Algoritmid ja andmestruktuurid
Ülesandeid

Jüri Kiho

29. veebruar 2000. a.

1 Funktsiooni asümptootiline hinnang

1. Tõestada omadused 1^0 – 9^0 ([1], lk 13).

2. Näidata, et kui k on nullist erinev konstant, siis $kf(n)$ on $\Theta(f(n))$.

3. Millised O-relatsiooni omadustest ([1], lk 13) kehtivad ka Θ-relatsiooni kohta? Tõestada need Θ-relatsiooni omadused.

4. Näidata, et tabeli [[1], lk. 10, joonis 2.2] esimeses veerus iga funktsioon on O talle järgnevast funktsioonist ega ole O talle eelnevast funktsioonist.

5. Näidata, et $12n \log n - 120 \log n$ on $\Omega(n \log n)$.

6. Näidata, et $12n \log n + 120 \log n$ on $\Omega(n \log n)$.

7. Näidata, et $\log_3 n + \sqrt{n}$ on $\Theta(\sqrt{n})$.

8. Näidata, et $1500n + n \log n$ on $\Theta(n \log n)$.

9. Leida võimalikult lihtne Θ-hinnang funktsioonile $2n^2 + 3(\log n)^3$.

10. Leida võimalikult lihtne Θ-hinnang funktsioonile $3n^2 + 5n \log n^5$.

$\star\ i = 1 \ldots n$

$\star\ k = 1 \ldots i$

$[\star\ (j = 1 \ldots 10)\ S$

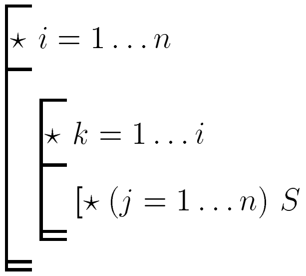
Joonis 1: Kolmekordne tsükkel I.

2 Algoritmi ajaline keerukus

1. Hinnata joonistel 1 ja 2 esitaud algoritmide ajalist keerukust, kui alamalgoritmi S ajaline keerukus on $O(1)$
2. Kirjutada mitterekursiivne algoritm, mis kontrollib, kas antud sõnes kõik sümbolid on paarikaupa erinevad. Hinnata selle algoritmi ajalist keerukust.
3. Kirjutada rekursiivne algoritm järjendi summa leidmiseks, mis jagab järjendi neljaks enam-vähem võrdseks osaks ja siis tagastab nende osade summade summa. Hinnata selle algoritmi ajalist keerukust põhiteoreemi kasutades.
4. Hinnata algoritmi ajalist keerukust, kui lahendusaeg T avaldub kujul $T(n) = 9T(n/3) + n$.
5. Hinnata algoritmi ajalist keerukust, kui lahendusaeg T avaldub kujul $T(n) = 2T(n/2) + n^2$.

3 Puu ja kahendpuu

1. Kirjutada mingi 12-tipuline puu vasaku ja parema suluesitusena ning vastava kahendpuu tippude loetelu ees- ja keskjärjestuses.
2. Puu P on antud vastava kahendpuuna T;



Joonis 2: Kolmekordne tsükkel II.

(a) kirjutada algoritm, mis iga tipu x-väljale omistab sellest tipust algava alampuu kõrguse puus P;

(b) kirjutada algoritm, mis iga tipu x-väljale omistab selle tipu tasemenumbri puus P;

(c) kirjutada algoritm, mis iga tipu x-väljale omistab sellest tipust algava alampuu juure astme, st. tema alampuude arvu puus P.

3. Kirjutada puu joonistamise algoritm, kui puu on antud vastava kahendpuuna. Eeldatakse, et iga tipu (t) korral on antud selle tipu koordinaadid joonisel, vastavalt väljadel $t.x$ ja $t.y$; olemas on protseduurid $joonistadaTipp(tipp)$ ja $joonistadaServ(tipp, tipp)$.

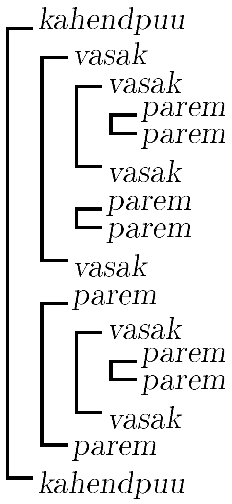
4 Kahendotsimise puu

1. Konstrueerida võimalikult madal kahendpuu, mille tippudeks on sümbolid Teie ees- ja perekonnanimest ning mille tippude keskjärjestus annaks Teie ees- ja perekonnanime.

2. Lisada eelmises ülesandes konstrueeritud kahendpuu tippudele paarikaupa erinevad arvulised võtmed nii, et moodustuks kahendotsimise puu nende võtmete järgi. Joonistada kahendotsimise puu, mis on saadud sellest puust juurtipu eemaldamisel.

3. Joonistada

(a) 11-tipuline AVL-puu;



Joonis 3: Kahendpuu struktuur.

   (b) AVL-puu, mis saadakse sellest pärast juurtipus oleva kirje eemaldamist.

4. Joonisel 3 kujutatud kahendpuu struktuurile vastavalt

   (a) joonistada see kahendpuu;

   (b) lisada üks tipp ja kirjutada igasse tippu võtmeväärtus nii, et saadud puu T' oleks AVL-puu;

   (c) joonistada kahendotsimise puu T'', mis on saadud puust T' juurtipu kirje eemaldamisel;

   (d) tasakaalustada puu T''.

5. Esitada näide AVL-puu tasakaalustamisest kahekordse pöördega.

6. AVL-puust tipu eemaldamisel saadi tasakaalustamata puu, mille kõik lehed on samal tasemel;

   (a) joonistada sellise puu näide;

   (b) tasakaalustada see puu;

   (c) joonistada saadud kahendpuule vastav harilik puu (mets).

7. AVL-puust tipu eemaldamisel saadi tasakaalustamata puu, mille kõik lehed on eri tasemetel;

   (a) joonistada sellise puu näide;

   (b) tasakaalustada see puu;

   (c) joonistada saadud kahendpuule vastav harilik puu (mets).

5 B-puu

1. Alltoodud üheksandat järku B-puu fragmendis
   a) täita tühjad võtmekohad sobivate väärtustega;
   b) kirjeldada, kuidas eemaldatakse 167;
   c) joonistada pärast eemaldamist saadud fragment.

6 Järjestikpaigutus ja seotud paigutus

1. Esitada magasini realisatsioon massiivina.

2. Esitada magasini realisatsioon päisega lihtahelana.

3. Esitada järjekorra realisatsioon massiivina.

4. Esitada järjekorra realisatsioon päisega lihtahelana.

5. Esitada hulkliikme realisatsioon päisega ringahelana, kus põhioperatsiooniks on hulkliikmete liitmine.

6. Kirjeldada "hõreda" maatriksi kujutamist ristahelatena.

7 Paisksalvestus

1. Joonistada 7-realine paisktabel pärast tabelis antud kirjete lisamist topeltpaiskamise meetodil (tabelis toodud järjekorras), kasutades paiskfunktsiooni h ja teisese paiskfunktsiooni h_1 tabelis antud väärtusi.

Nr.	k	$info$	$h(k)$	$h_1(k)$
1.	785	Mart Must	1	6
2.	750	Sulev Sinine	0	1
3.	613	Peeter Punane	3	2
4.	801	Vello Valge	1	5
5.	730	Rein Roosa	3	2

8 Kahendkuhi

1. Kirjutada kuhjastamise algoritm, milles rakendatatakse alamalgoritmi *viia_üles* [1].

2. Kirjutada rekursiivne algoritm antud massiivi kuhjastamiseks ülesviimist kasutades.

3. Kirjutada mitterekursiivne algoritm antud massiivi kuhjastamiseks ülesviimist kasutades.

4. Kirjutada rekursiivne algoritm kahendkuhjana antud massiivi sorteerimiseks mittekahanevalt.

5. Kirjutada algoritm sellise kirje võtmiseks kahendkuhjast, mille võti on suuruselt teine.

6. Kirjutada algoritm järgmise ülesande lahendamiseks: kui antud kahendkuhi ei ole täielik kahendpuu, siis eemaldada viimasel tasemel olevad tipud.

7. Kirjutada algoritm järgmise ülesande lahendamiseks: eemaldada antud kahendkuhjast tipud, mis asuvad $\lfloor h/3 \rfloor$ viimasel tasemel, kus h on kahendkuhja kõrgus.

9 Binomiaalpuu. Binomiaalkuhi

1. Mitu tippu on binomiaalpuus, mille kõrgus on 8.

2. Mitmendat järku binomiaalpuudest koosneb 168-kirjeline binomiaalkuhi?

3. Arvutage n=(Teie sünniaasta)+(Teie sünnikuu)+ (Teie sünnipäev kuus). Millist järku binomiaalpuud esinevad n-kirjelises binomiaalkuhjas?

4. Joonistada binomiaalkuhi,

   (a) milles on kirjed võtmetega $1, 2, \ldots, 23$;

   (b) milles on kirjed võtmetega $1, 2, \ldots, 26$;

   (c) mis saadakse eelmises alamülesandes (b) tehtud kuhjast suurima puu juurtipu eemaldamisel.

5. Joonistada binomiaalkuhi, milles on 13 kirjet ja vähima võtmeväärtusega kirje asub juurahela suurima astmega tipus;

   (a) kirjeldada, kuidas toimub vähima võtmeväärtusega kirje võtmine sellest binomiaalkuhjast;

   (b) joonistada pärast vähima võtmeväärtusega kirje võtmist saadud binomiaalkuhi.

10 Sorteerimine

1. Kirjutada pistemeetodi rekursiivne algoritm.

2. Olemas on protseduur
   $piste(k, m)$
   Antud: (globaalsena) massiiv $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
   indeksid k, m, $1 \leq k \leq m \leq n$
   Tulemus: element a_m pistetud kohale k massiivis a

   (a) Kirjutada kahendpistemeetodi rekursiivne algoritm globaalsena antud massiivi a sorteerimiseks, mis kasutab protseduuri $piste()$ ja milles pistekoha otsimine toimub vastava funktsiooni abil.

   (b) Kirjutada vastav mitterekursiivne pistekoha otsimise algoritm.

   (c) Kirjutada vastav mitterekursiivne pistekoha otsimise algoritm.

3. Üliõpilaste arv teaduskonnas on $n < 500$. Üliõpilaste kirjed tuleb sorteerida võtme (1000×(sünniaasta -1900)+ 100×sünnikuu + (sünnipäev kuus)) järgi. Kumb sorteerimismeetoditest, kas loendamismeetod või kimbumeetod, on eelistatavam? Miks?

4. Ühe aastakäigu kutsealuste arv on $n > 5000$. Kutsealuste kirjed tuleb sorteerida võtme (100×sünnikuu + (sünnipäev kuus)) järgi. Kumb sorteerimismeetoditest, kas loendamismeetod või kimbumeetod, on eelistatavam? Miks?

11 Sõnetöötlus

1. Leida prefiksfunktsiooni väärtused sõne $s =$ $'aaaaab'$ jaoks.

2. Konstrueerida sõne, mille prefiksfunktsiooni väärtusteks on 0 1 0 1 2 3 0 1 2 3 4 0.

3. Loendada, mitu korda võrreldakse sümboleid eelmises ülesandes antud sõne s esinemise otsimisel tekstis $t =$ $'aaaabaaaaaabab'$
   a) Knuth-Morris-Pratti algoritmis (prefiksfunktsiooni leidmist arvestamata);
   b) lihtsas otsimisalgoritmis (joonis 6.1).
   Soovitus: teksti t alla järgnevatesse ridadesse kirjutage otsisõne s sobiva nihkega; otsisõnes kriipsutage alla vastaval sammul võrdlemisele tulevad sümbolid.

4. Antud sõnepaaride s ja t jaoks konstrueerida maatriks c vastavalt algoritmile *kavandada* (konspektis [1] lk. 79). Kriipsutada alla c elemendid, mis vaadatakse läbi nende sõnede pikima ühissõne leimisel.

   (a) s = 'aabcbdba'; t = 'abbdcbba'

   (b) s = 'aabcbdbaa'; t = 'abbdcbba'

   (c) s = 'aabcbdbaab'; t = 'abbdcbab'

   (d) Sõne s saamiseks kirjutage oma ees- ja perekonnanimi järjestikku, ilma tühikuteta ja ainult väiketähtedega, ning võtke sellest 10 esimest tähte. Kui tähti oli vähem kui 10, siis lisage lõppu vajalik arv algusest võetud tähti. Näiteks, Jüri Kiho jaoks s = "jürikihojü". Sõne t saate sõne s transponeerimisel (sõne s tähed vastupidises järjekorras). Näiteks, Jüri Kiho jaoks t = "üjohikirüj".

12 Graafitöötlus

1. Kirjutada graafi sügavuti läbimisel põhinev algoritm, mis leiab kõik tipud antud graafis $G = (V, E)$, mis on saavutatavad antud tipust $a \in V$.

2. Sõnastada üks originaalne graafitöötlusülesanne, mille lahendamine võiks põhineda graafi sügavuti läbimisel.

3. Kirjutada eelmises ülesandes sõnastatud graafitöötlusülesande lahendusalgoritm.

4. Kirjutage graafi sügavuti läbimise skeemil põhinev algoritm antud tippude a ja b vaheliste kõigi teede väljastamiseks (st. nendel teedel esinevate tippude nimede trükkimiseks).

5. Olgu antud geograafiliste punktide graaf, mille iga kaarega (x, y) on seotud väli $(x, y).l$ – langus liikumisel punktist x punkti y. *Ohutuimaks teeks* kahe punkti vahel nimetatakse sellist teed, millel suurim lokaalne langus (punktist järgmisse punkti) on minimaalne. Kirjutada graafi laiuti läbimise algoritm, mille käigus leitakse ohutuim tee antud punktist a antud punkti b.

Joonis 4: Orinteerimata graaf.

6. Olgu antud geograafiliste punktide graaf, mille iga tipuga on seotud väli $.h$ – vastava punkti kõrgus merepinnast.

   (a) Kirjutada graafi laiuti läbimise algoritm, mille käigus leitakse selline tee antud punktist a antud punkti b, mis läheb läbi võimalikult kõrge punkti.

   (b) Kirjutada graafi sügavuti läbimise rekursiivne algoritm, mis kontrollib, kas kahe antud punkti vahel leidub samakõrgustee, st. tee, millel asuvad punktid on kõik ühe ja sama kõrgusega.

   (c) Kirjutada graafi laiuti läbimisel põhinev algoritm järgmise ülesande lahendamiseks. Antud on geograafiline graaf $G = (V, E)$, mille iga tipuga (asulaga) $v \in V$ on seotud suurus $v.h$ (asula kõrgus merepinnast). Leida selline tee antud tipust a antud tippu b, mille kõrgeim tipp on võimalikult madalal.

7. Leida joonisel 4 kujutatud graafi minimaalne toes Kruskali meetodil, kirjutades seejuures üles ka igal sammul tekkivad tipuklassid.

8. Eeldades, et kaarepikkus graafis võib olla ka negatiivne, konstrueerige lihtne graaf, milles tipp b on küll saavutatav tipust a, kuid ei leidu lühimat teed tipust a tippu b.

9. Selgitage, kas Dijkstra algoritm on/pole rakendatav juhul, kui kaarepikkused võivad olla ka negatiivsed.

13 Planimeetria

1. Kirjutada algoritm kontrollimaks punkti kuuluvust kolmnurka.

2. Kirjutada algoritm kontrollimaks punkti kuuluvust nelinurka.

3. Eeldusel, et on olemas loogiline funktsioon $kuulub\_kolmurka(punkt, A, B, C)$, kus A, B, C on kolmurga tipud, kirjutage algoritm punkti nelinurka kuulumise kontrollimiseks. (Nelinurk ei pruugi olla kumer).

4. Eeldusel, et on olemas loogiline funktsioon $kuulub\_kolmurka(punkt, A, B, C)$, kus A, B, C on kolmurga tipud, kirjutage lineaarse keerukusega algoritm punkti kumerasse hulknurka kuulumise kontrollimiseks.

5. Kirjutada algoritm järgmise ülesande lahendamiseks.
   Antud on neli punkti ($p1$, $p2$, $p3$, $p4$) tasandil. Analüüsida tuleb kinnist murdjoont $M = p1$-$p2$-$p3$-$p4$-$p1$.
   Tulemus: tagastatakse
   0, kui M ei ole nelinurk,
   1, kui M on mittekumer nelinurk,
   2, kui M on trapets,
   3, kui M on rööpkülik.

6. Kirjutada lihtne ($O(n)$) algoritm, mis antud punktihulgast elimineerib kumerasse kattesse mittekuuluvaid punkte. Alamalgoritmina võib kasutada eelmises ülesandes koostatud algoritmi.

7. Kirjutada detailne algoritm kontrollimaks punkti kuuluvust hulknurka, kui hulknurga tipud on antud r i n g a h e l a n a (loomulikus järjekorras).

8. Olgu punkti hulknurka kuulumise praktilise ülesande korral teada, et vaadeldavate punktide koordinaadid ei ole absoluutväärtuselt suuremad kui 999. Kas algoritmis *punkt_hulknurgas* (vt.99 [1] lk. 99) võib siis alamalgoritmi *lõikumine* asemel kasutada joonisel 5 toodud algoritmi *lõikuvad*? Põhjendada oma arvamust.

14 Algoritmi korrektsus

1. Tõestada joonistel 6 – 10 esitatud algoritmide korrektsus

lõikuvad(p, q)

- - - *Antud: lõik otspunktidega* p *ja* q *ning (globaalsena) horisontaalne*

- - - *kontrolllõik otspunktidega* t *ja* $(1000, t.y)$

- - - *Tulemus: tagastatakse 1, kui antud lõikudel leidub ühine punkt, muidu 0*

$p.y = q.y$ **?**

- - - *lõik* $p \ldots q$ *on horisontaalne (või* $p = q$*)*

$\longleftarrow (p.y = t.y)$

- - - *lõik* $p \ldots q$ *ei ole horisontaalne ning asub sirgel* s *võrrandiga*

- - - $X := (p.x - q.x) \times (Y - q.y)/(p.y - q.y) + q.x$

$k := (p.x - q.x) \times (t.y - q.y)/(p.y - q.y) + q.x$

- - - k *on lõikudele vastavate sirgete lõikepunkti abstsiss, st.*

- - - *sirgel* s *asuva sellise punkti abstsiss, mille ordinaat on* $t.y$

$\longleftarrow (t.x \leq k \leq 1000 \wedge (p.x \leq k \leq q.x \vee q.x \leq k \leq p.x))$

lõikuvad(p, q)

Joonis 5: Lõikumise erikontroll.

- - - $\sqrt[3]{3} \le n^m \le \sqrt[2]{3}$
$m := 1 - m$
$n := n + 1$
$\alpha := 1 - 2n$
$b := 1 + \cos^2 \alpha$
$b := b - \log_3 (n^2 + \alpha) + sin^2\alpha - 2$
$x := \log_3 (n^2 + \alpha)^2$
$y := mb$
$x := x + 2y$
$x := x/2$
- - - $0,5 \le x \le 1$

Joonis 6: Lineaarne algoritm.

- - - $0 \le k < n$
$m := k + 1$
$t := m + 1$
$t \le n$ **?**
$m := m * t$
$t := t + 1$
- - - $m = \dfrac{n!}{k!}$

Joonis 8: Faktoriaalide jagatis.

- - - $0,5 \le a \le 0,7$ *ja*
- - - $0,5 \le \log_3 n \le 0,7$
$n := n + 1$
$\alpha := 1 - 2n$
$a := 1 - a$
$b := 2 + \cos^2 \alpha$
$b := b - \log_3 (n^2 + \alpha) + sin^2\alpha - 3$
$x := \log_3 (n^2 + \alpha)^2$
$y := ab$
$x := x + 2y$
$x := x/2$
- - - $0,5 \le x \le 1$

Joonis 7: Lineaarne algoritm.

- - - $n > 5$
$m := 6$
$t := 7$
$t \le n$ **?**
$m := m * t$
$t := t + 1$
$m := m \times 120$
- - - $m = n!$

Joonis 9: Suurem faktoriaal.

- - - $n > 5$
$s := 0.5$
$k := 2$
$k < n$ **?**
$m := k + 1$
$s := s + \dfrac{1}{km}$
$k := m$
- - - $s = 1 - \dfrac{1}{n}$

Joonis 10: Lihtmurdude summa.

15 Varia

1. Defineerida tõenäosuslik algoritm.
2. Millistest osadest koosneb andmestruktuuri algebraline spetsifikatsioon?

Viited

[1] J. Kiho. Algoritmid ja andmestruktuurid. Tartu, 1997. 124 lk.