Iteratiivse kahendotsimise korrektsusest

Peeter Laud

5. detsember 2004. a.

1 Kahendotsimise programm

Me vaatasime loengus järgmist sorteeritud massiivist kindla väärtusega elemendi otsimise programmi:

$$
\begin{array}{l}
r := 0 \\
\textit{while } k \leq l \wedge r \neq 1 \textit{ do} \\
\quad m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor \\
\quad \textit{if } \mathbf{a}[m] = x \textit{ then} \\
\quad\quad r := 1 \\
\quad \textit{else} \\
\quad\quad \textit{if } \mathbf{a}[m] < x \textit{ then} \\
\quad\quad\quad k := m + 1 \\
\quad\quad \textit{else} \\
\quad\quad\quad l := m - 1 \\
\quad\quad \textit{fi} \\
\quad \textit{fi} \\
\textit{od}
\end{array}
$$

See programm otsib mittekahanevalt sorteeritud massiivi $\mathbf{a}$ lõigust $[k..l]$ elementi väärtusega x. Kui selline element leitakse, siis saab r väärtuseks 1, muidu 0.

Programmi eeltingimus P on seega, et $\mathbf{a}$ on sorteeritud ning $k \leq l$. Peale selle salvestame eeltingimuses muutujate k ja l algväärtused muutujatesse k_0 ja l_0, sest programm muudab k ja l väärtusi, kuid järeltingimuses tahaks me k ja l esialgseid väärtusi mainida. Võtame $P = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$, kus

- $P_1 \equiv \forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j])$;
- $P_2 \equiv k = k_0$;
- $P_3 \equiv l = l_0$;
- $P_4 \equiv k_0 \leq l_0$.

Järeltingimuseks Q on, et lõpuks on $r = 1$ parajasti siis, kui massiivi $\mathbf{a}$ lõigus $[k_0..l_0]$ leidub element väärtusega x. S.t. Q on $(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))$. Meil tuleb näidata, et

$$
\begin{array}{l}
(\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j]) \wedge (k = k_0) \wedge (l = l_0) \wedge (k_0 \leq l_0) \\
r := 0 \\
\mathit{while}\ k \leq l \wedge r \neq 1\ \mathit{do} \\
\quad m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor \\
\quad \mathit{if}\ \mathbf{a}[m] = x\ \mathit{then} \\
\quad\quad r := 1 \\
\quad \mathit{else} \\
\quad\quad \mathit{if}\ \mathbf{a}[m] < x\ \mathit{then} \\
\quad\quad\quad k := m + 1 \\
\quad\quad \mathit{else} \\
\quad\quad\quad l := m - 1 \\
\quad\quad \mathit{fi} \\
\quad \mathit{fi} \\
\mathit{od} \\
(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))
\end{array}
$$

2 Tsükliinvariandid

Selles programmis on üks tsükkel, tema jaoks on meil vaja tsükliinvarianti ja mõõdufunktsiooni. Mõõdufunktsiooniks E sobib $\max(l - k + 2 - r, 0)$, sest igal iteratsioonil vahe $l - k$ väheneb või r kasvab. Tsükliinvariant R on keerulisem, temaks võtame $R = R_1 \wedge \cdots \wedge R_7$, kus

- $R_1 = P_1$, s.t. massiiv on sorteeritud;
- $R_2 \equiv k \leq l \Rightarrow k_0 \leq k \leq l_0$, s.t. kui edasisest otsimisest ei ole veel loobutud (otsitav piirkond sisaldab veel elemente), siis viitab k esialgse otsimispiirkonna sisse;
- $R_3 \equiv k \leq l \Rightarrow k_0 \leq l \leq l_0$, s.t. sama l jaoks.
- $R_4 \equiv \mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \wedge k \leq l \Rightarrow \mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[l] \vee \mathbf{a}[k-1] < x < \mathbf{a}[k] \vee \mathbf{a}[l] < x < \mathbf{a}[l+1]$, s.t. kui koht, kus massiivis $\mathbf{a}$ on või peaks olema element suurusega x, jäi alguses k ja l-i vahele, siis jääb see koht kogu aeg k ja l-i vahele või vahetult lõigu $[k \ldots l]$ kõrvale (ja siis x-i $\mathbf{a}$-s ei ole), seni kuni otsimisest pole loobutud (siis on $k > l$);
- $R_5 \equiv r = 1 \Rightarrow \mathbf{a}[m] = x \wedge k_0 \leq m \leq l_0$, s.t. kui r-i väärtus ütleb, et x on leitud, siis ongi ta leitud;
- $R_6 \equiv k > l \Rightarrow r = 0 \wedge \forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x)$, s.t. kui me oleme edasisest otsimisest loobunud, siis sellist elementi x massiivi $\mathbf{a}$ lõigus k_0-st l_0-ni tõepoolest ei leidunud ja sedasama väljendab ka muutuja r väärtus;

- $R_7 \equiv r \in \{0, 1\}$, s.t. me kasutame ka seda fakti, et r on alati kas 0 või 1.

Vastavalt loengukiledel toodule kirjutame tsükli ja tsükli keha ette ja taha R-i koos täiendavate tingimustega. Saame

$(\forall i, j : (i \le j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \le \mathbf{a}[j]) \wedge (k = k_0) \wedge (l = l_0) \wedge (k_0 \le l_0)$
$r := 0$
R
while $k \le l \wedge r \ne 1$ *do*
$R \wedge (k \le l) \wedge (r \ne 1) \wedge (e = \max(l - k + 2 - r, 0))$
    $m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$
    if $\mathbf{a}[m] = x$ *then*
        $r := 1$
    else
        if $\mathbf{a}[m] < x$ *then*
            $k := m + 1$
        else
            $l := m - 1$
        fi
    fi
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
od
$R \wedge (k > l \vee r = 1)$
$(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \le i \le l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))$

Tegelikult peaks R-i asemele kirjutama eeltoodud seitsme tingimuse konjunktsiooni, aga see läheks liiga kirjuks... Seetõttu anname siin ja edaspidi valemitele ja nende osadele nimesid ning programmiridade vahele kirjutame just neid nimesid. Nimede tähenduse anname väljaspool.

3 Omistamiste ja tingimuslausete eeltingimused

Tingimust R propageerime üle 1. rea, saame

$(\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j]) \wedge (k = k_0) \wedge (l = l_0) \wedge (k_0 \leq l_0)$
$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(1)} \wedge R_6^{(1)} \wedge R_7^{(1)}$
1 $r := 0$
R
2 *while* $k \leq l \wedge r \neq 1$ *do*
$R \wedge (k \leq l) \wedge (r \neq 1) \wedge (e = \max(l - k + 2 - r, 0))$
3 $\quad m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$
4 $\quad$ *if* $\mathbf{a}[m] = x$ *then*
5 $\qquad r := 1$
6 $\quad$ *else*
7 $\qquad$ *if* $\mathbf{a}[m] < x$ *then*
8 $\qquad\quad k := m + 1$
9 $\qquad$ *else*
10 $\qquad\quad l := m - 1$
11 $\qquad$ *fi*
12 $\quad$ *fi*
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
13 *od*
$R \wedge (k > l \vee r = 1)$
$(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))$

Siin $R_5^{(1)}$, $R_6^{(1)}$ ja $R_7^{(1)}$ on saadud R_5-st, R_6-st ja R_7-st, asendades seal r-i 0-ga (tingimused $R_1, \ldots, R_4$ ei sisalda r-i, seega nemad ei muutu). Meil on

- $R_5^{(1)} \equiv 0 = 1 \Rightarrow \mathbf{a}[m] = x \wedge k_0 \leq m \leq l_0$;
- $R_6^{(1)} \equiv k > l \Rightarrow 0 = 0 \wedge \forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x)$;
- $R_7^{(1)} \equiv 0 \in \{0, 1\}$.

Tingimust $R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$ propageerime üle *fi*-de, saame

$(\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j]) \wedge (k = k_0) \wedge (l = l_0) \wedge (k_0 \leq l_0)$

$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(1)} \wedge R_6^{(1)} \wedge R_7^{(1)}$

$r := 0$

R

while $k \leq l \wedge r \neq 1$ *do*

$R \wedge (k \leq l) \wedge (r \neq 1) \wedge (e = \max(l - k + 2 - r, 0))$

$\quad m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$

$\quad$ *if* $\mathbf{a}[m] = x$ *then*

$\quad\quad r := 1$

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

$\quad$ *else*

$\quad\quad$ *if* $\mathbf{a}[m] < x$ *then*

$\quad\quad\quad k := m + 1$

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

$\quad\quad$ *else*

$\quad\quad\quad l := m - 1$

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

$\quad\quad$ *fi*

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

$\quad$ *fi*

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

od

$R \wedge (k > l \vee r = 1)$

$(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))$

Propageerime teda edasi üle 5., 8. ja 10. rea. Saame

$(\forall i,j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j]) \wedge (k = k_0) \wedge (l = l_0) \wedge (k_0 \leq l_0)$
$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(1)} \wedge R_6^{(1)} \wedge R_7^{(1)}$
1 $r := 0$
R
2 *while* $k \leq l \wedge r \neq 1$ *do*
$R \wedge (k \leq l) \wedge (r \neq 1) \wedge (e = \max(l - k + 2 - r, 0))$
3 $m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$
4 *if* $\mathbf{a}[m] = x$ *then*
$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(5)} \wedge R_6^{(5)} \wedge R_7^{(5)} \wedge e > \max(l - k + 1, 0)$
5 $r := 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
6 *else*
7 *if* $\mathbf{a}[m] < x$ *then*
$R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)$
8 $k := m + 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
9 *else*
$R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)$
10 $l := m - 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
11 *fi*
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
12 *fi*
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
13 *od*
$R \wedge (k > l \vee r = 1)$
$(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))$

Siin

- $R_5^{(5)} \equiv 1 = 1 \Rightarrow \mathbf{a}[m] = x \wedge k_0 \leq m \leq l_0$;
- $R_6^{(5)} \equiv k > l \Rightarrow 1 = 0 \wedge \forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x)$;
- $R_7^{(5)} \equiv 1 \in \{0, 1\}$;
- $R_2^{(8)} \equiv m + 1 \leq l \Rightarrow k_0 \leq m + 1 \leq l_0$;
- $R_3^{(8)} \equiv m + 1 \leq l \Rightarrow k_0 \leq l \leq l_0$;

- $R_4^{(8)} \equiv \mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \wedge m+1 \leq l \Rightarrow \mathbf{a}[m+1] \leq x \leq \mathbf{a}[l] \vee \mathbf{a}[m] < x < \mathbf{a}[m+1] \vee \mathbf{a}[l] < x < \mathbf{a}[l+1]$;
- $R_6^{(8)} \equiv m+1 > l \Rightarrow r = 0 \wedge \forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x)$;
- $R_2^{(10)} \equiv k \leq m-1 \Rightarrow k_0 \leq k \leq l_0$;
- $R_3^{(10)} \equiv k \leq m-1 \Rightarrow k_0 \leq m-1 \leq l_0$;
- $R_4^{(10)} \equiv \mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \wedge k \leq m-1 \Rightarrow \mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[m-1] \vee \mathbf{a}[k-1] < x < \mathbf{a}[k] \vee \mathbf{a}[m-1] < x < \mathbf{a}[m]$;
- $R_6^{(10)} \equiv k > m-1 \Rightarrow r = 0 \wedge \forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x)$.

Need on saadud valemites $R_1, \ldots, R_6$ vastavaid asendusi tehes. Paneme tähele, et nende ridade eeltingimustes muutus ka fragment „$e > \max(l-k+2-r, 0)$“.

7. real oleva *if*-lause eeltingimuse saame nüüd mõlema haru eeltingimustest (enne 8. ja 10. rida):

$(\forall i,j : (i \le j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \le \mathbf{a}[j]) \wedge (k = k_0) \wedge (l = l_0) \wedge (k_0 \le l_0)$
$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(1)} \wedge R_6^{(1)} \wedge R_7^{(1)}$
1 $r := 0$
R
2 *while* $k \le l \wedge r \ne 1$ *do*
$R \wedge (k \le l) \wedge (r \ne 1) \wedge (e = \max(l - k + 2 - r, 0))$
3 $m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$
4 *if* $\mathbf{a}[m] = x$ *then*
$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(5)} \wedge R_6^{(5)} \wedge R_7^{(5)} \wedge e > \max(l - k + 1, 0)$
5 $r := 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
6 *else*
$\big(\mathbf{a}[m] < x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)\big) \wedge$
$\big(\mathbf{a}[m] \ge x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)\big)$
7 *if* $\mathbf{a}[m] < x$ *then*
$R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)$
8 $k := m + 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
9 *else*
$R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)$
10 $l := m - 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
11 *fi*
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
12 *fi*
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
13 *od*
$R \wedge (k > l \vee r = 1)$
$(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \le i \le l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))$

Järgmisena leiame välimise *if*-lause eeltingimuse (tema harude eeltingimused on enne 5. ja 7. rida).

$(\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j]) \wedge (k = k_0) \wedge (l = l_0) \wedge (k_0 \leq l_0)$

$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(1)} \wedge R_6^{(1)} \wedge R_7^{(1)}$

1 $r := 0$

R

2 *while* $k \leq l \wedge r \neq 1$ *do*

$R \wedge (k \leq l) \wedge (r \neq 1) \wedge (e = \max(l - k + 2 - r, 0))$

3 $m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$

$\big(\mathbf{a}[m] = x \Rightarrow R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(5)} \wedge R_6^{(5)} \wedge R_7^{(5)} \wedge e > \max(l - k + 1, 0)\big) \wedge$
$\Big(\mathbf{a}[m] \neq x \Rightarrow$
$\big(\mathbf{a}[m] < x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)\big) \wedge$
$\big(\mathbf{a}[m] \geq x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)\big)\Big)$

4 *if* $\mathbf{a}[m] = x$ *then*

$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(5)} \wedge R_6^{(5)} \wedge R_7^{(5)} \wedge e > \max(l - k + 1, 0)$

5 $r := 1$

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

6 *else*

$\big(\mathbf{a}[m] < x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)\big) \wedge$
$\big(\mathbf{a}[m] \geq x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)\big)$

7 *if* $\mathbf{a}[m] < x$ *then*

$R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)$

8 $k := m + 1$

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

9 *else*

$R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)$

10 $l := m - 1$

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

11 *fi*

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

12 *fi*

$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$

13 *od*

$R \wedge (k > l \vee r = 1)$

$(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))$

Selle tingimuse saame järgmisel viisil ümber sõnastada. Hetkel on meil väide

$$(\mathbf{a}[m] = x \Rightarrow F_1) \wedge (\mathbf{a}[m] \neq x \Rightarrow (\mathbf{a}[m] < x \Rightarrow F_2) \wedge (\mathbf{a}[m] \geq x \Rightarrow F_3)),$$

kus F_1, F_2 ja F_3 on mingid valemid. See valem nõuab, et kehtiks kas F_1, F_2 ja F_3, vastavalt sellele, kas $\mathbf{a}[m]$ on võrdne, väiksem või suurem x-st. Väite võib seega ümber kirjutada järgmiselt:

$$(\mathbf{a}[m] = x \Rightarrow F_1) \wedge (\mathbf{a}[m] < x \Rightarrow F_2) \wedge (\mathbf{a}[m] > x \Rightarrow F_3) \ .$$

Tehes selle teisenduse meie programmis, saame

$(\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j]) \wedge (k = k_0) \wedge (l = l_0) \wedge (k_0 \leq l_0)$
$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(1)} \wedge R_6^{(1)} \wedge R_7^{(1)}$
$\quad r := 0$
R
$\quad$ *while* $k \leq l \wedge r \neq 1$ *do*
$R \wedge (k \leq l) \wedge (r \neq 1) \wedge (e = \max(l - k + 2 - r, 0))$
$\qquad m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$
$\big(\mathbf{a}[m] = x \Rightarrow R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(5)} \wedge R_6^{(5)} \wedge R_7^{(5)} \wedge e > \max(l - k + 1, 0)\big) \wedge$
$\big(\mathbf{a}[m] < x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)\big) \wedge$
$\big(\mathbf{a}[m] > x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)\big)$
$\qquad$ *if* $\mathbf{a}[m] = x$ *then*
$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(5)} \wedge R_6^{(5)} \wedge R_7^{(5)} \wedge e > \max(l - k + 1, 0)$
$\qquad\quad r := 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
$\qquad$ *else*
$\big(\mathbf{a}[m] < x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)\big) \wedge$
$\big(\mathbf{a}[m] \geq x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)\big)$
$\qquad\quad$ *if* $\mathbf{a}[m] < x$ *then*
$R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)$
$\qquad\qquad k := m + 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
$\qquad\quad$ *else*
$R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)$
$\qquad\qquad l := m - 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
$\qquad\quad$ *fi*
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
$\qquad$ *fi*
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
$\quad$ *od*
$R \wedge (k > l \vee r = 1)$
$(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))$

Viimasena leiame 3. rea eeltingimuse. Saame

$(\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j]) \wedge (k = k_0) \wedge (l = l_0) \wedge (k_0 \leq l_0)$
$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(1)} \wedge R_6^{(1)} \wedge R_7^{(1)}$
1 $r := 0$
R
2 *while* $k \leq l \wedge r \neq 1$ *do*
$R \wedge (k \leq l) \wedge (r \neq 1) \wedge (e = \max(l - k + 2 - r, 0))$
$R^{(3)}$
3 $m := \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$
$\big(\mathbf{a}[m] = x \Rightarrow R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(5)} \wedge R_6^{(5)} \wedge R_7^{(5)} \wedge e > \max(l - k + 1, 0)\big) \wedge$
$\big(\mathbf{a}[m] < x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)\big) \wedge$
$\big(\mathbf{a}[m] > x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)\big)$
4 *if* $\mathbf{a}[m] = x$ *then*
$R_1 \wedge \cdots \wedge R_4 \wedge R_5^{(5)} \wedge R_6^{(5)} \wedge R_7^{(5)} \wedge e > \max(l - k + 1, 0)$
5 $r := 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
6 *else*
$\big(\mathbf{a}[m] < x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)\big) \wedge$
$\big(\mathbf{a}[m] \geq x \Rightarrow R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)\big)$
7 *if* $\mathbf{a}[m] < x$ *then*
$R_1 \wedge R_2^{(8)} \wedge R_3^{(8)} \wedge R_4^{(8)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(8)} \wedge R_7 \wedge e > \max(l - m + 1 - r, 0)$
8 $k := m + 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
9 *else*
$R_1 \wedge R_2^{(10)} \wedge R_3^{(10)} \wedge R_4^{(10)} \wedge R_5 \wedge R_6^{(10)} \wedge R_7 \wedge e > \max(m - k + 1 - r, 0)$
10 $l := m - 1$
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
11 *fi*
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
12 *fi*
$R \wedge e > \max(l - k + 2 - r, 0)$
13 *od*
$R \wedge (k > l \vee r = 1)$
$(r = 1) \Leftrightarrow (\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x))$

Siin $R^{(3)}$ on saadud m-i asendamisel $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$-ga 3. reale järgnevas valemis.

Nagu 3. reale järgnevgi valem, kujutab ka $R^{(3)}$ endast kolme implikatsiooni konjunktsiooni. Järgnevas me kirjutamegi need kolm implikatsiooni lahti. Teame ka, et järgmise sammuna tuleks meil igal pool, kus on kaks valemit teineteise järel, näidata, et esimesest valemist järeldub teine.

Üks neist kohtadest ongi teise ja kolmanda rea vahel. Teemegi siis nii, et samaaegselt $R^{(3)}$-e lahtikirjutamisega näitame ka, kuidas ta järeldub vahetult tema kohal olevast valemist.

4 Alumise valemi järeldumine ülemisest

4.1 2. ja 3. programmirea vahe

Vahetult $R^{(3)}$-e kohal olev valem on järgmiste väidete konjunktsioon:

$$\forall i,j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j]) \tag{1}$$
$$k \leq l \Rightarrow k_0 \leq k \leq l_0 \tag{2}$$
$$k \leq l \Rightarrow k_0 \leq l \leq l_0 \tag{3}$$
$$\mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \wedge k \leq l \Rightarrow \mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[l] \vee \mathbf{a}[k-1] < x < \mathbf{a}[k] \vee \mathbf{a}[l] < x < \mathbf{a}[l+1] \tag{4}$$
$$r = 1 \Rightarrow \mathbf{a}[m] = x \wedge k_0 \leq m \leq l_0 \tag{5}$$
$$k > l \Rightarrow r = 0 \wedge \forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x) \tag{6}$$
$$r \in \{0,1\} \tag{7}$$
$$k \leq l \tag{8}$$
$$r \neq 1 \tag{9}$$
$$e = \max(l - k + 2 - r, 0) \tag{10}$$

4.1.1 $R^{(3)}$-e esimene implikatsioon

Valemi $R^{(3)}$ esimese implikatsiooni vasak pool on

$$\mathbf{a}[\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor] = x \tag{11}$$

Implikatsiooni parem pool on järgmise kaheksa valemi konjunktsioon. Loeme siinkohal need valemid ette ja näitame, kuidas nad järelduvad valemitest (1)–(10) ja (11).

1. $\forall i,j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j])$. See on võrdne valemiga (1).

2. $k \leq l \Rightarrow k_0 \leq k \leq l_0$. See on võrdne valemiga (2).

3. $k \leq l \Rightarrow k_0 \leq l \leq l_0$. See on võrdne valemiga (3).

4. $\mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \wedge k \leq l \Rightarrow \mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[l] \vee \mathbf{a}[k-1] < x < \mathbf{a}[k] \vee \mathbf{a}[l] < x < \mathbf{a}[l+1]$. See on võrdne valemiga (4).

5. $1 = 1 \Rightarrow \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor] = x \wedge k_0 \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor \leq l_0$. Selle implikatsiooni vasak pool on samaselt tõene, järelikult tuleb meil näidata, et implikatsiooni paremaks pooleks olev kahe valemi konjunktsioon on tõene. Vasakpoolne neist valemeist on võrdne valemiga (11). Parempoolne valem järeldub valemeist (8), (2) ja (3).

6. $k > l \Rightarrow 1 = 0 \wedge \forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x)$. See implikatsioon on tõene sellepärast, et tema vasak pool on väär. See järeldub valemist (8).

7. $1 \in \{0, 1\}$. See valem on samaselt tõene.

8. $e > \max(l - k + 1, 0)$. Väited (7) ja (9) annavad $r = 0$. Sellest ja väitest (8) järeldub nüüd, et $l - k + 2 - r = l - k + 2 \geq 2 > 0$ ning seega $e = l - k + 2$ (väidet (10) kasutades) ja $e > 0$. Samuti $e > l - k + 1$ ning seega $e > \max(l - k + 1, 0)$.

4.1.2 $R^{(3)}$-e teine implikatsioon

Valemi $R^{(3)}$ teise implikatsiooni vasak pool on

$$\mathbf{a}[\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor] < x \tag{12}$$

Implikatsiooni parem pool on järgmise kaheksa valemi konjunktsioon. Loeme siinkohal need valemid ette ja näitame, kuidas nad järelduvad valemitest (1)–(10) ja (12).

1. $\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j])$. See on võrdne valemiga (1).

2. $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1 \leq l \Rightarrow k_0 \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1 \leq l_0$. Eeldame, et selle implikatsiooni vasak pool on tõene, meil tuleb siis näidata järgmiste väidete kehtivust.

   - $k_0 \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1$. Valemite (8), (2) ja (3) põhjal on $k_0 \leq k$ ja $k_0 \leq l$. Seega siis ka $k_0 \leq \frac{k+l}{2} < \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1$.
   - $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1 \leq l_0$. Valemite (8) ja (3) põhjal on $l \leq l_0$. Sellest ja implikatsiooni vasakust poolest $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1 \leq l$ saamegi nõutava väite.

3. $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1 \leq l \Rightarrow k_0 \leq l \leq l_0$. See implikatsioon on tõene, sest tema parem pool on tõene. Tema tõesus järeldub valemitest (8) ja (3).

4. $\mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \wedge \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1 \leq l \Rightarrow \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1] \leq x \leq \mathbf{a}[l] \vee \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor] < x < \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1] \vee \mathbf{a}[l] < x < \mathbf{a}[l+1]$. Oletame, et implikatsiooni vasak pool on tõene, s.t. kehtivad

$$\mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \tag{13}$$

$$\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor + 1 \leq l \ . \tag{14}$$

   Samuti oletame, et implikatsiooni paremal poolel oleva disjunktsiooni kaks parempoolset väidet on väärad, s.t. kehtivad

$$x \leq \mathbf{a}[\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor] \vee x \geq \mathbf{a}[\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor + 1] \tag{15}$$

$$x \leq \mathbf{a}[l] \vee x \geq \mathbf{a}[l+1]; \tag{16}$$

meil tuleb näidata, et kehtib

$$\mathbf{a}[\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor + 1] \le x \le \mathbf{a}[l] \ . \tag{17}$$

Väidetest (12) ja (15) järeldub

$$x \ge \mathbf{a}[\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor + 1], \tag{18}$$

mis annab meile (17) vasakpoolse võrratuse. Väide (8) annab meile $k \le \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$, mis koos massiivi $\mathbf{a}$ sorteeritusega (1) ja väitega (18) annab

$$x \ge \mathbf{a}[k] \ . \tag{19}$$

Väited (13) ja (8) annavad meile väiteks (4) oleva implikatsiooni vasaku poole, järelikult peab ka paremaks pooleks olev disjunktsioon tõene olema. Selle disjunktsiooni teine ja kolmas komponent on vastuolus vastavalt väidetega (19) ja (16), seega on esimene komponent $\mathbf{a}[k] \le x \le \mathbf{a}[l]$ tõene. See annabki meile (17) parempoolse võrratuse.

5. $r = 1 \Rightarrow \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor] = x \wedge k_0 \le \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor \le l_0$. See implikatsioon on tõene, sest tema vasak pool on väär (9).

6. $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1 > l \Rightarrow r = 0 \wedge \forall i : (k_0 \le i \le l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \ne x)$. Oletame, et implikatsiooni vasak pool

$$\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor + 1 > l \tag{20}$$

on tõene. Implikatsiooni parema poole esimene pool ($r = 0$) on tõene tänu väidetele (7) ja (9). Uurime teise poole

$$\forall i : (k_0 \le i \le l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \ne x)$$

tõesust, oletame vastuväiteliselt, et ta on väär. Sel juhul kehtib tema eitus

$$\exists i : (k_0 \le i \le l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x) \ . \tag{21}$$

Väidetest (8) ja (20) järeldub, et $k = l = \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$. Väidetest (21) ja (1) järeldub, et $\mathbf{a}[k_0] \le x \le \mathbf{a}[l_0]$. Sellest väitest ja väitest $k = l$ järeldub implikatsiooni (4) abil, et $\mathbf{a}[k] \le x \le \mathbf{a}[l]$ või $\mathbf{a}[k-1] < x < \mathbf{a}[k]$ või $\mathbf{a}[l] < x < \mathbf{a}[l+1]$. Neist väidetest teine ja kolmas tähendavad, et massiivis $\mathbf{a}$ pole elementi x, s.t. nad on vastuolus väitega (21). Kui oletame, et esimene väide kehtib, siis annab $k = l = \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$ meile, et $\mathbf{a}[k] = \mathbf{a}[l] = \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor] = x$, mis on vastuolus väitega (12).

7. $r \in \{0, 1\}$. See on võrdne valemiga (7).

8. $e > \max(l - \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1 - r, 0)$. Analoogiliselt $R^{(3)}$ esimese implikatsiooniga saame, et $e = l - k + 2 > 0$. Kuna $k \le l$ (8), siis $k \le \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$. Seega

$$l - \lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor + 1 - r \le l - k + 1 - r < l - k + 2 = e,$$

s.t. e on suurem kui tõestatavas väites oleva maksimumi võtmise operatsiooni mõlemad argumendid.

4.1.3 $R^{(3)}$-e kolmas implikatsioon

Valemi $R^{(3)}$ kolmas implikatsioon on küllaltki sarnane teisega. Tema vasak pool on

$$\mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor] > x \tag{22}$$

Implikatsiooni parem pool on järgmise kaheksa valemi konjunktsioon. Loeme siinkohal need valemid ette ja näitame, kuidas nad järelduvad valemitest (1)–(10) ja (22).

1. $\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j])$. See on võrdne valemiga (1).
2. $k \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1 \Rightarrow k_0 \leq k \leq l_0$. See implikatsioon on tõene, sest tema parem pool on tõene. Tema tõesus järeldub valemitest (8) ja (2).
3. $k \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1 \Rightarrow k_0 \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1 \leq l_0$. Eeldame, et selle implikatsiooni vasak pool on tõene, meil tuleb siis näidata järgmiste väidete kehtivust.
   - $k_0 \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1$. Valemite (8) ja (2) põhjal on $k_0 \leq k$. Sellest ning implikatsiooni vasakust poolest $k \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1$ saamegi nõutava väite.
   - $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1 \leq l_0$. Valemite (8), (2) ja (3) põhjal on $k \leq l_0$ ja $l \leq l_0$. Seega siis ka $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1 < \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor \leq l_0$.
4. $\mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \wedge k \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1 \Rightarrow \mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1] \vee \mathbf{a}[k-1] < x < \mathbf{a}[k] \vee \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1] < x < \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor]$. Oletame, et implikatsiooni vasak pool on tõene, s.t. kehtivad

$$\mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \tag{23}$$
$$k \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1 \ . \tag{24}$$

   Samuti oletame, et implikatsiooni paremal poolel oleva disjunktsiooni kaks parempoolset väidet on väärad, s.t. kehtivad

$$x \leq \mathbf{a}[k-1] \vee x \geq \mathbf{a}[k] \tag{25}$$
$$x \leq \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1] \vee x \geq \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor]; \tag{26}$$

   meil tuleb näidata, et kehtib

$$\mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1] \ . \tag{27}$$

   Väidetest (22) ja (26) järeldub

$$x \leq \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1], \tag{28}$$

   mis annab meile (27) parempoolse võrratuse. Väide (8) annab meile $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor \leq l$, mis koos massiivi **a** sorteeritusega (1) ning väitega (28) annab

$$x \leq \mathbf{a}[l] \ . \tag{29}$$

Väited (23) ja (8) annavad meile väiteks (4) oleva implikatsiooni vasaku poole, järelikult peab ka paremaks pooleks olev disjunktsioon tõene olema. Selle disjunktsiooni teine ja kolmas komponent on vastuolus vastavalt väidetega (25) ja (29), seega on esimene komponent $\mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[l]$ tõene. See annabki meile (27) vasakpoolse võrratuse.

5. $r = 1 \Rightarrow \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor] = x \wedge k_0 \leq \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor \leq l_0$. See implikatsioon on tõene, sest tema vasak pool on väär (9).

6. $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor + 1 > l \Rightarrow r = 0 \wedge \forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x)$. Oletame, et implikatsiooni vasak pool
$$\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor + 1 > l \tag{30}$$
on tõene. Implikatsiooni parema poole esimene pool ($r = 0$) on tõene tänu väidetele (7) ja (9). Uurime teise poole
$$\forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x)$$
tõesust, oletame vastuväiteliselt, et ta on väär. Sel juhul kehtib tema eitus
$$\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x) \ . \tag{31}$$
Väidetest (8) ja (30) järeldub, et $k = l = \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$. Väidetest (31) ja (1) järeldub, et $\mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0]$. Sellest väitest ja väitest $k = l$ järeldub implikatsiooni (4) abil, et $\mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[l]$ või $\mathbf{a}[k-1] < x < \mathbf{a}[k]$ või $\mathbf{a}[l] < x < \mathbf{a}[l+1]$. Neist väidetest teine ja kolmas tähendavad, et massiivis $\mathbf{a}$ pole elementi x, s.t. nad on vastuolus väitega (31). Kui oletame, et esimene väide kehtib, siis annab $k = l = \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$ meile, et siis $\mathbf{a}[k] = \mathbf{a}[l] = \mathbf{a}[\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor] = x$, mis on vastuolus väitega (22).

7. $r \in \{0, 1\}$. See on võrdne valemiga (7).

8. $e > \max(\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - k + 1 - r, 0)$. Analoogiliselt $R^{(3)}$ esimese implikatsiooniga saame, et $e = l - k + 2 > 0$. Kuna $k \leq l$ (8), siis $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor \leq l$. Seega
$$\lfloor \tfrac{k+l}{2} \rfloor - k + 1 - r \leq l - k + 1 - r < l - k + 2 = e,$$
s.t. e on suurem kui tõestatavas väites oleva maksimumi võtmise operatsiooni mõlemad argumendid.

4.2 Programmi algus

Programmi alguses on meil kaks valemit teineteise järel. Neist esimene on järgmiste väidete konjunktsioon:
$$\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j]) \tag{32}$$
$$k = k_0 \tag{33}$$
$$l = l_0 \tag{34}$$
$$k_0 \leq l_0 \ . \tag{35}$$

Väidetest (33)—(35) võime veel tuletada

$$k \leq l \ . \tag{36}$$

Teine valem on seitsme väite konjunktsioon. Loeme need väited üles ja näitame, kuidas igaüks neist järeldub väidetest (32)—(35).

1. $\forall i, j : (i \leq j \Rightarrow \mathbf{a}[i] \leq \mathbf{a}[j])$. See valem on võrdne valemiga (32).

2. $k \leq l \Rightarrow k_0 \leq k \leq l_0$. Selle implikatsiooni parema poole vasakpoolne võrratus järeldub valemist (33) ning parempoolne võrratus valemitest (33) ja (35).

3. $k \leq l \Rightarrow k_0 \leq l \leq l_0$. Selle implikatsiooni parema poole parempoolne võrratus järeldub valemist (34) ning vasakpoolne võrratus valemitest (34) ja (35).

4. $\mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0] \wedge k \leq l \Rightarrow \mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[l] \vee \mathbf{a}[k-1] < x < \mathbf{a}[k] \vee \mathbf{a}[l] < x < \mathbf{a}[l+1]$. Kui selle implikatsiooni vasak pool on tõene, siis peab kehtima $\mathbf{a}[k_0] \leq x \leq \mathbf{a}[l_0]$. Siis aga valemite (33) ja (34) põhjal $\mathbf{a}[k] \leq x \leq \mathbf{a}[l]$, s.t. implikatsiooni paremaks pooleks olev disjunktsioon on tõene.

5. $0 = 1 \Rightarrow \mathbf{a}[m] = x \wedge k_0 \leq m \leq l_0$. See implikatsioon on tõene, sest tema vasak pool on väär.

6. $k > l \Rightarrow 0 = 0 \wedge \forall i : (k_0 \leq i \leq l_0 \Rightarrow \mathbf{a}[i] \neq x)$. See implikatsioon on tõene, sest tema vasak pool on väär (36).

7. $0 \in \{0, 1\}$. See valem on samaselt tõene.

4.3 Programmi lõpp

Programmi lõpus on meil kaks valemit teineteise järel. Neist esimene on väidete (1)—(7) ning lisaks sellele veel väite

$$k > l \vee r = 1 \tag{37}$$

konjunktsioon. Meil tuleb näidata, et $r = 1$ parajasti siis, kui $\exists i : (k_0 \leq i \leq l_0 \wedge \mathbf{a}[i] = x)$. Kui $r = 1$, siis sobiva i saame valemist (5). Kui $r \neq 1$, siis (37) põhjal $k > l$. Valemist (6) saame siis, et sobivat i-d ei leidu.