

LTAT.03.019 Funktsionaalprogrammeerimine

Kategooriad ja FP

Kategooriad

Kategooria \mathcal{C} koosneb järgmistest komponentidest:

- ▶ objektid $A, B, C, \dots \in \text{Obj}(\mathcal{C})$,
- ▶ morfismid (ehk nooled) $f, g, h, \dots \in \text{Mor}(A, B)$,
- ▶ iga objekti A jaoks identsusmorfism $\text{id}_A : A \rightarrow A$,
- ▶ iga kahe "tüübisobiva" morfismi $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ korral nende kompositsioon $g \circ f : A \rightarrow C$,

mis rahuldavad järgmisi aksioome:

$$(A, B) \neq (C, D) \Rightarrow \text{Mor}(A, B) \cap \text{Mor}(C, D) = \emptyset$$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$$\text{id}_B \circ f = f$$

$$f \circ \text{id}_A = f$$

Konstruksioone kategooriatel

Kategooriate \mathcal{A} ja \mathcal{B} **korruis** on kategooria $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, mis on defineeritud järgnevalt:

- ▶ $\text{Obj}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \text{Obj}(\mathcal{A}) \times \text{Obj}(\mathcal{B})$,
- ▶ $\text{Mor}((A, B), (A', B')) = \{(f, g) \mid f \in \text{Mor}(A, A'), g \in \text{Mor}(B, B')\}$,
- ▶ kategooria $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ morfismide komponeerimine on indutseeritud \mathcal{A} ja \mathcal{B} komponeerimiste poolt $(f, g)(a, b) = (f(a), g(b))$.

Kategooria \mathcal{C} **duaalne kategooria** \mathcal{C}^{op} on defineeritud järgnevalt:

- ▶ $\text{Obj}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Obj}(\mathcal{C})$,
- ▶ $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$,
- ▶ komponeerimine on defineeritud võrdusega $f \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} g = g \circ_{\mathcal{C}} f$.

Morfismide ja objektide liike

Morfismi $f : A \rightarrow B$ nimetatakse **isomorfismiks**, kui leidub morfism $f^{-1} : B \rightarrow A$, selline et $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ ja $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$. Siis objektid A ja B on **isomorfsed** (tähistus $A \cong B$).

Kategoria \mathcal{C} objekti 1 nimetatakse **lõppobjektiks**, kui \mathcal{C} igast objektist leidub täpselt üks morfism objekti 1.

Kategoria \mathcal{C} objekti 0 nimetatakse **algobjektiks**, kui \mathcal{C} igast objekti leidub täpselt üks objektist 0 väljuv morfism.

Funktorid

(Kovariantne) **funktor** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ koosneb:

- ▶ kujutusest $F : \text{Obj}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{B})$ objektiklasside vahel,
- ▶ iga objektipaari A ja B korral, kujutusest $F : \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(F(A), F(B))$,

mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

$$\begin{aligned}F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) \\F(\text{id}_A) &= \text{id}_{F(A)}\end{aligned}$$

Funktorit tüüpi $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ nimetatakse **endofunktoriks**.

Funktorit tüüpi $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ nimetatakse **kontravariantseks** funktoriks.

F -algebrad

Endofunktori $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ **algebrate** kategooria on defineeritud järgnevalt:

- ▶ objektid on paarid (A, φ) , kus $\varphi : F(A) \rightarrow A$;
- ▶ morfism $f : (A, \varphi) \rightarrow (B, \psi)$ on selline \mathcal{C} morfism $f : A \rightarrow B$, et $f \circ \varphi = \psi \circ F(f)$;
- ▶ kompositsioon on indutseeritud baaskategooriast \mathcal{C} .