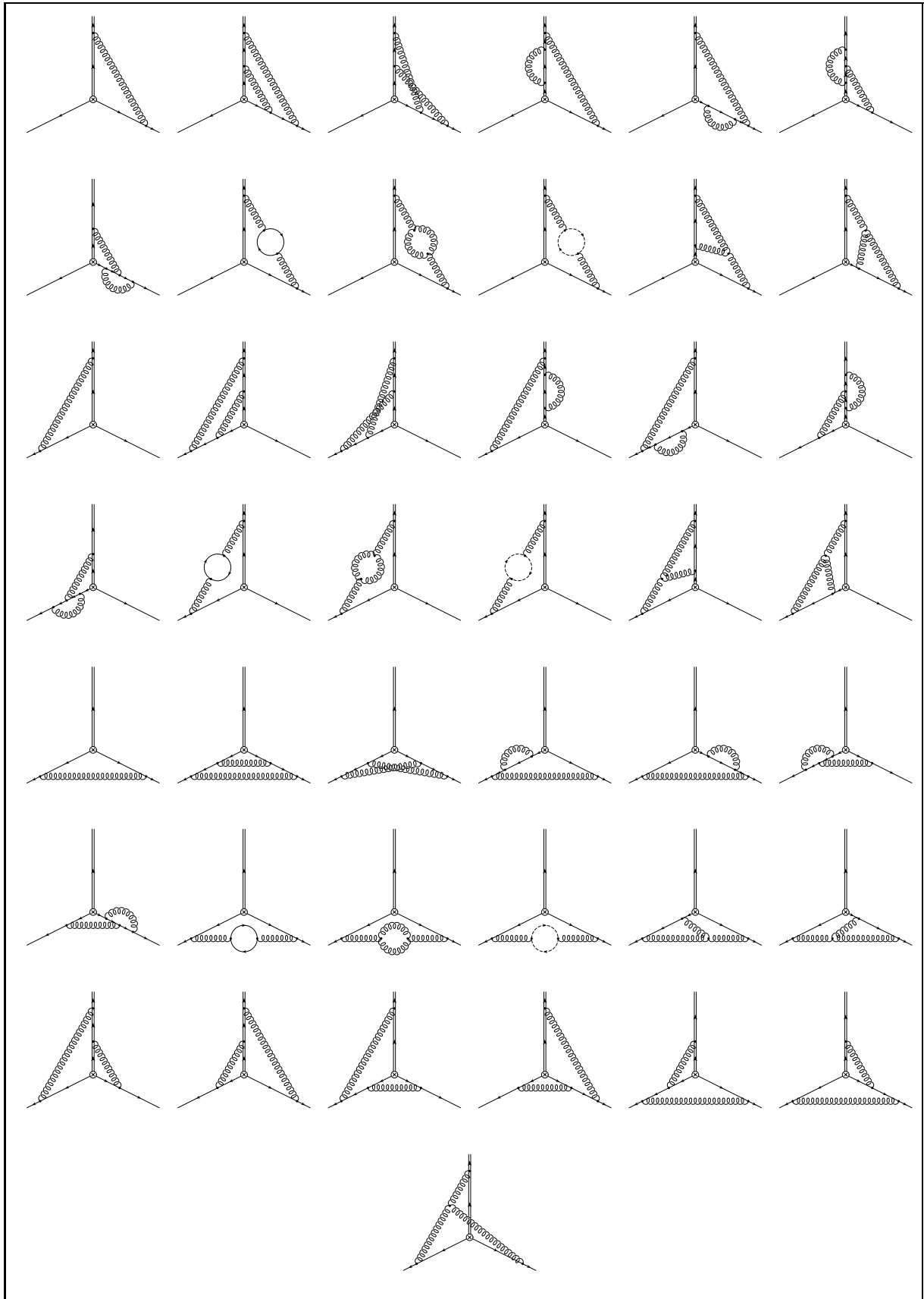


Abbildung F.3: Strahlungskorrekturterme 2. Ordnung zum schweren baryonischen Strom

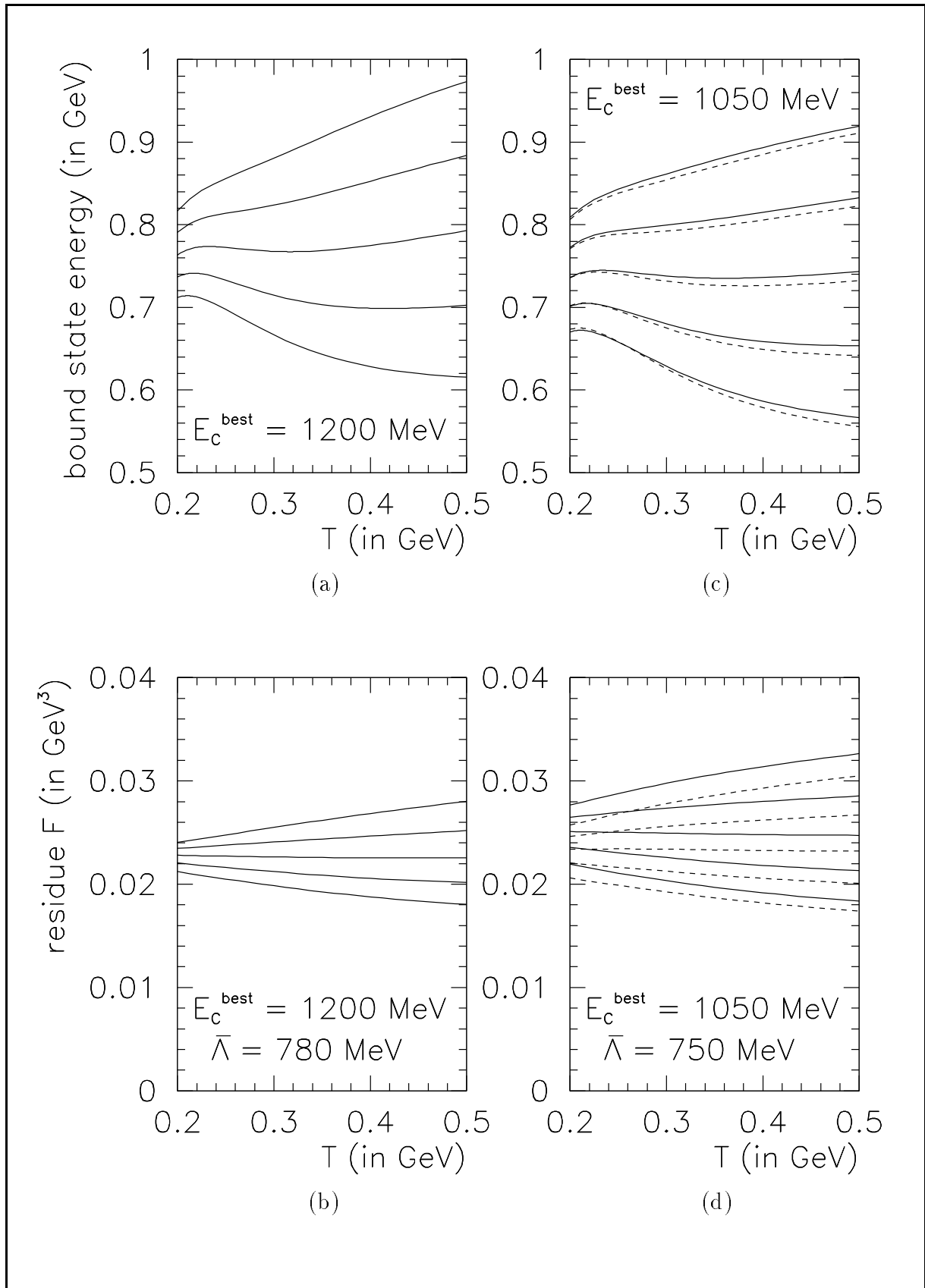


Abbildung F.4: Analyse der diagonalen Summenregel für das schwere Baryon Λ_Q ohne (links) und mit Strahlungskorrekturen (rechts)

Anhang G

Stichwortverzeichnis

adjungierter Spinor	10
allgemein kovariante Eichung	128
anomale Dimension	3, 119, 141, 146
anomale Spinsprung-Terme	113
Axialvektorstrom	13
Azimuthalwinkel χ	19
baryonischer Strom	117
Betafunktion der Renormierungsgruppengleichung	141
Betafunktion nach Euler	33
Bindungsenergie Λ des Grundzustandes	168
Borel-Parameter	170
Borel-Transformation	170
Bornscher Term	2, 16
Breit-Wignersche Resonanzfunktion	13
diagonaler Korrelator	156
Dilogarithmusfunktion	40
Dilogarithmusfunktion, unbestimmte	66
Dimension, anomale	3, 141
dimensionale Regularisierung	2, 31
Diquarksystem	117
Diracgleichung	10
Diracstruktur eines Graphen	120, 130, 195
Diracstruktur eines Graphen, Pre-	159, 197
Dispersionsrelation	158
Divergenz, Infrarot(IR)-	31
Divergenz, kollineare	48
Divergenz, Ultraviolett(UV)-	31
doppeltleichte Graphen	202
Dreipunktkorrelator	119
Effektive Theorie schwerer Quarks (HQET)	2, 114
Eichparameter	115, 128
Eichung, allgemein kovariante	128
Eichung, Feynman-	115, 128

Eichung, Fixpunkt-	157
Eikonal-Näherung	61
Einschleifenfunktion	2
Einschleifenfunktion der HQET	124
Einschleifenfunktion der QCD	124
elektromagnetischer Vertex	12
elektroschwache Kopplungskonstanten	13
elektroschwacher Propagator	13
elektroschwache Theorie, Strukturfunktionen	18
elektroschwacher Vertex	13
Entwicklung in Kovariante	21, 121
Eulersche Betafunktion	33
Eulersche Gammafunktion	33
Eulersche Konstante γ_E	35
Eulersche Winkel	184
Eulersches Theorem für homogene Funktionen	141
Evolutionsverhalten	3, 155
Farbstruktur eines Graphen	118, 133
Fenster einer Summenregelanalyse	176
Fermis Goldene Regel	9
Feynmanparametrisierung	34
Feynman-Eichung	115, 128
Feynmanpropagator	11
Fixpunkteichung	157
Formfaktoren der Vertexkorrektur	2, 53
γ_5 -Problem	2
Gammafunktion nach Euler	33
Gammafunktion, unvollständige	172
Geisterfeld	116
Gell-Mann-Matrizen	14
Gluonkondensat	157
Gluonpropagator	14
Gluonvertex	14
Gluonvertex, Drei-	116
Goldene Regel nach Fermi	9
Grad h der longitudinalen Strahlpolarisation	23
Graphen, Diracstruktur eines	120, 130
Graphen, doppelteichte	202
Graphen, Farbstruktur eines	118, 133
Graphen, Impulsstruktur eines	130
Graphen, irreduzible	137, 204
Graphen, Pre-Diracstruktur eines	159
Graphen, Schleifen-	53
Graphen, schwerleichte	201
Graphen, Stammintegral eines	130
Graphen, virtuelle	53

Graphen der Korrektur zum Quarkkondensat	205
Graphen der Korrelatorkorrektur	205
große Komponente des Spinors	115
Grundintegral $I(n, \alpha)$	32
Grundzustand, Bindungsenergie Λ	168
Hadronebene	19
Hadronsystem	19
Hadrontensor	2, 17
Heavy Quark Effective Theory (HQET)	2, 114
Heavy Quark Symmetry (HQS)	2, 115
HIP-Programmpaket	27
HQET, Heavy Quark Effective Theory	2, 114
HQET-Einschleifenfunktion	124
HQET-Zweischleifenfunktion	124
HQS, Heavy Quark Symmetry	2, 115
Impulsstruktur eines Graphen	130
Infrarot-Divergenz (IR)	31
Integral, Kontraktions-	121, 194
Integral, skalares	121
Integral, Tensor-	120
Integraleponentialfunktion	172
interpolierender Strom	156
Invariante	121, 194
IR-Divergenz	31
irreduzible Graphen	137, 204
Isgur-Wise-Funktion	119
kleine Komponente des Spinors	115
Kombinator	196
Kondensat, Gluon-	157
Kondensat, Quark-	157, 165
konstituent quark model	180
Kontraktionsintegral	121, 194
Kontraktor	198
Kopplungskonstante, laufende	2
Kopplungskonstanten, elektroschwache	13
Korrekturen durch Schleifen	2
Korrekturen zum Stromvertex	3
Korrelator, diagonalen	156
Korrelator, nichtdiagonalen	156
Korrelator, Zweipunkt-	3, 119, 156
Korrelatorfunktion, skalare	156
Korrelatorkorrektur, Graphen	205
Korrespondenzformel	40
kovariante Eichung, allgemeine	128
kovariante Entwicklung	21, 121
kovariante Entwicklung, Strukturfunktionen	21

Kovarianz nach Lorentz	18
laufende Kopplungskonstante	2
laufende Parameter	106
Leptonebene	19
Leptonensystem	19
Leptontensor	2, 16
longitudinale Polarisation	20
longitudinale Strahlpolarisation, Grad h	23
Lorentzkovarianz	18
Massendimension d	156
Massenschale	11
MATHEMATICA	27, 120
Meson	117
Meson, schweres	128
mesonischer Strom	117
minimales Subtraktionsverfahren (MS)	37
minimales Subtraktionsverfahren, modifiziertes ($\overline{\text{MS}}$)	37
modifiziertes minimales Subtraktionsverfahren ($\overline{\text{MS}}$)	37
Momente der Polarisation	102
Nichtabelianisierung, naive	153
nichtdiagonaler Korrelator	156
OPE, Operator Product Expansion	156
Operator Product Expansion (OPE)	156
Operatoren auf Einträgen	126
Operatorproduktentwicklung (OPE)	156
Parametrisierung nach Feynman	34
Paritätsquantenzahl	119
Phasenraumfaktor	57, 69, 87
Phasenraumfaktor, relativer	62, 87
Photonpropagator	12
Polarisation	15, 93
Polarisation, longitudinale	20
Polarisation, Momente der	102
Polarisation, transversal ebene	20
Polarisation, transversal normale	20
Polarisationskomponenten	2
Polarwinkel θ	19
Pre-Diracstruktur eines Graphen	159
Projektoren	25
Propagator	11
Propagator, elektroschwacher	13
Propagator, Feynman-	11
Propagator des Gluons	14
Propagator des Photons	12
Propagator des schweren Quarks	115

QCD-Einschleifenfunktion	124
QCD-Summenregeln	3, 119
QCD-Zweischleifenfunktion	124
Quarkkondensat	157, 165
Quarkkondensat, Graphen zur Korrektur	205
Quarkkonstituentenmodell	180
Regularisierung	31
Regularisierung, dimensionale	2, 31
relativer Phasenraumfaktor	62, 87
Renormierung	36
Renormierung, endliche	154
Renormierungsfaktor	140
Renormierungsgruppengleichung	106, 140
Renormierungsskala μ	140
Residuum	119
Residuum eines baryonischen Stroms	169
Resonanz des Z^0 -Bosons	18
Resonanzfunktion nach Breit und Wigner	13
Restimpuls	115
Schleifengraphen erster Ordnung	2, 53
Schouten-Identität	55
Schwellenenergie E_C des Spektrums	169
schweres Meson	128
schweres Quark, Propagator	115
schweres Quark, Vertex	116
schwer-leichte Graphen	201
Schwerpunktsystem	18
Skala der Renormierung	140
skalare Korrelatorfunktion	156
skalares Integral	121
Spektraldichte	2, 158
Spin-Flavour-Symmetrie	2, 117
Spinquantenzahl	119
Spinor	10
Spinor, adjungierter	10
Spinsprung-Terme, anomale	113
Spinvierervektor	11
Stammintegral eines Graphen	130
Strahlpolarisation, Grad der longitudinalen	23
Strom, Axialvektor-	13
Strom, baryonischer	117
Strom, interpolierender	156
Strom, mesonischer	117
Strom, Vektor-	12
Stromvertex	128
Stromvertex, Korrekturen zum	3

Strukturfunktionen der elektroschwachen Theorie	18
Strukturfunktionen der kovarianten Entwicklung	21
Subtraktion	140
Subtraktionsverfahren	2
Subtraktionsverfahren, minimales (MS)	37
Subtraktionsverfahren, modifiziertes minimales ($\overline{\text{MS}}$)	37
Summenregel, strahlungskorrigierte diagonale	173
Summenregel, strahlungskorrigierte nichtdiagonale	178
Summenregeln der QCD	3, 119
Symmetrie schwerer Quarks (HQS)	2, 115
temporale Komponente	2, 55, 191
temporaler Projektor	191
Tensorintegral	120
transversal ebene Polarisierung	20
transversal normale Polarisierung	20
Ultraviolett-Divergenz (UV)	31
unbestimmte Dilogarithmusfunktion	66
unvollständige Gammafunktion	172
UV-Divergenz	31
Vektorstrom	11
Vertex, Dreigliuon-	116
Vertex, elektromagnetischer	12
Vertex, elektroschwacher	13
Vertex an eine schwere Quarklinie	116
Vertex des Gluons	14
Vertexkorrektur, Formfaktoren der	2, 53
Vierertensor	18
vierertransversaler metrischer Tensor	21
vierertransversaler Quarkimpuls	21
Vierervektor	18
virtuelle Graphen erster Ordnung	53
Ward-Identität	48
weiche Gluonen	3, 61
Weinberg-Salam-Modell	13
Weinbergwinkel θ_W	13
Wilson-Koeffizient	154
Z^0 -Resonanz	18
Zerfallsratenterme	79, 86, 191
Zweipunktkorrelator	3, 119, 156
Zweischleifenfunktion	2
Zweischleifenfunktion der HQET	124
Zweischleifenfunktion der QCD	124

Tabellarischer Lebenslauf

Stefan Groote
bei Lehn
Lorscher Str. 13
55129 Mainz Hechtsheim

Staatsangehörigkeit: deutsch

25.4.1963 geboren in Hagen/Westfalen
Vater: Architekt Dipl. Ing. Peter Reinhold Groote
Mutter: Hildegard Gudrun Groote geb. Oettinghaus

26.8.1969 Einschulung

1973 Eintritt in das mathematisch-naturwissenschaftliche
Gymnasium Hohenlimburg

29.7.1980 Aufnahme eines wissenschaftlichen Briefwechsels
mit Herrn Prof. Dr. Eric R. Laithwaite, London

1.2.1982 Teilnahme am Auswahlseminar für die
12. Internationale Physikolympiade

16.6.1983 Abitur

1.10.1983 Beginn des Studiums der Physik an der Universität Dortmund

23.9.1985 Vordiplom

26.2.1986 Aufnahme als Stipendiat in die
„Studienstiftung des deutschen Volkes“

30.11.1988 Diplom der Physik

1.12.1988 – *17.8.1994*
freier Mitarbeiter am Lehrstuhl für Theoretische Physik III der
Universität Dortmund bei Herrn Priv. Doz. Dr. Allen C. Hirshfeld

15.10.1990 – *14.1.1996*
Wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl für
Mathematische Physik der Fernuniversität Hagen

18.8.1994 Doktorand am Lehrstuhl für Theoretische Physik (ThEP) der
Universität Mainz bei Herrn Prof. Dr. Jürgen G. Körner

1.7.1996 Wissenschaftlicher Angestellter der Universität Mainz

Jan. 1997 voraussichtlicher Termin der Promotionsprüfung