Maxwelli võrrandid

Valter Kiisk

21. veebruar 2024. a.

Sisukord

1 Sissejuhatus

Üks fundamentaalseid interaktsioone looduses on *elektromagnetiline vastasmõju*, mis avaldub *elektriliselt laetud* kehade vahel. Isegi vaid elektrostaatilisi ja magnetostaatilisi nähtuseid uurides on võimalik jõuda oletuseni, et ka valgus on olemuslikult elektromagnetiline nähtus.

Eeldagem, et me oleme õppinud mõõtma (lisaks mehaanikalistele suurustele) elektrilaengu suurust q ja elektrivoolu tugevust I. Siis võib katsetega tuvastada mitmesuguseid empiirilisi seaduspärasid elektromagnetiliste jõudude tugevuse kohta. Näiteks selgub, et kahe punktikujulise laetud keha vahel mõjub jõud, mis sõltub nende laengute suurustest q_1, q_2 ja vahekaugusest r järgmiselt:

$$F = k_\mathrm{e}\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{1.1}$$

Jõukonstant k_e sõltub muidugi mõõtühikute süsteemi valikust. Samuti võib uurida elektrivooluga juhtide vahel mõjuvaid (magnet)jõude. Näiteks, kui meil on kaks pikka paralleelset sirgjuhet, siis nende vahel mõjuv jõud pikkusühiku kohta

$$\frac{F}{L} = 2k_\mathrm{m}\frac{I_1 I_2}{r}. \tag{1.2}$$

Jällegi tuli sisse tuua vastav jõukonstant. Kui nende jõukonstantide väärtused katseliselt kindlaks teha (kooskõlalises mõõtühikute süsteemis), siis selgub, et $\sqrt{k_\mathrm{e}/k_\mathrm{m}} \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, mis on juhtumisi võrdne valguse kiirusega.

2 Maxwelli võrrandid

Valemid 1.1 ja 1.2 väljendavad vaid empiirilisi seaduspärasid spetsiifiliste olukordade jaoks. Lisaks on teada Faraday induktsiooniseadus jm eksperimentaalsed tähelepanekud. Need seosed võib väljendada vastavate *väljade* kaudu, mis eeldatavasti vahendavad elektromagnetilist vastasmõju. *Elektrivälja tugevus* $\boldsymbol{E}$ on ühikulisele laengule mõjuv jõud ja *magnetiline induktsioon* $\boldsymbol{B}$ on ühikulise pikkusega ja ühikulist voolutugevust kandvale juhtmelõigule mõjuv jõud. Täpsemalt võib need defineerida *Lorentzi jõu* kaudu, mis mõjub laengule q:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},$$

kus $\boldsymbol{v}$ on osakese kiirus ja operaator $\times$ tähistab vektorkorrutist.[1]

Kõik need seosed ei moodusta siiski veel terviklikku füüsikalist teooriat. Klassikalise elektrodünaamika alusvõrrandeiks on *Maxwelli võrrandid* (koos Lorentzi jõu avaldisega). Nagu muudeski füüsika valdkondades, neid alusvõrrandeid ei ole võimalik otseselt tuletada, vaid need tuleb "ära mõistatada" empiiriliste teadmiste sobiva üldistamise teel.

Vaatleme näitena esimese Maxwelli võrrandi leidmist, kus lähtekohaks on Coulomb'i seadus 1.1. Selle baasil võime oletada, et elektrilaeng q (koordinaatide alguspunktis) tekitab ruumipunktis koordinaatidega $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ elektrivälja tugevusega

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}. \tag{2.1}$$

Siin ja edaspidi kasutame SI mõõtühikute süsteemi, kus Coulomb'i konstant kirjutatakse kujul $1/(4\pi\varepsilon_0)$, kus $\varepsilon_0 =$

[1] Vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ *vektorkorrutiseks* $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ nimetatakse vektorit, mis on risti mõlema algse vektoriga ja mille moodul on $ab\sin\theta$, kus θ on nurk vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ vahel. Kui esimest vektorit ($\boldsymbol{a}$) pöörata mõtteliselt vektori ($\boldsymbol{b}$) poole (mööda väiksemat nurka θ), siis vektorkorrutise suuna annab paremakäelise kruvi liikumise suund.

$8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m (vaakumi dielektriline läbitavus).[2] Ühikvektorit tähistame "katusega" vektori märgi kohal (seega $\hat{\boldsymbol{r}}$ on raadiusvektori suunaline ühikvektor).

Niisiis väljatugevus kahaneb nagu kauguse ruut. Samas teame, et sfääri pindala jällegi kasvab nagu kauguse (raadiuse) ruut. Veelgi enam, kujutame ette, et laengust lähtuvad elektrivälja radiaalsed jõujooned ja seega välja *voog* (jõujoonte arv) läbi mistahes kinnise pinna ei tohiks sõltuda selle pinna kujust. Nii et ümbritseme laengu kinnise pinnaga Σ ja arvutame vektori $\boldsymbol{E}$ voo läbi selle pinna:

$$\oint_\Sigma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_\Sigma \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{S}}{r^2}.$$

Operaator $\cdot$ vektorite vahel tähistab skalaarkorrutamist.[3] Seega $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{S}$ annab pinnaelemendi $d\boldsymbol{S}$ pindala projektsiooni raadiusvektoriga ristuvale tasandile ja järelikult suhe $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{S}/r^2$ on ruuminurk $d\Omega$, millele see pinnaelement toetub.[4] Seega

$$\oint_\Sigma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

sest kogu ruuminurk on 4π steradiaani. Tulemus ei sõltu ilmselt pinna Σ valikust. Saadud avaldis on sisult ekvivalentne seadusega 2.1. Nüüd postuleerime (eeldades superpositsiooniprintsiipi), et see seadus kehtib mistahes elektrilaengute paigutuse korral ruumis. Seejuures integraali panustavad muidugi vaid need laengud q_i, mis asuvad pinna Σ sees:

$$\oint_\Sigma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i.$$

Viimaks postuleerime, et saadud võrdus kehtib alati, ükskõik kas laengud ja väljad on statsionaarsed või mitte. See ongi üks Maxwelli võrrandeist, väljendatuna integraalsel kujul (nn *Gaussi lause*). Enamikel juhtudel eelistatakse füüsika põhivõrrandeid siiski diferentsiaalsel kujul. Selle saamiseks rakendame viimast võrdust tillukesele risttahukakujulisele ruumipiirkonnale mõõtmetega $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ ruumipunkti (x, y, z) ümbruses. Kuna risttahukas on väike, siis kõigi kuue pinna ulatuses loeme välja normaalkomponendid konstantseiks, nii et välja voog on ligikaudu summa

$$\begin{aligned}
&- E_x(x,y,z)\Delta y\Delta z + E_x(x+\Delta x,y,z)\Delta y\Delta z \\
&\quad - E_y(x,y,z)\Delta x\Delta z + E_y(x,y+\Delta y,z)\Delta x\Delta z \\
&\qquad - E_z(x,y,z)\Delta x\Delta y + E_z(x,y,z+\Delta z)\Delta x\Delta y
\end{aligned}$$

Diferentsiaalarvutuse kontekstis eeldame muidugi ka seda, et elektrilaeng on jaotunud ruumis pidevalt ja seda karakteriseerib *laengutihedus* ρ (mis on üldiselt nii ruumikoordinaatide kui ka aja funktsioon). Jällegi, selle väikese risttahuka ulatuses on $\rho \approx \text{Const}$. Seega kogulaeng vaadeldavas väikeses ruumiosas on $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$. Kokkuvõttes omandab Gaussi lause kuju

$$\begin{aligned}
&[E_x(x+\Delta x,y,z) - E_x(x,y,z)]\Delta y\Delta z \\
&\quad + [E_y(x,y+\Delta y,z) - E_y(x,y,z)]\Delta x\Delta z \\
&\quad + [E_z(x,y,z+\Delta z) - E_z(x,y,z)]\Delta x\Delta y \\
&\qquad \approx \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\Delta x\Delta y\Delta z.
\end{aligned}$$

Jagades läbi ruumalaga $\Delta x\Delta y\Delta z$, saame piiril $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

mis ongi Gaussi lause diferentsiaalkuju.

Kuna ruum on kolmemõõtmeline, siis saadud võrrandis on esindatud välja osatuletised kõigi kolme ruumikoordinaadi suhtes. Osutub, et seda laadi ruumiliste tuletiste kombinatsioone esineb füüsika võrrandites sageli. Et selliste tuletisoperatsioonidega mugavamalt toimetada, on kasutusele võetud vektoroperaator *nabla*:

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z},$$

kus $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ ja $\hat{\boldsymbol{z}}$ tähistavad vastavate koordinaattelgede suunalisi ühikvektoreid. Käsitledes operaatorit $\boldsymbol{\nabla}$ formaalselt kui vektorit (mis allub vektoralgebra reeglitele), on sellega võimalik teostada kolme tüüpi diferentsiaaloperatsioone. Rakendamisel skalaarsele väljale $u(x, y, z)$ saadakse *gradient*:[5]

$$\boldsymbol{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}.$$

Seevastu vektorväljale $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ on seda võimalik rakendada kahel erineval viisil: skalaar- või vektorkorrutise mõttes. Tulemust nimetatakse vastavalt *divergentsiks* ja *rootoriks*:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \\
\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{z}}.
\end{aligned}$$

Nimetatud erinevad tuletisoperatsioonid on ka mingil määral omavahel seotud ja saab näidata, et kehtivad järgmised samasused (mida meil läheb edaspidi tarvis):

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}, \qquad (2.2)$$

[2] Kuivõrd $k_\mathrm{e}/k_\mathrm{m} = c^2$, siis vaid üks jõukonstantidest on vabalt valitav. Gaussi elektriühikute süsteemis võetakse $k_\mathrm{e} = 1$. Seevastu SI süsteemis võeti aluseks olemasolev, praktikas mugav voolutugevuse ühik "amper", mis oli defineeritud jõu 1.2 kaudu. Selle tulemusena $k_\mathrm{m} = 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$ (täpselt) ja $k_\mathrm{e} \approx 8{,}99 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$. Avaldiste ratsionaliseerimise eesmärgil esitatakse need võrdetegurid SI süsteemis kujul $k_\mathrm{e} = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ ja $k_\mathrm{m} = \mu_0/4\pi$, nii et Maxwelli võrrandites tegurit 4π enam ei figureeri.

[3] Geomeetriliste vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ *skalaarkorrutiseks* (tähis $\boldsymbol{ab}$ või $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$) nimetatakse reaalarvu $ab\cos\theta$, kus θ on vektorite vaheline nurk. Koordinaatesituses $\boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Skalaarkorrutis annab ühe vektori projektsiooni teise vektori sihile. Erijuhuna, vektori skalaarkorrutis iseendaga annab selle vektori pikkuse ruudu: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2 = a^2$. Kui $\boldsymbol{ab} = 0$, siis vektorid on üksteisega risti.

[4] *Ruuminurk* iseloomustab vaatevälja suurust. Sfääri keskpunktist vaadates, sfääri pinnaelement suurusega S tekitab ruuminurga $\Omega = S/r^2$ steradiaani, kus r on sfääri raadius. Kuna sfääri kogupindala on $4\pi r^2$, siis summaarne ruuminurk on 4π steradiaani.

[5] Tüüpiline skalaarne väli on elektriline potentsiaal φ, mille gradient ongi väljatugevus: $-\boldsymbol{\nabla}\varphi = \boldsymbol{E}$. Gradientvektor osutab välja kiireima kasvamise suunda.

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}). \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0. \tag{2.4}$$

Siin $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ on suvalised (diferentseeruvad) vektorväljad ja ∇^2 on nn Laplace'i operaator,

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Viimast võib rakendada nii skalaarsele kui ka vektorväljale.

Niisiis esimene Maxwelli võrrand näeb diferentsiaalsel kujul välja järgmine:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

See võrrand (ükskõik kas integraalsel või diferentsiaalsel kujul) annab mõista, et elektrivälja allikaiks ja neeludeks on elektrilaengud: välja jõujooned algavad positiivsetel ja lõpevad negatiivsetel laengutel. Divergents näitabki välja allikateneelude paigutust ruumis.

Analoogiliselt võib leida ka ülejäänud Maxwelli võrrandid. *Faraday induktsiooniseadus* ütleb, et magnetvälja muutumine tingib keeriselise elektrivälja tekkimise samas ruumipunktis:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Rootor näitabki välja keeriselisust. Integraalsel kujul näeks see võrrand välja järgmine:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{2.5}$$

Siin võrdusmärgist vasakul seisev integraal väljendab vektori $\boldsymbol{E}$ *tsirkulatsiooni* piki kinnist kontuuri Γ, ja Σ on suvaline pind, mis toetub sellele kontuurile. Seega paremal seisev integraal annab magnetvoo läbi kontuuri Γ. Sellisel kujul annab see võrrand mõista, et magnetvoo muutumine läbi kontuuri tingib elektromotoorjõu tekkimise selles kontuuris. Kui näiteks induktiivpooli otste vahele ühendada voltmeeter ja liigutada pooli läheduses püsimagnetit, siis voltmeeter näitab potentsiaalide vahe olemasolu. Seega peale elektrilaengute võib elektrivälja tekitada ka magnetvälja muutumine. Miinusmärk võrrandi 2.5 paremal poolel rõhutab asjaolu, et igasugune magnetvoo muutumisega indutseeritud vool tingib sellise täiendava välja, mis püüab magnetvoo muutumist kompenseerida (Lenzi reegel).

Teatavasti magnetlaenguid looduses ei eksisteeri ehk magnetinduktsiooni jõujooned on kinnised. Seda väljendabki kolmas Maxwelli võrrand:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0.$$

Viimane Maxwelli võrrand (*Ampere'i seadus*) ütleb, et magnetvälja tingivad nii elektrivoolud kui ka muutuv elektriväli:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

kus $\boldsymbol{J}$ on voolutihedus ja $\mu_0 \approx 1{,}26 \times 10^{-6}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$ (vaakumi magnetiline läbitavus). Integraalkujul:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S},$$

kus I on kontuuriga Γ hõlmatud voolu tugevus. Teatavasti sirgvoolu läheduses tekib magnetväli, mille jõujooned on koaksiaalsed voolu suhtes, seega on ilmne, et $\boldsymbol{B}$ tsirkulatsioon piki kontuuri, mis hõlmab seda voolu, on nullist erinev. Lülitame nüüd sellesse ahelasse kondensaatori. Kondensaatori katete vahel on voolutugevus null (laengud kogunevad kondensaatori katetele). Ometi näitab katse magnetvälja olemasolu katete vahel. Magnetvälja tekkimist võib seostada elektrivälja muutumisega, mida väljendabki viimane liige Ampere'i seaduses.

Maxwelli võrrandites sisaldub juba ka elektrilaengu jäävus. Tõpoolest, lähtudes samasusest 2.4:

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \\
&= \nabla \cdot \left(\mu_0 \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \\
&= \mu_0 \left(\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{E} \right) \\
&= \mu_0 \left(\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right),
\end{aligned}$$

mis ongi pidevuse tingimus.

3 Elektromagnetlained vabas ruumis

3.1 Lainevõrrand

Niisiis muutuv magnetväli indutseerib elektrivälja ja muutuv elektriväli jällegi magnetvälja. On mõeldav, et elektromagnetiline häiritus suudab ruumis iseseisvalt levida. Vabas ruumis ($\rho = 0$, $\boldsymbol{J} = 0$) omandavad Maxwelli võrrandid kuju

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, &\quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, &\quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Vaba elektromagnetväli on niisiis allikavaba ($\nabla \cdot \ldots = 0$) kuid pööriseline ($\nabla \times \ldots \neq 0$) väli.

Võrrandisüsteemi 3.1 kujust pole siiski ilmne, kas ja milliseid elektromagnetlained võiks eksisteerida. Püüame need võrrandid teisendada kujule, kus üks väljavektor on elimineeritud. Rakendame näiteks rootorit teisele Maxwelli võrrandile:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{B}).$$

Siin $\nabla \times \boldsymbol{B}$ saab asendada viimasest Maxwelli võrrandist. Lisaks, samasusest 2.2 saame avaldada $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$, sest elektrivälja korral $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ (esimesest Maxwelli võrrandist). Kokkuvõttes saime elektrivälja jaoks *lainevõrrandi*:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{3.2}$$

Identse võrrandi saaksime ka magnetinduktsiooni jaoks.

Juba mehaanikast on hästi teada, et (ühemõõtmeline) lainevõrrand kujul

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.3}$$

kirjeldab laineid, mis liiguvad kiirusega v.[6] Võrdlus võrrandiga 3.2 lubab järeldada, et vaakumis eksisteerivad elektromagnetlained, mis levivad kiirusega

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

See on sisuliselt sama mis katsest leitud $c = \sqrt{k_\mathrm{e}/k_\mathrm{m}}$, aga seekord süstemaatiliselt tuletatud fundamentaalsetest võranditest. Ühtlasi võime võrrandi 3.2 kirjutada kujul

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{3.4}$$

3.2 Harmooniline tasalaine

Otsese kontrollimisega on kerge veenduda, et ühemõõtmelise lainevõrrandi 3.3 üldlahend (mis hõlmab kõiki levivaid laineid) avaldub kujul $u(x,t) = f(x \pm vt)$, kus f on meelevaldne funktsioon. Märgi valik määrab laine levimise suuna. Laine mistahes kindla faasiga punktis (nt laineharjal) peab faas säilima ehk $x \pm vt = \mathrm{Const}$, millest $x = \mp vt + \mathrm{Const}$. Seega laine levib tõepoolest kiirusega v, kusjuures miinusmärk x ja vt vahel garanteerib, et laine levib x-telje positiivses suunas.

Dispersiivses keskkonnas sellisel meelevaldsel kujul laineid ei pruugi esineda, aga lineaarses ja kadudeta keskkonnas eksisteerivad alati harmoonilised võnkumised (nagu selgub edaspidi). Seega otsime lainevõrrandi 3.4 lahendit *harmooniliste tasalainete* kujul

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{kr} - \omega t), \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{B}_0 \cos(\boldsymbol{kr} - \omega t + \phi). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Kuivõrd skalaarkorrutis $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$ annab kauguse piki vektori $\boldsymbol{k}$ sihti, on ilmne, et samafaasipindadeks on vektoriga $\boldsymbol{k}$ risti olevad tasapinnad, kus $\boldsymbol{kr} = \mathrm{Const}$. Vektor $\boldsymbol{k}$ näitab ühtlasi laine levimise sihti. Seda nimetatakse *lainevektoriks* ja selle moodulit $k = |\boldsymbol{k}|$ nimetatakse *lainearvuks*. Lainepikkus (laine ruumilise korduvuse periood) on ilmselt $\lambda = 2\pi/k$. k ja ω vahekorra, välja võnkesihtide, amplituudide E_0 ja B_0 suhte ning võimaliku faasinihke ϕ osas meil esialgu infot pole.

Niisiis asendame pakutud proovilahendi lainevõrrandisse. Laplace'i operaatori arvutus annab

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ &= -\boldsymbol{E}_0 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ &= -\boldsymbol{E}_0 k^2 \cos(\boldsymbol{kr} - \omega t). \end{aligned}$$

Samuti leiame ajalise tuletise:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E} = -\omega^2 \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{kr} - \omega t).$$

Nüüd on ilmne, et $\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E}$ ja $(1/c^2)\partial^2 \boldsymbol{E}/\partial t^2$ on omavahel võrdsed, juhul kui $k = \omega/c$. Järelikult pakutud tasalaineline lahend 3.5 rahuldab kolmemõõtmelist lainevõrrandit 3.4. Seejuures spektraalkoordinaadi valikul on ainult üks vabadusaste, st laine sagedus ja lainearv/lainepikkus on üheselt seotud.

[6] Rõhutagem, et lainevõrrand 3.3 kirjeldab dispersioonivaba ja dissipatsioonivaba keskkonda, kus $v = \mathrm{Const}$, nii et selles kontekstis pole vaja täpsustada, kas tegemist on faasi- või rühmakiirusega.

Lisaks lainevõrrandile peab igasugune laine rahuldama ka algseid Maxwelli võrrandeid. Asetame proovilahendi 3.5 Maxwelli võrrandeisse 3.1. Võrrandist $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ saame

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \\ &\left(E_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + E_{0y} \frac{\partial}{\partial y} + E_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ &= -(E_{0x} k_x + E_{0y} k_y + E_{0z} k_z) \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ &\qquad = -(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0) \sin(\boldsymbol{kr} - \omega t) = 0 \end{aligned}$$

Kuivõrd $\sin(\boldsymbol{kr} - \omega t)$ on üldiselt nullist erinev, siis $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$. Analoogiliselt teisest divergentsi sisaldavast võrrandist saame $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0$. Kui skalaarkorrutis on null, siis vektorid on risti, seega $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{B}$ on rangelt risti laine levimise sihiga (ristlainetus). Kolmandast Maxwelli võrrandist saame $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 = \omega \boldsymbol{B}_0$ ja $\phi = 0$. Vektorite vektorkorrutis on risti mõlema algse vektoriga. Järelikult $\boldsymbol{B}_0$ on risti mitte ainult vektoriga $\boldsymbol{k}$, vaid ka vektoriga $\boldsymbol{E}_0$. Lisaks (kuna $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E}_0$) saame samast seosest $kE_0 = \omega B_0$ ehk $B_0 = E_0/c$. Niisiis, $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{B}$ on üksteisega risti, võnguvad samas faasis ja mõlemad väljad on tasalaines olemas kindlas proportsioonis. Selline elektrodünaamiline väli (laine), kus oleks esindatud vaid $\boldsymbol{E}$-väli või vaid $\boldsymbol{B}$-väli, pole võimalik.

4 Elektromagnetvälja energia ja impulss

4.1 Elektromagnetvälja energia ja Poyntingi vektor

Punktlaengule q mõjub elektriväljas $\boldsymbol{E}$ jõud $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$. Kui see laeng liigub kiirusega $\boldsymbol{v}$, siis väli teeb ajaühikus tööd $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}$. Nüüd kujutleme, et voolutihedust $\boldsymbol{J}$ tingib laengutihedus ρ, kus kõik laetud osakesed liiguvad kiirusega $\boldsymbol{v}$. Sel juhul ilmselt $\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v}$. Nüüd saame avaldada võimsuse, mis kulub laengute liigutamiseks ruumalaühikus: $\rho \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{E} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$.

Milline on aga välja enda energia ja kuidas see liigub ruumis? Avaldame viimasest Maxwelli võrrandist voolutiheduse $\boldsymbol{J}$ ja asendame selle äsja tuletatud võimsuse avaldisse:

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} = \boldsymbol{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

Samasusest 2.3 (rakendatuna väljadele $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{B}$) ja teisest Maxwelli võrrandist saame avaldada

$$\boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}).$$

Kõike kokku võttes saame

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \right) = 0. \tag{4.1}$$

Tulemust võib tõlgendada energia jäävuse seadusena. Esmalt, nagu mainitud, $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$ on võimsus, mis kulub laengute liigutamiseks (ruumalaühiku kohta). See töö võib muunduda soojuseks (osakeste kineetiliseks energiaks), aga võib ka salvestuda potentsiaalse energia kujul. Suuruseid $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ ja $\frac{B^2}{2\mu_0}$

võiks tõlgendada kui vastavate väljadega seotud energiatihedusi. Ja viimaks, vektoriaalne suurus

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = c^2\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

võiks esindada elektromagnetlainetena edasikanduva energiavoo tihedust. Seda nimetatakse *Poyntingi vektoriks*. Energia levib seega sihis, mis on risti vektoritega $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}$ on ühikruumalast väljuv energiavoog. Kokkuvõtvalt võime energia jäävuse 4.1 sõnastada siis nii: ühikruumalasse sisenev energiavoog $-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}$ kulub osaliselt laengute liigutamiseks selles ruumalas ($\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$) ja ülejäänu talletub välja energiatihedusena.

4.2 Energia ja kiiritustihedus tasalaines

Valguslaine korral (kus väli vaheldub ülikõrge sagedusega $\sim 10^{14}$ Hz) pakub meile huvi pigem Poyntingi vektori ajaline keskväärtus ehk *kiiritustihedus* I. Nagu veendusime, on tasalaines vektorid $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{B}$ üksteisega risti, seega nende vektorkorrutise moodul on lihtsalt $|\boldsymbol{E}| \cdot |\boldsymbol{B}|$. Lisaks on $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{B}$ kogu aeg sellise käelisusega, et $\boldsymbol{S}$ on samasuunaline lainevektoriga ($\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{B}$ muudavad oma märki samaaegselt, nii et $\boldsymbol{S}$ suund säilib). Niisiis

$$I = \langle S \rangle_t = c^2\varepsilon_0 E_0 B_0 \left\langle \cos^2 \omega t \right\rangle_t = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2.$$

($B_0 = E_0/c$ ja mistahes harmoonilise võnkumise ruudu keskväärtus on 1/2.)

Sama tulemuseni jõub ka teist rada pidi. Nimelt laine kannab (kiirusega c) edasi teatavat keskmist energiatihedust. Kummagi välja energiatiheduse avaldised leidsime samuti eespool, nii et

$$I = \left(\frac{\varepsilon_0 \left\langle E^2 \right\rangle}{2} + \frac{\left\langle B^2 \right\rangle}{2\mu_0} \right) \cdot c.$$

Jällegi, $\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{1}{2}E_0^2$ jne. Arvestades seoseid $B_0 = E_0/c$ ja $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$, näeme, et harmoonilises tasalaines energia on võrdselt jaotunud elektri- ja magnetkomponendi vahel.

4.3 Elektromagnetvälja impulss

Peale energia iseloomustab igasugust mateeriat (sh elektromagnetlainet) ka impulss. Seda saab leida mitmesugusel viisil, näiteks kujutledes, et ainele langeb tasalaine, mis mõjub ainele läbi Lorentzi jõu komponendi $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$. Lähtume siinkohal hoopis relatiivsusteooriast, sest klassikaline elekrodünaamika on täielikus kooskõlas erirelatiivsusteooriaga, nii et mistahes piisavalt üldine relatiivsusteooria järeldus peaks laienema ka elektromagnetväljale.

Kujutleme osakeste voogu, kus osakesed (seisu)massiga m liiguvad kõik samas suunas ühesuguse kiirusega v, kusjuures ruumalaühikus on N sellist osakest. Osakeste voo tihedus (st mitu osakest ajaühikus läbib liikumise sihiga ristuvat ühikpinda) on ilmselt Nv. Vastavalt erirelatiivsusteooriale osakese koguenergia on γmc^2, kus $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$. Järelikult energiavoo tihedus on $Nv(\gamma mc^2)$. Analoogiliselt, impulsi ruumtihedus on $N(\gamma mv)$. Jagades need seosed omavahel, saame

$$\text{impulsi ruumtihedus} = \frac{\text{energiavoo tihedus}}{c^2}.$$

Osakeste mass ja kiirus taandusid välja, nii et see tulemus võiks kehtida mistahes mateeria jaoks. Kuivõrd valgus liigub kiirusega c, siis

$$\text{impulsi voo tihedus} = \text{impulsi ruumtihedus} \times c,$$

ehk eelmist tulemust kasutades

$$\text{impulsi voo tihedus} = \frac{\text{energiavoo tihedus}}{c}.$$

Kui meil on teatav "lõplik kogus" valgust, võime kirjutada ka lihtsamalt[7]

$$\text{impulss} = \frac{\text{energia}}{c}.$$

5 Elektromagnetväli aines

5.1 "Makroskoopilised" Maxwelli võrrandid

Jaotises 2 formuleeritud Maxwelli võrrandid kirjeldavad tõelist ehk mikroskoopilist välja. Valguse lainepikkus on aga mitu suurusjärku suurem aatomite vahekaugusest tahkises või vedelikus. Seega meid huvitab teatav keskmistatud väli aines (mida tähistame endiselt $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{B}$). Lisaks on kasulik eristada *vabu* ja *seotud* laenguid. Esimesi karakteriseerib laengutihedus ρ_f ja juhtivusvoolu tihedus $\boldsymbol{J}_\mathrm{f}$. Seevastu seotud laengud on oma aatomi või molekuli koosseisus. Sellegipoolest võib elektriväljaga esile kutsuda *aine polariseerumise*, kas siis algselt polariseerimata molekulides dipoolmomendi indutseerimisega või polaarsete molekulide reorienteerimise teel. Polariseerituse määra iseloomustab dipoolmomendi ruumtihedus ehk aine *polarisatsioon* $\boldsymbol{P}$. Samuti on mõeldav, et magnetväli tingib molekulaarvoolude jm mikroskoopiliste magnetmomentide joondumist. Seda karakteriseerib jällegi magnetilise dipoolmomendi ruumtihedus ehk *magneetumus* $\boldsymbol{M}$. Kui aine polarisatsioon on ruumiliselt ebaühtlane, siis positiivsed ja negatiivsed laengud täielikult ei neutraliseeri üksteist. Selgub, et sellest tuleneva panuse laengutihedusse annab polarisatsiooni divergents:

$$\rho = \rho_\mathrm{f} + (-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}).$$

Seevastu voolutihedusse panustab nii aine polarisatsiooni muutumine (st seotud laengute nihkumine) kui ka aine magneetumus:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}.$$

[7] Saadud seosed energia ja impulsi vahel kehtivad mõistagi vaid valguse jaoks (millel mass puudub ja mis liigub alati kiirusega c). Üldine relativistlik seos keha koguenergia E ja impulsi p vahel on järgmine:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}.$$

Kui võtta siin $m = 0$, siis tõepoolest $E = pc$.

Asendades sellisel kujul ρ ja $\boldsymbol{J}$ algseisse Maxwelli võrrandeisse, saame

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{f}},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\end{gathered}\tag{5.1}$$

kus on defineeritud kaks abistavat välja, *elektrinihe* $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ ja *magnetvälja tugevus* $\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}$. Nagu näha võrrandeist 5.1, elektrinihe $\boldsymbol{D}$ on määratud vaid vabade laengute paigutusega ruumis ja magnetvälja tugevus $\boldsymbol{H}$ sõltub vaid juhtivusvoolust (ja nihkevoolu tihedusest).

5.2 Elektromagnetvälja energia aines

Võttes aluseks makroskoopilised võrrandid 5.1, võime tuletada seose

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}+\boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=0.\tag{5.2}$$

Viimasest liikmest saame Poyntingi vektori kujul $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$, mis vähemalt mittemagnetiliste keskkondade korral on identne sellega, mille saime mikroskoopilistest võrranditest (sest $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0$). Esimene liige $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$ väljendab ilmselt tööd, mida elektriväli teeb vabade laengute liigutamisel (see vabaneb Joule'i soojusena elektrijuhis). See liige järelikult ei sisalda enam tööd, mida tehakse seotud laengute liigutamisel (st aine polariseerimisel). Vastav energia sisaldub nüüd hoopis teises liikmes:

$$\boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{E}\frac{\partial(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0E^2}{2}\right)+\boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}.$$

5.3 Ainevõrrandid

Makroskoopilistes võrrandites 5.1 on lausa neli välja ja nende võrranditega ei saa palju ette võtta, enne kui on teada, millised on ainest tulenevad seosed erinevate väljade vahel. Dielektriliste keskkondade korral huvitab meid peamiselt aine *dielektriline koste* ehk polariseerumine. Kui väli on võrdlemisi nõrk, siis võime eeldada, et aine koste on lineaarne, st indutseeritud $\boldsymbol{P}$ on võrdeline $\boldsymbol{E}$-ga. Kui keskkond on lisaks ka isotroopne, siis $\boldsymbol{P}$ ja $\boldsymbol{E}$ on samasuunalised ja võrdetegur ei sõltu suunast. SI süsteemis väljendatakse see kujul:

$$\boldsymbol{P}=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E}.$$

Suurus χ on aine *dielektriline vastuvõtlikkus*, mis väljendab seda, kui kergesti aine polariseerub elektrivälja toimel. Selle seose baasil saame $\boldsymbol{D}=(1+\chi)\varepsilon_0\boldsymbol{P}$. Seega võime χ asemel kasutada ka aine *suhtelist dielektrilist läbitavust* $\varepsilon=1+\chi$, nii et $\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$.[8] Analoogiliselt saab sisse tuua aine *suhtelise magnetilise läbitavuse* μ, nii et $\boldsymbol{B}=\mu\mu_0\boldsymbol{H}$. Enamus aineid on vaid tühisel määral magnetilised, nii et $\mu\simeq 1$.

Suurused χ ja ε on üheselt defineeritud vaid staatiliste (või aeglaselt muutuvate) väljade korral. Valguse sagedustel välja suund muudab märki nii kiiresti, et aine ei jõua polariseeruda enam sellisel määral nagu staatilisel juhul, st efektiivselt χ väärtus väheneb. Sellegipoolest, kui me vaatleme kindlal sagedusel toimuvaid harmoonilisi võnkumisi (kus eeldatavasti kõik väljad, sh $\boldsymbol{P}$ ja $\boldsymbol{D}$, võnguvad harmooniliselt sama sagedusega), siis võime eeldada, et välja amplituudide jaoks jäävad seosed $\boldsymbol{P}=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ ikkagi püsima. Võrdetegurid χ ja ε muidugi sõltuvad sagedusest, ja võivad olla isegi kompleksarvulised, kui keskkond on dissipatiivne.

Niisiis homogeense, isotroopse, lineaarse ja statsionaarse (HILS) keskkonna omadused on määratud skalaarsete konstantidega ε ja μ.

Kristallilised keskkonnad ei pruugi olla isotroopsed (kuigi on lineaarsed). Teiste sõnadega, indutseeritud $\boldsymbol{P}$ ei ole päris samasuunaline väljatugevusega. Sel juhul võrdetegureid χ ja ε tuleks käsitleda tensoritena.

Metallides on aine põhiliseks kosteks elektrijuhtivus, mida saab karakteriseerida erijuhtivusega σ või eritakistusega ρ, nii et $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}=\sigma\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}/\rho$. See on Ohmi seaduse diferentsiaalkuju.

5.4 Elektromagnetlained ainelises keskkonnas

Piisavalt aeglaselt muutuvate väljade korral võiksime eeldada, et seosed $\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/(\mu\mu_0)$ jäävad endiselt kehtima. Lisaks eeldame, et tegemist on HILS-keskkonnaga (ε ja μ on skalaarsed konstandid) ja dielektrikuga (vabu laenguid ei ole ehk $\rho_{\mathrm{f}}=0$ ja $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}=0$). Maxwelli võrrandid 5.1 omandavad lihtsama kuju

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.\end{gathered}\tag{5.3}$$

Need on peaaegu identsed vastavate mikroskoopiliste võrranditega 3.1, v.a. täiendav tegur $\varepsilon\mu$. Seega saame endiselt lainevõrrandi:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}.$$

Järelikult sellises keskkonnas leviva laine (kiirguse ja aine ergastuse kombinatsiooni) faasikiirus $v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Kiiruste suhet c/v nimetatakse teatavasti keskkonna *murdumisnäitajaks* n, seega $n=\sqrt{\varepsilon\mu}\simeq\sqrt{\varepsilon}$. Sisuliselt tuleneb vaadeldav kiiruse muutus sellest, et primaarlaine ja selle poolt aines üles ergastatud ostsillaatorite sekundaarkiirguse vahel on teatav faasinihe. Sõltuvalt sellest, kas laine sagedus on väiksem või suurem kui on ostsillaatori omavõnkesagedus, võib n olla nii suurem kui ka väiksem ühest.

Aga nagu mainiti jaotises 5.3, seosed nagu $\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ ei pruugi kehtida väljade hetkväärtuste jaoks, ja pealegi aine koste sõltub sagedusest. Seega läheme kohe sagedusesitusse, st eeldame, et kõik dünaamilised suurused Maxwelli võrrandeis (sh ρ ja $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$) muutuvad ajas harmooniliselt ühe ja sama sagedusega ω. Valemite lihtsustamiseks teostame selle analüüsi kompleksesituses, kus iga väljakomponendi ajasõltuvus on kujul $e^{-i\omega t}$. Näiteks elektriväli $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\Re\{\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\}$, kus välja kompleksne amplituud $\tilde{\boldsymbol{E}}$ sõltub vaid ruumikoordinaatidest. Sellise harmoonilise funktsiooni ajalise tuletise

[8] Mõnikord sümboliga ε tähistatakse absoluutset dielektrilist läbitavust ja suhtelise läbitavuse jaoks kasutatakse mõnda muud tähist, näiteks ε_{r} või K_{E}.

arvutamisele vastab ilmselt korrutamine teguriga $-i\omega$. Seega makroskoopilised võrrandid 5.1 omandavad kuju

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{D}} &= \tilde{\rho}_\mathrm{f}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = 0, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} &= i\omega\tilde{\boldsymbol{B}}, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} = \tilde{\boldsymbol{J}}_\mathrm{f} - i\omega\tilde{\boldsymbol{D}}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Kuivõrd sagedus on nüüd fikseeritud, saame viimases võrrandis teha asendused $\tilde{\boldsymbol{J}}_\mathrm{f} = \sigma\tilde{\boldsymbol{E}}$, $\tilde{\boldsymbol{D}} = \varepsilon\varepsilon_0\tilde{\boldsymbol{E}}$ ja $\tilde{\boldsymbol{H}} = \tilde{\boldsymbol{B}}/(\mu\mu_0)$, kus σ, ε ja μ on üldiselt sagedusest sõltuvad kompleksed suurused. Selle tulemusena saame

$$\frac{1}{\mu\mu_0}\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}} = \sigma\tilde{\boldsymbol{E}} - i\omega\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\boldsymbol{E}} = -i\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon + \frac{\sigma i}{\omega\varepsilon_0}\right)\tilde{\boldsymbol{E}}.$$

Sulgavaldisest on näha, et aine juhtivusest tingitud koste efektiivselt lisandub dielektrilisele kostele. Seega üldisust kaotamata võime selle absorbeerida ainekonstanti ε, nii et viimane Maxwelli võrrand omandab lõpuks kuju

$$\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}} = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\tilde{\boldsymbol{E}}$$

Edasine lainevõrrandi tuletamine toimub sama skeemi järgi nagu vabas ruumis:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}}) = i\omega\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}} = \omega^2\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\tilde{\boldsymbol{E}}.$$

Asendame kahekordse rootori samasusest 2.2 (eeldame, et endiselt $\boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} = 0$) ja $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\boldsymbol{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\tilde{\boldsymbol{E}}. \tag{5.5}$$

Seda nimetatakse *Helmholtzi võrrandiks.*

Otsime võrrandile 5.5 tasalainelist lahendit kujul $\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{K}\boldsymbol{r}}$. Nagu eespool demonstreeritud, saame Laplace'i operaatori rakendamisel $\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\boldsymbol{E}} = -K^2\tilde{\boldsymbol{E}}$. Seega Helmholtzi võrrand taandub tingimusele

$$K = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} \simeq \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}.$$

Kuivõrd ε võib olla kompleksne, siis järelikult ka lainearv K on üldiselt kompleksne.

Et näha, milline on selle komplekse K tähendus, kujutleme tasalainet, mis levib z-telje sihis ja mille intensiivsus muutub ka vaid z-telje sihis. Olgu $\sqrt{\varepsilon} = n + i\kappa$, kus n ja κ on reaalarvulised suurused (komplekse murdumisnäitaja reaal- ja imaginaarosa). Lainearvu reaalosa $k = (\omega/c)n$. Nende seoste baasil saame täieliku lainefunktsiooni kujul

$$\begin{aligned} E(z,t) &= \Re\left\{E_0 e^{i(Kz-\omega t)}\right\} \\ &= \Re\left\{E_0 e^{-(\omega/c)\kappa z} e^{i(kz-\omega t)}\right\} \\ &= E_0 e^{-(\omega/c)\kappa z}\cos(kz - \omega t), \end{aligned}$$

kus $\Re(\ldots)$ tähistab reaalosa. Seega suurus n endiselt määrab laine faasikiiruse, $v = \omega/k = c/n$. Seevastu esimene eksponent väljendab laine amplituudi vähenemist teepikkusega. Kuivõrd kiiritustihedus I on võrdeline laine amplituudi ruuduga, saame siit *Bouguer'-Lamberti seaduse*:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z},$$

kus *neeldumistegur*

$$\alpha = \frac{2\omega\kappa}{c}.$$

5.5 Kompleksne ε ja energia dissipatsioon

Lähtuvalt energia bilansi võrrandist 5.2 võib kiirgusenergia dissipatsiooni (muundumist soojuseks) tingida nii elektrijuhtivus (liige $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}_\mathrm{f}$) kui ka liige $\boldsymbol{E}(\partial\boldsymbol{D}/\partial t)$, juhul kui $\boldsymbol{D}$ ja $\boldsymbol{E}$ vahel esineb faasinihe. Nagu eespool mainitud, võime harmooniliselt võnkuvate väljade korral dielektrilist konstanti ε vaadelda kompleksarvulisena, mis seob väljade komplekseid amplituude:

$$\tilde{\boldsymbol{D}} = \varepsilon\varepsilon_0\tilde{\boldsymbol{E}}.$$

Kompleksesituses teatavasti harmoonilise funktsiooni tuletise arvutamisele vastab korrutamine teguriga $i\omega$. Lisaks on teada, et kahe harmooniliselt võnkuva suuruse korrutise ajaline keskväärtus avaldub valemiga[9]

$$\langle A\cos(\omega t + \phi) \cdot B\cos(\omega t + \varphi)\rangle_t = \frac{1}{2}\Re(\tilde{A}\tilde{B}^*). \tag{5.6}$$

Siin $(\ldots)^*$ tähistab kaaskompleksi leidmist. Nüüd saame arvutada ühikruumalas dissipeeruva võimsuse:

$$\begin{aligned} \left\langle \boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right\rangle_t &= \frac{1}{2}\Re\left\{\tilde{E}_0(i\omega\tilde{D}_0)^*\right\} = -\frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\Re(\tilde{E}_0\tilde{E}_0^* i\varepsilon^*) \\ &= \frac{\omega\varepsilon_0 E_0^2}{2}\Im(\varepsilon). \end{aligned}$$

Järelikult sellises esituses kirjeldab energia dissipatsiooni ε imaginaarosa.

5.6 Väljade pidevus dielektrike eralduspinnal

Tasalaineline lahend eksisteerib rangelt võttes vaid lõpmatus homogeenses keskkonnas (kuigi lokaalselt võib mistahes piisavalt suunatud kiirgust kirjeldada tasalainena). Harmoonilisi tasalaineid saab siiski lähtekohana kasutada ka paljude muude optiliste väljade analüüsimisel. Näiteks, kui meil on planaarne eralduspind kahe erineva, pool-lõpmatu optilise keskkonna vahel, siis võib juhtuda, et välja kummaski keskkonnas kirjeldab kahe tasalaine summa (näiteks langev ja peegeldunud laine). Igal juhul need lained kummalgi pool eralduspinda tuleb sobivalt kokku siduda, et saada terviklikku lahendit lainevõrrandile, koos muude huvipakkuvate järeldustega (nt erinevate lainekomponentide intensiivsuste suhted). Selleks tuleb arvesse võtta väljade pidevuse tingimusi, mis jällegi tulenevad Maxwelli võrrandeist.

[9] Tõestuseks rakendame valemi vasakul poolel olevatele teguritele summa koosinuse valemit, korrutame seejärel sulud lahti ja grupeerime saadud liikmed ringi. Keskväärtuse arvutamisel arvestame, et $\left\langle\cos^2\omega t\right\rangle_t = \left\langle\sin^2\omega t\right\rangle_t = 1/2$ samas kui $\langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle_t = 0$. Viimaks kasutame veelkord summa koosinuse valemit vastupidises suunas. Tulemus:

$$\langle A\cos(\omega t + \phi) \cdot B\cos(\omega t + \varphi)\rangle_t = \frac{1}{2}AB\cos(\phi - \varphi).$$

Sama tulemuse saame valemi 5.6 parema poole lahtikirjutamisel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Re(\tilde{A}\tilde{B}^*) &= \frac{1}{2}\Re\left\{Ae^{i\phi}Be^{-i\varphi}\right\} \\ &= \frac{1}{2}AB \cdot \Re\left\{e^{i(\phi-\varphi)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}AB\cos(\phi - \varphi). \end{aligned}$$

Eeldame, et tegemist on dielektriliste keskkondadega ($\rho_{\mathrm{f}} = 0$, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} = 0$). Kujutleme väikest silindrit, mis on risti eralduspinnaga ja ulatub parajasti ühest keskkonnast teise. Rakendame sellele Gaussi lauset elektrinihke jaoks ($\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$). Kui kõnealune silinder on väga lühike, siis selle külgpind on tühiselt väike ja ei panusta integraali. Otspindade panused on aga võrdsed. Siit järeldub, et elektrinihke normaalkomponent on pidev selliste keskkondade eralduspinnal. Võrrandist $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$ saame analoogselt, et ka $\boldsymbol{B}$ normaalkomponent on pidev.

Et saada teavet väljade tangentsiaalkomponentide käitumise kohta, võtame aluseks tsirkulatsiooni sisaldavad võrrandid ja rakendame neid hästi kitsale kinnisele kontuurile, mis parajasti ulatub ühest keskkonnast teise. Sel juhul kontuuri pindala on nullilähedane ja väljade $\boldsymbol{B}$ või $\boldsymbol{D}$ voo läbi kontuuri võib lugeda tühiseks. Sellest arutelust järeldub, et nii $\boldsymbol{E}$ kui ka $\boldsymbol{H}$ tangentsiaalkomponent on pidevad. Kuivõrd optilised keskkonnad on üldiselt mittemagnetilised ($\mu \simeq 1$), siis ka $\boldsymbol{B}$ tangentsiaalkomponent on pidev.