Ülesanne

Redutseeri normaalkujule kasutades normaaljärjekorda.

$$(\lambda t\ x\ y.\ t\ x\ y)\ (\lambda x\ y.\ x)\ x\ y$$

Andmete esitamine λ-arvutuses

- Väärtusteks normaalkujul, kinnised termid.
- Näiteks, baaskombinaatorid

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{I} & \equiv & \lambda x.\ x \\
\mathsf{K} & \equiv & \lambda x\ y.\ x \\
\mathsf{S} & \equiv & \lambda f\ g\ x.\ f\ x\ (g\ x)
\end{array}
$$

  - Kõik λ-arvutuse termid saab esitada aplikatsiooni ning S ja K kobinaatorite abil s.t. ilma eksplitisiitselt seotud muutujaid kasutamata.

Tõeväärtused

- Spetsifikatsioon

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{not\ true} & = & \mathtt{false} \\ \mathtt{not\ false} & = & \mathtt{true} \end{array}$$

- Definitsioon

$$\begin{array}{lcll} \mathtt{true} & \equiv & \lambda xy.\ x & (\equiv \quad \mathrm{K}) \\ \mathtt{false} & \equiv & \lambda xy.\ y & \\ \mathtt{not} & \equiv & \lambda t.\ t\ \mathtt{false}\ \mathtt{true} & \end{array}$$

- Näide:

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{not\ true} & \equiv & (\lambda t.\ t\ \mathtt{false\ true})\ \mathtt{true} \\ & \to & \mathtt{true\ false\ true} \\ & \equiv & (\lambda x.\ \lambda y.\ x)\ \mathtt{false\ true} \\ & \to & (\lambda y.\ \mathtt{false})\ \mathtt{true} \\ & \to & \mathtt{false} \end{array}$$

Tingimuslause

- Spetsifikatsioon

$$\begin{aligned} \mathsf{cond}\ \mathsf{true}\ E_1\ E_2 &= E_1 \\ \mathsf{cond}\ \mathsf{false}\ E_1\ E_2 &= E_2 \end{aligned}$$

- Definitsioon

$$\mathsf{cond} \equiv \lambda t\ x\ y.\ t\ x\ y$$

- Näide:

$$\begin{aligned} \mathsf{cond}\ \mathsf{false}\ E_1\ E_2 &\equiv (\lambda t\ x\ y.\ t\ x\ y)\ \mathsf{false}\ E_1\ E_2 \\ &\twoheadrightarrow \mathsf{false}\ E_1\ E_2 \\ &\equiv (\lambda x\ y.\ y)\ E_1\ E_2 \\ &\twoheadrightarrow E_2 \end{aligned}$$

Ülesanne

Implementeerige makrodefinitsioonina tõeväärtuste konjunktsioon.

Spetsifikatsioon:

$$\begin{aligned} \mathsf{and}\ \mathsf{True}\ E_2 &= E_2 \\ \mathsf{and}\ \mathsf{False}\ E_2 &= \mathsf{False} \end{aligned}$$

Ülesanne

Implementeerige kolme variandiga enumeratsioon: valgusfoor

Spetsifikatsioon:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{kui}\ \mathsf{Punane}\ \ E_p\ E_k\ E_r & = & E_p \\ \mathsf{kui}\ \mathsf{Kollane}\ \ E_p\ E_k\ E_r & = & E_k \\ \mathsf{kui}\ \mathsf{Roheline}\ E_p\ E_k\ E_r & = & E_r \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathsf{Punane} & \equiv \ldots \\ \mathsf{Kollane} & \equiv \ldots \\ \mathsf{Roheline} & \equiv \ldots \\ \mathsf{kui} & \equiv \ldots \end{array}$$

Astendamine

$$
\begin{aligned}
E^0 E' &\equiv E' \\
E^n E' &\equiv \underbrace{E(E(\ldots(E}_{n \text{ tükki}}\ E')\ldots))
\end{aligned}
$$

NB! $$E^n(E\ E') \equiv E^{n+1} E' \equiv E\ (E^n E')$$

Paarid

- Paarid

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{fst} & \equiv & \lambda p.\ p\ \mathsf{true} \\ \mathsf{snd} & \equiv & \lambda p.\ p\ \mathsf{false} \\ \mathsf{pair} & \equiv & \lambda x\ y\ f.\ f\ x\ y \end{array}$$

- Näide

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{fst}\ (\mathsf{pair}\ E_1\ E_2) & \equiv & (\lambda p.\ p\ \mathsf{true})\ (\mathsf{pair}\ E_1\ E_2) \\ & \to & \mathsf{pair}\ E_1\ E_2\ \mathsf{true} \\ & \twoheadrightarrow & (\lambda x\ y\ f.\ f\ x\ y)\ E_1\ E_2\ \mathsf{true} \\ & \to & \mathsf{true}\ E_1\ E_2 \\ & \equiv & (\lambda xy.\ x)\ E_1\ E_2 \\ & \twoheadrightarrow & E_1 \end{array}$$

Paarid ja ennikud

- Paarid

$$\begin{aligned}
\mathsf{fst} &\equiv \lambda p.\ p\ \mathsf{true} \\
\mathsf{snd} &\equiv \lambda p.\ p\ \mathsf{false} \\
\mathsf{pair} &\equiv \lambda x\ y\ f.\ f\ x\ y
\end{aligned}$$

- Ennikud

$$\begin{aligned}
(E_1, \ldots, E_n) &\equiv \mathsf{pair}\ E_1 (\mathsf{pair}\ \ldots (\mathsf{pair}\ E_{n-1}\ E_n) \ldots) \\
E \overset{n}{\downarrow} 1 &\equiv \mathsf{fst}\ E \\
E \overset{n}{\downarrow} 2 &\equiv \mathsf{fst}\ (\mathsf{snd}\ E) \\
&\ldots \\
E \overset{n}{\downarrow} i &\equiv \mathsf{fst}\ (\mathsf{snd}^{i-1} E) \\
&\ldots \\
E \overset{n}{\downarrow} n &\equiv \mathsf{snd}^{n-1}\ E
\end{aligned}$$

Näide

$$
\begin{array}{rcl}
(E_1, E_2, E_3) \overset{3}{\downarrow} 2 & \equiv & \mathsf{fst}\ (\mathsf{snd}\ (E_1, E_2, E_3)) \\
& \equiv & (\lambda p.\ p\ \mathsf{true})\ (\mathsf{snd}\ (E_1, E_2, E_3)) \\
& \rightarrow & \mathsf{snd}\ (E_1, E_2, E_3)\ \mathsf{true} \\
& \equiv & (\lambda p.\ p\ \mathsf{false})\ (\mathsf{pair}\ E_1\ (\mathsf{pair}\ E_2\ E_3))\ \mathsf{true} \\
& \twoheadrightarrow & (\mathsf{pair}\ E_1\ (\mathsf{pair}\ E_2\ E_3)\ \mathsf{false})\ \mathsf{true} \\
& \equiv & ((\lambda x\ y\ f.\ f\ x\ y)\ E_1\ (\mathsf{pair}\ E_2\ E_3)\ \mathsf{false})\ \mathsf{true} \\
& \twoheadrightarrow & \mathsf{false}\ E_1\ (\mathsf{pair}\ E_2\ E_3)\ \mathsf{true} \\
& \equiv & (\lambda xy.\ y)\ E_1\ (\mathsf{pair}\ E_2\ E_3\ \mathsf{true} \\
& \twoheadrightarrow & \mathsf{pair}\ E_2\ E_3\ \mathsf{true} \\
& \equiv & ((\lambda x\ y\ f.\ f\ x\ y))E_2\ E_3\ \mathsf{true} \\
& \twoheadrightarrow & \mathsf{true}\ E_2\ E_3 \\
& \equiv & (\lambda xy.\ x)\ E_2\ E_3 \\
& \twoheadrightarrow & E_2
\end{array}
$$

Ülesanne

Implementeerige kolmikute struktuur: konstruktor, fst, snd ja trd.

Spetsifikatsioon:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{fst}\ (E_1, E_2, E_3) & = & E_1 \\ \mathsf{snd}\ (E_1, E_2, E_3) & = & E_2 \\ \mathsf{trd}\ (E_1, E_2, E_3) & = & E_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (E_1, E_2, E_3) & \equiv \ldots \\ \mathsf{fst} & \equiv \ldots \\ \mathsf{snd} & \equiv \ldots \\ \mathsf{trd} & \equiv \ldots \end{array}$$

Naturaalarvud

- Standardnumbrid

$$
\begin{array}{lcllll}
\ulcorner 0 \urcorner & \equiv & \lambda x.\ x & (\equiv & \mathsf{I}) \\
\ulcorner n{+}1 \urcorner & \equiv & \mathsf{pair}\ \mathsf{false}\ \ulcorner n \urcorner & & \\
\mathsf{succ} & \equiv & \lambda n.\ \mathsf{pair}\ \mathsf{false}\ n & & \\
\mathsf{pred} & \equiv & \lambda n.\ n\ \mathsf{false} & (\equiv & \mathsf{snd}) \\
\mathsf{iszero} & \equiv & \lambda n.\ n\ \mathsf{true} & (\equiv & \mathsf{fst})
\end{array}
$$

Näide

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{succ}\ \ulcorner 2 \urcorner & \equiv & (\lambda n.\ \mathsf{pair}\ \mathsf{false}\ n)\ \ulcorner 2 \urcorner \\
 & \to & \mathsf{pair}\ \mathsf{false}\ \ulcorner 2 \urcorner \\
 & \equiv & \ulcorner 3 \urcorner
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{pred}\ \ulcorner 3 \urcorner & \equiv & (\lambda n.\ n\ \mathsf{false})\ \ulcorner 3 \urcorner \\
 & \to & \ulcorner 3 \urcorner\ \mathsf{false} \\
 & \equiv & \mathsf{pair}\ \mathsf{false}\ \ulcorner 2 \urcorner\ \mathsf{false} \\
 & \equiv & (\lambda x\ y\ f.\ f\ x\ y)\ \mathsf{false}\ \ulcorner 2 \urcorner\ \mathsf{false} \\
 & \twoheadrightarrow & \mathsf{false}\ \mathsf{false}\ \ulcorner 2 \urcorner \\
 & \equiv & (\lambda xy.\ y)\ \mathsf{false}\ \ulcorner 2 \urcorner \\
 & \twoheadrightarrow & \ulcorner 2 \urcorner
\end{array}
$$

Näide

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{iszero}\ \ulcorner 0 \urcorner & \equiv & (\lambda n.\ n\ \mathsf{true})\ \ulcorner 0 \urcorner \\
& \to & \ulcorner 0 \urcorner\ \mathsf{true} \\
& \equiv & (\lambda x.\ x)\ \mathsf{true} \\
& \to & \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{iszero}\ \ulcorner 2 \urcorner & \equiv & (\lambda n.\ n\ \mathsf{true})\ \ulcorner 2 \urcorner \\
& \to & \ulcorner 2 \urcorner\ \mathsf{true} \\
& \equiv & (\mathsf{pair}\ \mathsf{false}\ \ulcorner 1 \urcorner)\ \mathsf{true} \\
& \equiv & (\lambda x\ y\ f.\ f\ x\ y)\ \mathsf{false}\ \ulcorner 1 \urcorner\ \mathsf{true} \\
& \twoheadrightarrow & \mathsf{true}\ \mathsf{false}\ \ulcorner 1 \urcorner \\
& \equiv & (\lambda xy.\ x)\ \mathsf{false}\ \ulcorner 1 \urcorner \\
& \twoheadrightarrow & \mathsf{false}
\end{array}
$$

Naturaalarvud

- Liitmine (?!)

$$\mathrm{add} \quad = \quad \lambda x\ y.\ \mathrm{cond}(\mathrm{iszero}\ x)\ y\ (\mathrm{add}(\mathrm{pred}\ x)(\mathrm{succ}\ y))$$

Naturaalarvud

- Church'i numbrid

$$\underline{n} \quad \equiv \quad \lambda f\ x.\ f^n\ x$$

- Näited

$$\begin{array}{lcl} \underline{3} & \equiv & \lambda f\ x.\ f\ (f\ (f\ x)) \\ \underline{0} & \equiv & \lambda f\ x.\ x \\ \underline{8} & \equiv & \lambda f\ x.\ f\ (f\ (f\ (f\ (f\ (f\ (f\ (f\ x))))))) \end{array}$$

Naturaalarvud

- Tehted

$$\begin{array}{lcl} \underline{n} & \equiv & \lambda f\ x.\ f^n\ x \\ \mathsf{succ} & \equiv & \lambda n.\ \lambda f\ x.\ n\ f\ (f\ x) \\ \mathsf{iszero} & \equiv & \lambda n.\ n\ (\lambda x.\ \mathsf{false})\ \mathsf{true} \end{array}$$

- Näide

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{iszero}\ \underline{0} & \equiv & (\lambda n.\ n\ (\lambda x.\ \mathsf{false})\ \mathsf{true})\ (\lambda f\ x.\ x) \\ & \twoheadrightarrow & (\lambda f\ x.\ x)\ (\lambda x.\ \mathsf{false})\ \mathsf{true} \\ & \twoheadrightarrow & \mathsf{true} \end{array}$$

- Näide

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{iszero}\ \underline{2} & \equiv & (\lambda n.\ n\ (\lambda x.\ \mathsf{false})\ \mathsf{true})\ (\lambda f\ x.\ f\ (f\ x)) \\ & \twoheadrightarrow & (\lambda f\ x.\ f\ (f\ x))\ (\lambda x.\ \mathsf{false})\ \mathsf{true} \\ & \twoheadrightarrow & (\lambda x.\ \mathsf{false})\ ((\lambda x.\ \mathsf{false})\ \mathsf{true}) \\ & \twoheadrightarrow & \mathsf{false} \end{array}$$

Naturaalarvud

- Tehted

$$\begin{array}{lcl} \underline{n} & \equiv & \lambda f\ x.\ f^n\ x \\ \mathsf{succ} & \equiv & \lambda n.\ \lambda f\ x.\ n\ f\ (f\ x) \\ \mathsf{iszero} & \equiv & \lambda n.\ n\ (\lambda x.\ \mathsf{false})\ \mathsf{true} \\ \mathsf{add} & \equiv & \lambda m\ n.\ \lambda f\ x.\ m\ f\ (n\ f\ x) \end{array}$$

- Näide

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{add}\ \underline{2}\ \underline{1} & \equiv & (\lambda m\ n.\ \lambda f\ x.\ m\ f\ (n\ f\ x))\ \underline{2}\ \underline{1} \\ & \twoheadrightarrow & \lambda f\ x.\ \underline{2}\ f\ (\underline{1}\ f\ x) \\ & \twoheadrightarrow & \lambda f\ x.\ f\ (f\ (\underline{1}\ f\ x)) \\ & \twoheadrightarrow & \lambda f\ x.\ f\ (f\ (f\ x)) \\ & \equiv & \underline{3} \end{array}$$

- Korrutamine ja astendamine

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{mul} & \equiv & \lambda m\ n.\ \lambda f\ x.\ m\ (n\ f)\ x \\ \mathsf{exp} & \equiv & \lambda m\ n.\ \lambda f\ x.\ n\ m\ f\ x \end{array}$$

Ülesanne

Redutseeri term normaalkujule

$$\text{add}\ \underline{3}\ \underline{n}$$

Naturaalarvud

- Ühe lahutamine — abifunktsiooni spetsifikatsioon

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{prefn}\ f\ (\mathsf{true}, x) & = & (\mathsf{false}, x) \\
\mathsf{prefn}\ f\ (\mathsf{false}, x) & = & (\mathsf{false}, f\ x) \\
(\mathsf{prefn}\ f)^n\ (\mathsf{false}, x) & = & (\mathsf{false}, f^n\ x)) \\
(\mathsf{prefn}\ f)^n\ (\mathsf{true}, x) & = & (\mathsf{false}, f^{n-1}\ x)
\end{array}$$

- Ühe lahutamine — definitsioon

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{prefn} & \equiv & \lambda f\ p.\ (\mathsf{false}, (\mathsf{cond}\ (\mathsf{fst}\ p)\ (\mathsf{snd}\ p)\ (f\ (\mathsf{snd}\ p)))) \\
\mathsf{pred} & \equiv & \lambda n.\ \lambda f\ x.\ \mathsf{snd}\ (n\ (\mathsf{prefn}\ f)\ (\mathsf{true}, x))
\end{array}$$

- Näide

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{pred}\ \underline{n}\ f\ x & \twoheadrightarrow & \mathsf{snd}\ (\underline{n}\ (\mathsf{prefn}\ f)\ (\mathsf{true}, x)) \\
& \twoheadrightarrow & \mathsf{snd}\ ((\mathsf{prefn}\ f)^n\ (\mathsf{true}, x)) \\
& \twoheadrightarrow & \mathsf{snd}\ (\mathsf{false}, f^{n-1}\ x) \\
& \twoheadrightarrow & f^{n-1}\ x
\end{array}$$

Listid

- Definitsioon

$$
\begin{array}{lcll}
\mathsf{nil} & \equiv & \lambda z.\ z & (\equiv \quad \mathsf{I}) \\
\mathsf{cons} & \equiv & \lambda x\ y.\ (\mathsf{false}, (x, y)) & \\
\mathsf{null} & \equiv & \lambda z.\ z\ \mathsf{true} & (\equiv \quad \mathsf{fst}) \\
\mathsf{hd} & \equiv & \lambda z.\ \mathsf{fst}\ (\mathsf{snd}\ z)) & \\
\mathsf{tl} & \equiv & \lambda z.\ \mathsf{snd}\ (\mathsf{snd}\ z)) &
\end{array}
$$

- Näide

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{null}\ \mathsf{nil} & \equiv & \mathsf{fst}\ (\lambda z.\ z) \\
& \equiv & (\lambda p.\ p\ \mathsf{true})\ (\lambda z.\ z) \\
& \twoheadrightarrow & \mathsf{true}
\end{array}
$$

Listid

- Näide

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{null}\ (\mathsf{cons}\ x\ xs) & \equiv & \mathsf{fst}\ ((\lambda x\ y.\ (\mathsf{false}, (x, y)))\ x\ xs) \\ & \twoheadrightarrow & \mathsf{fst}\ (\mathsf{false}, (x, xs)) \\ & \twoheadrightarrow & \mathsf{false} \end{array}$$

- Näide

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{hd}\ (\mathsf{cons}\ x\ xs) & \equiv & \mathsf{hd}\ ((\lambda x\ y.\ (\mathsf{false}, (x, y)))\ x\ xs) \\ & \twoheadrightarrow & \mathsf{hd}\ (\mathsf{false}, (x, xs)) \\ & \equiv & (\lambda z.\ \mathsf{fst}\ (\mathsf{snd}\ z)))\ (\mathsf{false}, (x, xs)) \\ & \twoheadrightarrow & \mathsf{fst}\ (\mathsf{snd}\ (\mathsf{false}, (x, xs))) \\ & \twoheadrightarrow & \mathsf{fst}\ (x, xs) \\ & \twoheadrightarrow & x \end{array}$$

Püsipunktid

- Termi M nimetatakse *püsipunktikombinaatoriks* kui

$$\forall F.\ M\,F = F\,(M\,F)$$

- Curry "paradoksaalne" kombinaator

$$\mathrm{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(x\,x))\,(\lambda x.f(x\,x))$$

- Kombinaator Y on püsipunktikombinaator

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Y}\,e & \to_\beta & (\lambda x.e(x\,x))\,(\lambda x.e(x\,x)) \\ & \to_\beta & e((\lambda x.e(x\,x))\,(\lambda x.e(x\,x))) \\ & =_\beta & e\,(\mathrm{Y}\,e) \end{array}$$

Püsipunktid

- "Tugev" püsipunkti kombinaator

$$\Theta \equiv (\lambda xy.\ y(xxy))\,(\lambda xy.\ y(xxy))$$

- Püsipunktikombinaatoreid saab kasutada rekursiivsete funktsioonide defineerimiseks.
- Näide:

$$\begin{aligned}\mathrm{add} &= \lambda x\ y.\ \mathrm{cond}\,(\mathrm{iszero}\ x)\ y\ (\mathrm{add}(\mathrm{pred}\ x)(\mathrm{succ}\ y)) \\ \mathrm{add} &\equiv \mathrm{Y}\,(\lambda f\ x\ y.\ \mathrm{cond}\,(\mathrm{iszero}\ x)\ y\ (f\,(\mathrm{pred}\ x)(\mathrm{succ}\ y)))\end{aligned}$$

Näide

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{add}\ 1\ 2 & \equiv & Y\ (\lambda f\ x\ y.\, \mathsf{cond}\,(\mathsf{iszero}\ x)\ y\ (f\,(\mathsf{pred}\ x)(\mathsf{succ}\ y)))\ \ulcorner 1 \urcorner\ \ulcorner 2 \urcorner \\
 & \twoheadrightarrow & (\lambda x\ y.\, \mathsf{cond}\,(\mathsf{iszero}\ x)\ y\ (Y\ (\ldots)\ (\mathsf{pred}\ x)(\mathsf{succ}\ y)))\ \ulcorner 1 \urcorner\ \ulcorner 2 \urcorner \\
 & \twoheadrightarrow & \mathsf{cond}\,(\mathsf{iszero}\ \ulcorner 1 \urcorner)\ \ulcorner 2 \urcorner\ (Y\ (\ldots)\ (\mathsf{pred}\ \ulcorner 1 \urcorner)(\mathsf{succ}\ \ulcorner 2 \urcorner))) \\
 & \twoheadrightarrow & Y\ (\ldots)\ (\mathsf{pred}\ \ulcorner 1 \urcorner)(\mathsf{succ}\ \ulcorner 2 \urcorner) \\
 & \twoheadrightarrow & (\lambda x\ y.\, \mathsf{cond}\,(\mathsf{iszero}\ x)\ y\ (\ldots))\ (\mathsf{pred}\ \ulcorner 1 \urcorner)(\mathsf{succ}\ \ulcorner 2 \urcorner) \\
 & \ldots & \\
 & \twoheadrightarrow & \mathsf{succ}\ \ulcorner 2 \urcorner
\end{array}
$$