Laiskus

Meil on kaks standardset reduktsioonijärjekorda:

- normaaljärjekord ja
- aplikatiivjärjekord.

Mis on eelised ja puudused? Kumba eelistada?

Normaaljärjekord on parem!

- Normaaljärjekord leiab alati normaalkuju, kui see eksisteerib! Normaalkuju ei ole näiteks: $(\lambda\, x.\ x\ x)\ (\lambda\, x.\ x\ x)$
- Ei väärtusta argumente mida ei kasutata. Näiteks $(\lambda\, x.\ 0)$ (fact 100)
- Funktsiooni argumendiks võib anda avaldise, millel pole normaalkuju.
  - Praktikas näiteks lõpmatu list. Näiteks Haskellis:

```
sieve (p:xs) = filter (λx → x `mod` p ≠ 0) xs
primes = map head (iterate sieve [2..])

Main> take 3 primes
[2,3,5]
```

- Kui argumenti kasutatakse mitu korda, väärtustatakse seda mitu korda :(

Laisk väärtustamine on veel parem!

- Nagu normaaljärjekord aga argumenti väärtustatakse maksimaalselt üks kord.
- Graafireduktsioon, mitte puu-reduktsioon.
- (Laisal) väärtustamisel on ka kitsam tähendus, mis ei kasuta reduktsioonisammu vaid on lähedasem kompileerimisele. Sellest räägime mõnes teises loengus/kursusel.

Näide (Haskell)

```
type Queen = (Int, Int)

attacking :: Queen → Queen → Bool
attacking (x1, y1) (x2, y2) =
    (x1 == x2) || (y1 == y2) || abs (x1 - x2) == abs (y1 - y2)

placeable :: Queen → [Queen] → Bool
placeable p qs = and [ (not (attacking p q)) | q ← qs ]

nQueens :: Int → [[Queen]]
nQueens n = nQueens' n where
    nQueens' 0 = [[]]
    nQueens' k =
        [ q:qs   | qs ← nQueens' (k - 1)
                 , q  ← [(k, y) | y ← [1..n]]
                 , placeable q qs]
```

Näide (Haskell)

```
*Main> time $ queens 10
```

```
♕ . . . . . . . . .
. . ♕ . . . . . . .
. . . . . ♕ . . . .
. . . . . . . ♕ . .
. . . . . . . . . ♕
. . . . ♕ . . . . .
. . . . . . . . ♕ .
. ♕ . . . . . . . .
. . . ♕ . . . . . .
. . . . . . ♕ . . .
```

```
0.007199s
```

Näide (Haskell)

```
fib :: Integer → Integer
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)

*Main> time $ print $ fib 30
1346269
1.183209s
```

```
fibs :: [Integer]
fibs = 1 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)

*Main> time $ print $ fibs !! 30
1346269
0.000059s
```

Kuidas `fibs` töötab?

```
fibs      = 1 :  1  : ...

tail fibs = 1 : ...
```

Näide (Haskell)

```
fib :: Integer → Integer
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)

*Main> time $ print $ fib 30
1346269
1.183209s
```

```
fibs :: [Integer]
fibs = 1 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)

*Main> time $ print $ fibs !! 30
1346269
0.000059s
```

Kuidas `fibs` töötab?

```
fibs      = 1 :  1  : ...
            +
tail fibs = 1 : ...
            ||
            2
```

Näide (Haskell)

```
fib :: Integer → Integer
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)

*Main> time $ print $ fib 30
1346269
1.183209s
```

```
fibs :: [Integer]
fibs = 1 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)

*Main> time $ print $ fibs !! 30
1346269
0.000059s
```

Kuidas `fibs` töötab?

```
fibs      = 1 :  1  : 2 : ...
            +    +
tail fibs = 1 :  2  : ...
            ||
            2
```

Näide (Haskell)

```
fib :: Integer → Integer
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)

*Main> time $ print $ fib 30
1346269
1.183209s
```

```
fibs :: [Integer]
fibs = 1 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)

*Main> time $ print $ fibs !! 30
1346269
0.000059s
```

Kuidas `fibs` töötab?

```
fibs      = 1 :  1  : 2 : ...
            +    +
tail fibs = 1 :  2  : ...
            ||   ||
            2    3
```

Näide (Haskell)

```
fib :: Integer → Integer
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)

*Main> time $ print $ fib 30
1346269
1.183209s
```

```
fibs :: [Integer]
fibs = 1 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)

*Main> time $ print $ fibs !! 30
1346269
0.000059s
```

Kuidas `fibs` töötab?

```
fibs      = 1 :  1  : 2 : 3 : ...
            +    +
tail fibs = 1 :  2  : 3 : ...
            ||   ||   ||
            2    3    5
```

Näide (Haskell)

```
fib :: Integer → Integer
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)

*Main> time $ print $ fib 30
1346269
1.183209s
```

```
fibs :: [Integer]
fibs = 1 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)

*Main> time $ print $ fibs !! 30
1346269
0.000059s
```

Kuidas `fibs` töötab?

```
fibs      = 1 :  1  : 2 : 3 : 5 : ...
            +    +
tail fibs = 1 :  2  : 3 : 5 : ...
            ||   ||   ||  ||
            2    3    5   8
```

Näide (Haskell)

```
foldl (+) 0 [10,20,30]
⟶ foldl (+) (0+10) [20,30]
⟶ foldl (+) (0+10+20) [30]
⟶ foldl (+) (0+10+20+30) []
⟶ 0+10+20+30
⟶ 10+20+30
⟶ 30+30
⟶ 60
```

vs.

```
foldl' (+) 0 [10,20,30]
⟶ foldl' (+) (0+10) [20,30]
⟶ foldl' (+) 10 [20,30]
⟶ foldl' (+) (10+20) [30]
⟶ foldl' (+) 30 [30]
⟶ foldl' (+) (30+30) []
⟶ foldl' (+) 60 []
⟶ 60
```

Sama arv samme.

Näide (Haskell)

```
*Main> time $ print $ foldl  (+) 0 [0..10000000]
50000005000000
2.895953s

*Main> time $ print $ foldl' (+) 0 [0..10000000]
50000005000000
0.268244s
```

- Laiskust mittekasutava koodi jaoks aeglasem ja raskemini optimeeritav kui agar väärtustamine. :(

Aplikatiivjärjekord on parem!

- Parem jõudlus lihtsamate optimisatsioonide abil.
  - `Int` parameeter protsessori registris.
- Jõudluse analüüs lihtsam. Vähem üllatusi.
- Aga lõpmatud listid???

Lazy tüübid

Idrises on (lihtsustatult) selline andmestruktuur:

```
data Lazy : Type → Type where
     Delay : (val : a) → Lazy a
```

... ja funktsioon

```
Force : Lazy a → a
```

- `Delay` argumenti ei väärtustata.
- `Force (Delay x) = x`
- Näiteks `and : List (Lazy Bool) → Bool`

Laisad listid

Lõpmatud laisad listid ehk striimid:

```
data Stream : Type → Type where
     (::) : a → Lazy (Stream a) → Stream a
```

ja laisad listid

```
mutual
    data LList : Type → Type where
        Nil : LList a
        (::) : a → LazyList a → LList a

    LazyList : Type → Type
    LazyList a = Lazy (LList a)
```

Naturaalarvud

- Ühe lahutamine — abifunktsiooni spetsifikatsioon

$$
\begin{array}{lcl}
\text{prefn } f\ (\text{true}, x) & = & (\text{false}, x) \\
\text{prefn } f\ (\text{false}, x) & = & (\text{false}, f\ x) \\
(\text{prefn } f)^n\ (\text{false}, x) & = & (\text{false}, f^n\ x) \\
(\text{prefn } f)^n\ (\text{true}, x) & = & (\text{false}, f^{n-1}\ x)
\end{array}
$$

- Ühe lahutamine — definitsioon

$$
\begin{array}{lcl}
\text{prefn} & \equiv & \lambda f\ p.\ (\text{false}, (\text{cond } (\text{fst } p)\ (\text{snd } p)\ (f\ (\text{snd } p)))) \\
\text{pred} & \equiv & \lambda n.\ \lambda f\ x.\ \text{snd } (n\ (\text{prefn } f)\ (\text{true}, x))
\end{array}
$$

- Näide

$$
\begin{array}{lcl}
\text{pred } \underline{n}\ f\ x & \twoheadrightarrow & \text{snd } (\underline{n}\ (\text{prefn } f)\ (\text{true}, x)) \\
& \twoheadrightarrow & \text{snd } ((\text{prefn } f)^n\ (\text{true}, x) \\
& \twoheadrightarrow & \text{snd } (\text{false}, f^{n-1}\ x) \\
& \twoheadrightarrow & f^{n-1}\ x
\end{array}
$$

Listid

- Definitsioon

$$
\begin{array}{lcll}
\text{nil} & \equiv & \lambda z.\ z & (\equiv\ \ \mathrm{I}) \\
\text{cons} & \equiv & \lambda x\ y.\ (\text{false}, (x, y)) & \\
\text{null} & \equiv & \lambda z.\ z\ \text{true} & (\equiv\ \ \text{fst}) \\
\text{hd} & \equiv & \lambda z.\ \text{fst}\ (\text{snd}\ z)) & \\
\text{tl} & \equiv & \lambda z.\ \text{snd}\ (\text{snd}\ z)) &
\end{array}
$$

- Näide

$$
\begin{array}{lcl}
\text{null nil} & \equiv & \text{fst}\ (\lambda z.\ z) \\
 & \equiv & (\lambda p.\ p\ \text{true})\ (\lambda z.\ z) \\
 & \twoheadrightarrow & \text{true}
\end{array}
$$

Püsipunktid

- Termi M nimetatakse *püsipunktikombinaatoriks* kui

$$\forall F.\ M\ F = F\,(M\ F)$$

- Curry "paradoksaalne" kombinaator

$$\mathrm{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(x\ x))\,(\lambda x.f(x\ x))$$

- Kombinaator Y on püsipunktikombinaator

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Y}\ e & \to_\beta & (\lambda x.e(x\ x))\,(\lambda x.e(x\ x)) \\ & \to_\beta & e((\lambda x.e(x\ x))\,(\lambda x.e(x\ x))) \\ & =_\beta & e\,(\mathrm{Y}\ e) \end{array}$$

Püsipunktid

- "Tugev" püsipunkti kombinaator

$$\Theta \equiv (\lambda xy.\ y(xxy))\,(\lambda xy.\ y(xxy))$$

- Püsipunktikombinaatoreid saab kasutada rekursiivsete funktsioonide defineerimiseks.
- Näide:

$$\begin{aligned} \text{add} &= \lambda x\ y.\ \text{cond}\,(\text{iszero}\ x)\ y\ (\text{add}(\text{pred}\ x)(\text{succ}\ y)) \\ \text{add} &\equiv \text{Y}\,(\lambda f\ x\ y.\ \text{cond}\,(\text{iszero}\ x)\ y\ (f\,(\text{pred}\ x)(\text{succ}\ y))) \end{aligned}$$

Näide (Idris)

```
Queen : Type
Queen = (Int, Int)

attacking : Queen → Queen → Bool
attacking (x1, y1) (x2, y2) =
    (x1 == x2) || (y1 == y2) || abs (x1 - x2) == abs (y1 - y2)

placeable : Queen → List Queen → Bool
placeable p qs = and [ delay (not (attacking p q)) | q ← qs ]
-- erinevus Haskellist:
--    and töötab List (Lazy a) peal, peame lisama delay

nQueens : Int → LazyList (List Queen)
nQueens n = nQueens' n where
    nQueens' : Int → LazyList (List Queen)
    nQueens' 0 = [[]]
    nQueens' k =
        [ q::qs | qs ← nQueens' (k - 1)
                , q  ← cast [(k, y) | y ← [1..n]]
                , placeable q qs]
-- erinevus Haskellist:
--    listikomprehensioon töötab List-i peal,
--    peame konverteerima LazyList-iks (cast).
```

- Esimene element: 10 korda kiirem kui Haskellis!