# Graafid

Ahto Buldas, Peeter Laud, Jan Willemson

3. detsember 2002. a.

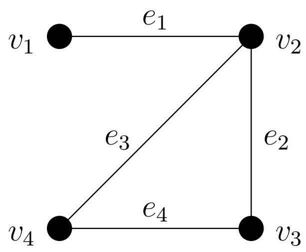
# Sisukord

# Peatükk 1

# Põhimõisted

*Graaf* (ka *mittesuunatud graaf*) $G$ koosneb *tippude* hulgast $V$ (tähistatakse vahel ka $V(G)$) ja *servade* hulgast $E$ (tähistatakse vahel ka $E(G)$). Graafi struktuur määratakse mingi kujutuse, nn. *intsidentsusfunktsiooni* $\mathcal{E}$ ette andmisega, mis igale servale $e \in E$ seab vastavusse mingi tippude paari $\{x, y\}$, mille elemente nimetatakse serva *otstippudeks*. Öeldakse, et serv $e$ on *intsidentne* tipuga $x$ kui $x \in \mathcal{E}(e)$. Võib juhtuda ka, et serva $e$ otstipud langevad kokku, st $\mathcal{E}(e)$ on võrdne üheelemendilise hulgaga $\{x\}$. Sellist serva nimetatakse *silmuseks*.

| $e$ | $\mathcal{E}(e)$ |
|---|---|
| $e_1$ | $\{v_1, v_2\}$ |
| $e_2$ | $\{v_2, v_3\}$ |
| $e_3$ | $\{v_2, v_4\}$ |
| $e_4$ | $\{v_3, v_4\}$ |




**Joonis 1.1:** Graafi esitus funktsiooni $\mathcal{E}$ abil (vasakul) ja joonisena (paremal).

Tavaliselt esitatakse graafi joonisena, kus iga tipp on kujutatud punktina tasandil ning iga serv on kujutatud kahte tippu ühendava joonena. Graafi nimetatakse *tasandiliseks* (või ka *planaarseks*) kui teda saab esitada joonisena, kus graafi servi esitavad jooned omavahel ei lõiku. Iga graaf ei pruugi olla tasandiline. Ehkki jooniseid kasutatakse matemaatikas ainult näitlikustamise vahendina, saab isegi graafi kui "joonist" esitada matemaatiliselt rangelt topoloogia vahenditega. Käesolevas kursuses on graaf aga eelkõige kombinatooriline objekt, mille topoloogiline esitus ei ole tema omaduste tuletamisel määrav. Erandiks on ehk kursuse lõpupoole käsitletav tasandiliste graafide teema.

## 1.1 Suunatud graafid

Servaga $e$ intsidentsete tippude järjekord ei ole graafi definitsioonis oluline. Hulka $\mathcal{E}(e)$ kuuluvatel tippudel ei ole servast endast tulenevalt mingisugust eelisjärjestust.[1] Mõnikord on aga vaja anda $\mathcal{E}(e)$ elementidele eelisjärjestus. See viib nn. *suunatud graafi* mõisteni, milles hulga $E$ elemente nimetatakse *kaarteks* (ka *suunatud servadeks/kaarteks*) ja milles intsidentsusfunktsioon $\mathcal{E}$ seab kaarele $e$ vastavusse hulga $\{x, y\}$ asemel järjestatud paari $(x, y)$, st $E \xrightarrow{\mathcal{E}} V \times V$. Kaart tipst $x$ tippu $y$ tähistatakse joonistel noolega varustatud joonega, nii et nool osutab tipu $y$ suunas.

## 1.2 Formaalne graafikeel.

Graafides toimuva matemaatiliselt korrektseks ja samas näitlikuks kirjapanekuks kasutatakse sageli erisümboleid intsidentsusseoste esitamiseks. Näiteks kirjapilt $x \overset{e}{—} y$ tähendab, et $e$ on serv tippude $x$ ja $y$ vahel, st $\mathcal{E}(e) = \{x, y\}$. Kirjapildid $x \overset{e}{\to} y$ ja $y \overset{e}{\leftarrow} x$ tähistavad mõlemad fakti, et $e$ on tipust $x$ tippu $y$ suunduv kaar, st $\mathcal{E}(e) = (x, y)$. Neid sümboleid võib vaadelda kui predikaatsümboleid ja nende abil formaalselt kirja panna graafide omadusi. Graafe võib siis vaadelda kui tekkiva predikaatarvutuse lõplikke mudeleid. Näiteks omadust

$$\forall x \forall y [\exists e [x \overset{e}{—} y] \vee x = y]$$

rahuldav mudel on graaf, mille iga kahe erineva tipu vahel on serv (nn. *täisgraaf*). Formaalne graafikeel lubab jooniseid kasutada kui matemaatiliselt korrektset keelt. Ka nimetute tippude kasutamine on võimalik. Näiteks lause $x — y$ loetakse ekvivalentseks lausega $\exists e[x \overset{e}{—} y]$ ja lause $\overset{e_1}{—} \cdot \overset{e_2}{—}$ lausega $\exists x \exists y \exists z [x \overset{e_1}{—} y \wedge y \overset{e_2}{—} z]$.

[1] Järjestus võib tekkida ainult kaudselt, seoses serva $e$ "ümbritseva" graafi struktuuriga.

## 1.3 Kui kordsed servad/kaared puuduvad.

Kaks erinevat serva/kaart $e_1$ ja $e_2$ võivad põhimõtteliselt olla intsidentsed samade tippudega, st $\mathcal{E}(e_1) = \mathcal{E}(e_2)$. Võib isegi juhtuda, et tippude arv on lõplik ja servade arv lõpmatu (ning vahest ka loomulikult vastupidi). Valdavalt me siiski piirdume graafidega, kus kordsed servad puuduvad, st kujutus $\mathcal{E}$ on injektiivne. Graafi, mis kordseid kaari ega silmuseid ei sisalda, nimetatakse *lihtgraafiks*. Seljuhul on otstarbekas samastada kaarte hulk $E$ otseruudu $V \times V$ alamhulgaga, st mingi antirefleksiivse binaarse relatsiooniga tippude hulgal $V$. Graafi *servaks* tippude $x$ ja $y$ vahel nimetame seljuhul kahest kaarest koosnevat hulka $\{(x, y), (y, x)\}$. Seega on graafikeele sümbolitel meie jaoks järgmine tähendus:

1. $x \xrightarrow{e} y$ tähendab, et $e = (x, y) \in E$.
2. $x \overset{e}{—} y$ tähendab, et $e = \{(x, y), (y, x)\} \subseteq E$.

Graafi saab seljuhul defineerida kui paari $G = (V, E)$, kus $E$ on mingi binaarne relatsioon hulgal $V$. Relatsiooni $E$ sümmeetrilisus $(x \to y \;\Rightarrow\; x \leftarrow y)$ tähendab, et graafis pole suunatud kaari.

Lihtgraafi $G = (V, E)$ *täiendgraafiks* $\overline{G}$ nimetatakse graafi $(V, \overline{E})$, kus

$$\overline{E} := \{(x, y) \mid x, y \in V,\, x \neq y,\, (x, y) \notin E\}.$$

Lihtne on veenduda, et mistahes lihtgraaf langeb kokku oma täiendgraafi täiendgraafiga, st $\overline{\overline{G}} = G$.

## 1.4 Graafide monomorfism ja isomorfism.

Olgu meil kaks graafi $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$. Injektiivset kujutust $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ nimetatakse *monomorfismiks* (ja tähistatakse $G_1 \overset{f}{\hookrightarrow} G_2$ ) kui mistahes tipupaari $x, y \in V_1$ korral

$$(x, y) \in E_1 \;\Leftrightarrow\; (f(x), f(y)) \in E_2.$$

Kui leidub monomorfism $G_1 \hookrightarrow G_2$, siis öeldakse, et graaf $G_1$ on (isomorfselt) *sisestatav* graafi $G_2$. Sürjektiivset monomorfismi $f$ nimetatakse *isomorfismiks* ja tähistatakse $G_1 \overset{f}{\cong} G_2$. Isomorfismi $G \overset{\sigma}{\cong} G$ nimetatakse graafi $G$ *automorfismiks.*

## 1.5 Graafi naabrusmaatriks (ehk kaaslusmaatriks).

Olgu $G = (V, E)$ lõplik mittesuunatud silmusteta graaf tippude hulgaga $V = \{v_1, ..., v_n\}$. $n \times n$ maatriksi $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$, kus

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{kui } (v_i, v_j) \in E; \\ 0, & \text{kui } (v_i, v_j) \notin E, \end{cases}$$

nimetatakse graafi $G$ *naabrusmaatriksiks*. Tippe $v_i$ ja $v_j$ nimetatakse *naabriteks*, kui $(v_i, v_j) \in E$, ehk $a_{i,j} = 1$. Tipu $v \in V$ naabrite arvu nimetatakse tipu $v$ *astmeks* (ka *valentsiks*) ja tähistatakse $\deg(v)$. Graafi nimetatakse *regulaarseks* kui kõikide tippude astmed on võrdsed.

**Teoreem 1.1** *Lõplikus mittesuunatud lihtgraafis on alati paarisarv paaritu astmega tippe.*

Tõestus. Mittesuunatud silmusteta graafi $G$ naabrusmaatriks $\mathbf{A}$ on sümmeetriline ja selle peadiagonaalil on nullid. Loendame maatriksis $\mathbf{A}$ sisalduvaid ühtesid (st graafi kaari, mida on täpselt $|E|$ tükki) kahel erineval viisil: (1) servade kaupa; (2) tippude kaupa. Igale servale $v_i$ — $v_j$ vastab ühtede paar $a_{i,j} = a_{j,i} = 1$. Erinevatele servadele vastavad ühtede paarid ei lõiku ja seetõttu on ühtede (st graafi kaarte) arv võrdne kahekordse servade arvuga $s$. Teisest küljest, igale tipule $v_i$ vastab rida maatriksis $\mathbf{A}$, kusjuures vastava rea ühtede arv on võrdne tipu $v_i$ astmega $\deg(v_i)$. Seega

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = |E| = 2 \cdot s, \tag{1.1}$$

millest teoreemi väide tuleneb triviaalselt. $\square$

## 1.6 Alamgraafid. Teed. Sidusus.

Ütleme, et graaf $G_1 = (V_1, E_1)$ on graafi $G_2 = (V_2, E_2)$ *alamgraaf* (tähistame $G_1 \leq G_2$), kui kehtivad sisalduvused $V_1 \subseteq V_2$ ja $E_1 \subseteq E_2$. Alamgraafi $G_1$ nimetatakse *indutseeritud alamgraafiks*, kui samasuskujutus $V_1 \xrightarrow{1_{V_1}} V_1 \subseteq V_2$ on graafide $G_1$ ja $G_2$ monomorfism, st kui $G_1 \overset{1_{V_1}}{\hookrightarrow} G_2$.

*Teeks* ehk *ahelaks* $P$ tipust $x$ tipuni $y$ graafis $G = (V, E)$ nimetatakse jada

$$P\colon\ x = x_0 \xrightarrow{e_1} x_1 \xrightarrow{e_2} x_2 \xrightarrow{e_3} x_3 \ \ldots\ x_{k-1} \xrightarrow{e_k} x_k = y,$$

kus $\{x_0, \ldots, x_k\} \subseteq V$ ja $\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq E$. Asjaolu, et $P$ on tee tipust $x$ tipuni $y$ tähistatakse $x \overset{P}{\rightsquigarrow} y$. Kirjapilti $x \rightsquigarrow y$ tuleb mõista kui lauset $\exists P[x \overset{P}{\rightsquigarrow} y]$. Kui kõik tipud $x_1 \ldots x_k$ on erinevad, siis teed $P$ nimetatakse *lihtteeks* ehk (*lihtahelaks*). Kui $P$ on lihttee, siis arvu $k$ nimetatakse tee $P$ *pikkuseks* ja tähistatakse sümboliga $|P|$. Teed kujul $x \overset{P}{\rightsquigarrow} x$ nimetatakse *kinniseks*. Kinnist lihtteed nimetatakse *tsükliks*.

**Teoreem 1.2** *Lõplik graaf $G$, mille iga tipu valents on vähemalt kaks, sisaldab tsüklit.*

Tõestus. Kui $G$ sisaldab silmuseid või kordseid kaari, siis on teoreemi väide triviaalselt täidetud. Seetõttu eeldame edaspidi, et $G$ on lihtgraaf. Oletame vastuväiteliselt, et $G$ ei sisalda ühtegi tsüklit. Olgu $v_1 \in V$ mingi tipp. Vastavalt eeldusele $\deg(v_1) \geq 2$ leidub vähemalt üks tipp $v_2 \neq v_1$, nii et $v_1 — v_2$. Kuna ka $\deg(v_2) \geq 2$, siis leidub vähemalt üks tipp $v_3 \notin \{v_1, v_2\}$ (sest tsüklid puuduvad), nii et $v_1 — v_2 — v_3$. Jätkates analoogiliselt, kui leidub lihtahel $v_1 — v_2 — \ldots — v_k$ pikkusega $k-1$, siis $\deg(v_k) \geq 2$ tõttu leidub tipp $v_{k+1} \notin \{v_1, ..., v_k\}$ nii et $v_k — v_{k+1}$, sest kui $v_k — v_i$ mingi $i < k-1$ korral, siis moodustaksid tipud $(v_i, v_{i+1}, ..., v_k)$ tsükli. Seega leidub graafis $G$ lihtahel

$$v_1 — v_2 — \ldots — v_k — v_{k+1}$$

pikkusega $k$. Induktsiooni abil saame siit, et graafis $G$ leidub kui tahes pikki lihtahelaid, mis on vastuolus graafi lõplikkusega. $\square$

## 1.7 Sidusad graafid. Kaugusfunktsioon.

Graafi $G$ nimetatakse *sidusaks*, kui graafis $G$ kehtib lause $\forall x \forall y[x \rightsquigarrow y]$ (või nagu loogikud tähistavad $G \models \forall x \forall y[x \rightsquigarrow y]$). On lihtne veenduda, et seos $\cdot \rightsquigarrow \cdot$ on *ekvivalentsusseos*. Vastavaid ekvivalentsiklasse nimetame graafi *sidususkomponentideks*.

Olgu $u$ ja $v$ sidusa mittesuunatud graafi $G = (V, E)$ kaks tippu. *Kauguseks* $d(u, v)$ tippude $u$ ja $v$ vahel nimetatakse neid tippe ühendava lühima lihtahela pikkust. On lihtne veenduda, et paar $(V, d)$ rahuldab meetrilise ruumi aksioome, st

1) $d(u, v) = 0$ parajasti siis, kui $u = v$.

2) $d(u, v) = d(v, u)$ mistahes tippude $u$ ja $v$.

3) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ mistahes tippude $u, v, w \in V$ korral.

## 1.8 Mõned eritüüpi graafid

**Nullgraafid.** Graafe, milles ei ole ühtegi serva, nimetame nullgraafideks. Nullgraafi, milles on $n$ tippu, tähistame sümboliga $O_n$.

**Täisgraafid.** Graafe, milles iga kahe erineva tipu vahel on üks serv, nimetame täisgraafideks. Täisgraafi, milles on $n$ tippu, tähistame sümboliga $K_n$.

**Lause 1.3** *Graafis $K_n$ on $\frac{n(n-1)}{2}$ serva.*

Tõestus. Ilmne. $\square$

**Kahealuselised graafid.** Graaf $G = (V, E)$ on *kahealuseline*, kui tema tippude hulk $V$ on tükeldatav kaheks hulgaks $V_1$ ja $V_2$ (s.t. $V_1 \cup V_2 = V$ ja $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), nii et iga serva $e \in E$ jaoks on $e$ üks otstipp hulgas $V_1$ ja teine hulgas $V_2$. Hulkasid $V_1$ ja $V_2$ nimetame graafi $G$ *alusteks*.

Kahealuselist graafi nimetame *täielikuks kahealuseliseks graafiks*, kui tema kahe tipu vahel on serv *parajasti siis*, kui need kaks tippu kuuluvad erinevatesse alustesse. Täielikku kahealuselist graafi, mille ühes aluses on $m$ tippu ja teises aluses on $n$ tippu, tähistame sümboliga $K_{m,n}$.

**Lause 1.4** *Graafis $K_{m,n}$ on $m + n$ tippu ja $mn$ serva.*

Tõestus. Ilmne. $\square$

**Lemma 1.5** *Graaf $G$ on kahealuseline parajasti siis, kui iga tema sidususkomponent on kahealuseline.*

Tõestus. Ilmne. $\square$

**Teoreem 1.6** *Graaf on kahealuseline parajasti siis, kui kõik temas olevad tsüklid on paarisarvulise pikkusega.*

Tõestus. **Suund $\Rightarrow$.** Olgu $G$ graaf, olgu $V_1$ ja $V_2$ graafi tema alused ja olgu $C$ mingi tsükkel selles graafis. Selles tsüklis esinevad tipud alusest $V_1$ vaheldumisi tippudega alusest $V_2$, järelikult on $C$-s alustest $V_1$ ja $V_2$ ühepalju tippe, seega on tippude koguarv $C$-s paarisarv.

**Suund $\Leftarrow$.** Olgu graafi $G$ kõik tsüklid paarisarvulise pikkusega. Eeldame, et $G$ on sidus, lemma 1.5 järgi ei kitsenda selline eeldus üldisust.

Olgu $u$ ja $v$ graafi $G$ kaks tippu ning olgu $P_1$ ja $P_2$ kaks lihtahelat tipust $u$ tippu $v$. Ahelate $P_1$ ja $P_2$ pikkustel on sama paarsus. Tõepoolest, kui ahelatel $P_1$ ja $P_2$ pole teisi ühiseid tippe peale $u$ ja $v$, siis:

- kinnine ahel, mille moodustavad $P_1$ ning tagurpidi pööratud $P_2$, on tsükkel;
- selle tsükli pikkus on võrdne arvuga $|P_1| + |P_2|$;
- teoreemi eelduste kohaselt $|P_1| + |P_2|$ paarisarv, seega on $|P_1$ ja $|P_2|$ sama paarsusega.

Kui ahelatel $P_1$ ja $P_2$ on teisi ühiseid tippe peale $u$ ja $v$, siis tõestame me väite $|P_1|$ ja $|P_2|$ paarsuse kohta induktsiooniga üle $|P_1|$ ja $|P_2|$. Olgu $w$ tipp, mis esineb nii $P_1$-s kui ka $P_2$-s. Olgu $P_1'$ ahela $P_1$ osa tipust $u$ tipuni $w$ ning $P_1''$ ahela $P_1$ osa tipust $w$ tipuni $v$. Samamoodi, olgu $P_2'$ ahela $P_2$ osa tipust $u$ tipuni $w$ ja $P_2''$ ahela $P_2$ osa tipust $w$ tipuni $v$. Teed $P_1'$ ja $P_1''$ on lühemad kui $P_1$ ning teed $P_2'$ ja $P_2''$ on lühemad kui $P_2$. Induktsiooni eelduse järgi on siis $|P_1'|$ ja $|P_2'|$ sama paarsusega ning $|P_1''|$ ja $|P_2''|$ sama paarsusega. Seega on ka $|P_1| = |P_1'| + |P_1''|$ ja $|P_2| = |P_2'| + |P_2''|$ sama paarsusega.

Ahelate $P_1$ ja $P_2$ pikkustel on sama paarsus ka siis, kui me ei nõua, et nad oleksid tingimata *liht*ahelad. Tõepoolest, me võime ahelaist $P_1$ ja $P_2$ eemaldada tsükleid seni, kuni nad muutuvad lihtahelateks. Tsüklite eemaldamine ei muuda ahela pikkuse paarsust, kuna kõik tsüklid on paarisarvulise pikkusega.

Olgu nüüd $u$ graafi $G$ mingi fikseeritud tipp. Defineerime $G$ tipuhulgal järgmise tükelduse $V = V_1 \cup V_2$:

$$V_1 = \{v \mid v \in V, \forall u \overset{P}{\rightsquigarrow} v : |P| \text{ on paaris}\}$$
$$V_2 = \{v \mid v \in V, \forall u \overset{P}{\rightsquigarrow} v : |P| \text{ on paaritu}\}$$

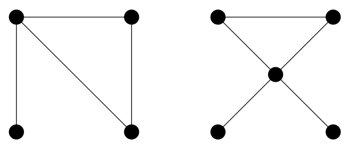
Eelnev arutelu näitab, et iga graafi $G$ tipp tõepoolest kuulub ühte neist kahest hulgast.

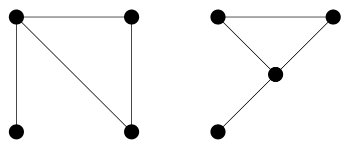
Olgu $v, v' \in V_1$. Sel juhul ei saa nende tippude vahel serva olla. Tõepoolest, oletame, et $e$ on graafi $G$ serv ja $\mathcal{E}(e) = \{v, v'\}$. Olgu $P$ mingi ahel tipust $u$ tippu $v$, selle ahela pikkus on paarisarv. Siis $u \overset{P}{\rightsquigarrow} v \to v'$ on paaritu-arvulise pikkusega ahel tipust $u$ tippu $v'$, mis on vastuolus eeldusega $v' \in V_1$. Analoogiliselt näitame, et kahe hulka $V_2$ kuuluva tipu vahel ei ole servi.

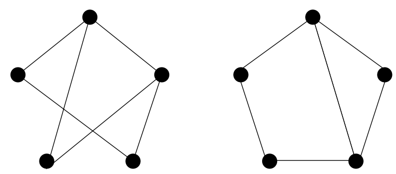
Seega on tipuhulga $V$ tükeldus hulkadeks $V_1$ ja $V_2$ kahealuselise graafi definitsioonis nõutud omadustega. $\square$

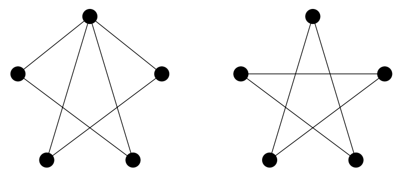
## 1.9 Ülesanded

**Ülesanne 1.** Kas graafid järgmistes paarides on isomorfsed? Miks?

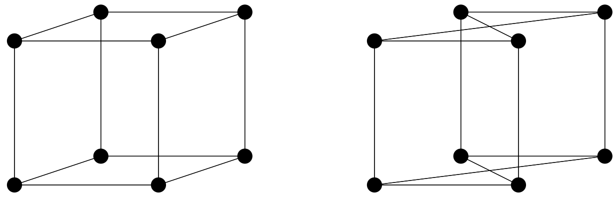
1. 

2. 

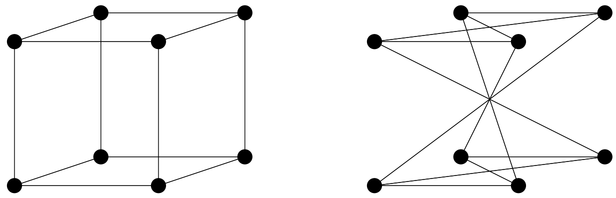
3. 

4. 

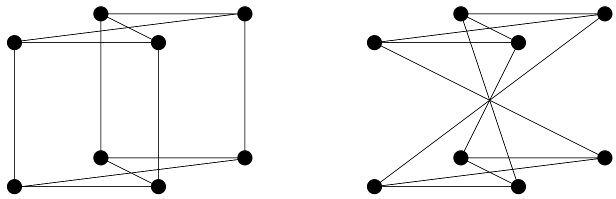
5.



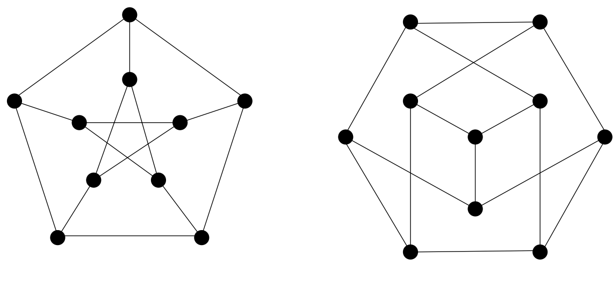
6.



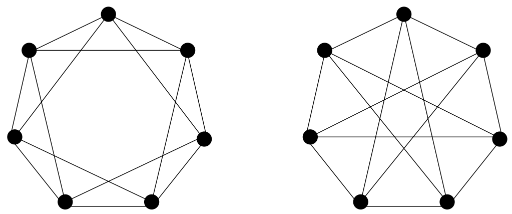
7.



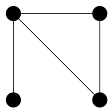
8.

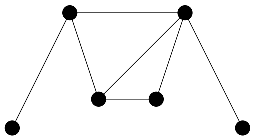


9.



**Ülesanne 2.** Graafi isomorfismi iseendaga nimetatakse graafi *automorfismiks*. Graafi $G$ kõigi automorfismide hulka tähistame $Aut(G)$. Leia $|Aut(G)|$, kui graaf $G$ on

1. 

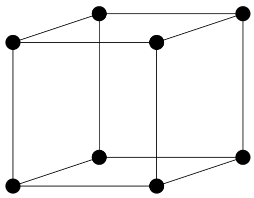
2. 

3. $K_n$

4. $O_n$

5. $P_n$ ($n$-tipuline lihtahel)

6. $C_n$ ($n$-tipuline tsükkel)

7. 

8. $Pet$ (*Peterseni graaf*, see on graaf number 8 ülesandest 1).

**Ülesanne 3.** Tõesta, et $Aut(G)$ on rühm teisenduste kompositsiooni suhtes. Leia graaf, mille automorfismirühm on isomorfne rühmaga $\mathbb{Z}_n$.

**Ülesanne 4.** Joonista graafe, mis on isomorfsed oma täiendgraafiga ja omavad 4 (5,8) tippu. Tõesta, et kui graaf on isomorfne oma täiendgraafiga, jagub ta tippude arv 4ga või annab 4ga jagades jäägi 1.

**Ülesanne 5.** Tõesta, et $Aut(G) = Aut(\overline{G})$.

**Ülesanne 6.** Tõesta, et kui $|V(G)| > 1$, siis leidub lihtgraafis $G$ kaks võrdse astmega tippu.

**Ülesanne 7.** Tõesta, et mittesidusa graafi täiendgraaf on sidus.

**Ülesanne 8.** Olgu $V' \subseteq V(G)$. Tõesta, et hulga $V'$ poolt graafis $G$ indutseeritud alamgraafi täiendgraaf võrdub graafis $\overline{G}$ hulga $V'$ poolt indutseeritud alamgraafiga.

**Ülesanne 9.** Graafi $G$ *servgraafiks* $L(G)$ nimetame graafi tipuhulgaga

$$V(L(G)) = E(G)$$

ja servahulgaga

$$E(L(G)) = \{(e_1, e_2) : \exists\, u, v, w \in V(G),\ v \neq w,\ e_1 = (u, v),\ e_2 = (u, w)\}.$$

Tõesta, et $\overline{L(K_5)} \cong Pet$.

**Ülesanne 10.** Tipu $v$ *ekstsentrilisuseks* nimetatakse suurust

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v).$$

Graafi *raadius* $r(G)$ ja *diameeter* $d(G)$ defineeritakse kui

$$r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v) \quad \text{ja} \quad d(G) = \max_{v \in V(G)} e(v).$$

Tippu $v$ nimetatakse graafi $G$ *tsentriks*, kui $e(v) = r(G)$. Tõesta, et suvalise graafi $G$ korral

$$d(G) \leq 2 \cdot r(G).$$

**Ülesanne 11.** Kas võib juhtuda, et $r(G) = d(G)$? Kui jah, siis milliseid väärtusi võib see suurus omandada?

**Ülesanne 12.** Joonista graaf, millel on täpselt 3 tsentrit, kuid $|V(G)| > 3$. Milliste $n$ väärtuste korral leidub sidus graaf, millel on täpselt $n$ tsentrit?

**Ülesanne 13.** Mistahes naturaalarvu $k > 1$ jaoks defineeritakse *paaritu graaf* $Odd_k$ järgmiselt. Olgu $S$ mingi $(2k-1)$-elemendiline hulk. Graafi $Odd_k$ tipuhulk on

$$V(Odd_k) = \mathcal{P}_{k-1}(S)$$

ja servahulk

$$E(Odd_k) = \{(A, B) |\ A \cap B = \emptyset\}.$$

Tõesta, et $Odd_3 \cong Pet$.

**Ülesanne 14.** Olgu graafid $G$ ja $H$ antud vastavate tipu- ja servahulkadega:

$$\begin{aligned}
&V(G) = \mathcal{P}(\{x, y, z\});\\
&E(G) = \{(A, B) : \; A \subseteq B, \, A \neq B\};\\
&V(H) = \{d | \; d \in \mathbb{N}, \, d \mid 30\};\\
&E(H) = \{(a, b) : \; a \mid b, \, a \neq b\}.
\end{aligned}$$

Tõesta, et $G \cong H$.

**Ülesanne 15.** *Kolmnurgaks* graafis $G$ nimetame sellist kolmeelemendilist hulka $K = \{u, v, w\} \subseteq V(G)$, et $(u, v)$, $(v, w)$, $(u, w) \in E(G)$. Graafi $G$ *kolmnurkade graafiks* $T(G)$ nimetame graafi tipuhulgaga

$$V(T(G)) = \{K : \, K \text{ on graafi } G \text{ kolmnurk}\}$$

ja servahulgaga

$$E(T(G)) = \{(K_1, K_2) : \, |K_1 \cap K_2| = 2\}.$$

Tõesta, et

1. $T(K_4) \cong K_4$,
2. $T(K_5) \ncong Pet$.

**Ülesanne 16.** Defineerime graafid $G_n$ tipuhulgaga

$$V(G_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$$

ja servahulgaga

$$E(G_n) = \{(a, b) : \, a \neq b, \, \gcd(a, b) = 1\}.$$

1. Kas graafid $G_n$ on sidusad?
2. Tõesta, et $m < n$ jaoks on graaf $G_m$ graafi $G_n$ indutseeritud alamgraaf.

**Ülesanne 17.** Tõesta, et graaf $Q_3$ (see on graaf number 7 ülesandest 2) on iseenda täiendgraafi alamgraaf.

# Peatükk 2

# Euleri graafid

Sidusat mittesuunatud graafi nimetetakse *Euleri graafiks*, kui selles graafis leidub kinnine ahel, mis läbib iga serva parajasti üks kord. Vastavat ahelat nimetatakse *Euleri ahelaks*. Mitte-Euleri graafi nimetatakse *pool-Euleri graafiks* kui selles graafis leidub ahel, mis läbib iga serva parajasti üks kord.

**Teoreem 2.1 (Euler, 1736)** *Sidus graaf $G$ on Euleri graaf parajasti siis, kui kõigil tema tippudel on paarisarvuline aste.*

Tõestus. **Suund $\Rightarrow$.** Olgu $P$ graafi $G$ mingi Euleri ahel. Vaatame graafi $G$ mingit tippu $v$. Esinegu ta $n$ korda ahelas $P$ (seejuures loeme ahela alguseks ja lõpuks olemise kokku üheks esinemiseks). Tipu $v$ iga esinemise juures peab ahel $P$ tippu $v$ sisenema ja sealt jälle väljuma; tippu saab siseneda ja sealt väljuda mõne temaga intsidentse serva kaudu. Seega esineb ahelas $P$ tipuga $v$ intsidentseid servi $2n$ korral. Ahelas $P$ esinevad graafi $G$ kõik servad täpselt üks kord, seega esinevad seal ka kõik tipuga $v$ intsidentsed servad täpselt üks kord. Seetõttu $\deg(v) = 2n$.

**Suund $\Leftarrow$.** Olgu $G$ sidus graaf, mille kõigi tippude aste on paarisarv. Tõestus käib induktsiooniga üle graafi $G$ servade arvu.

**Baas.** $|E(G)| = 0$. Sel juhul on tühi ahel (s.t. ahel, mis ei sisalda ühtegi serva) graafi $G$ Euleri ahelaks.

**Samm.** $|E(G)| > 0$. Sel juhul on graafi $G$ kõigi tippude aste suurem kui 0, muidu ei oleks $G$ sidus. Vastavalt tõestatava teoreemi eeldustele on $G$ kõigi tippude aste vähemalt 2. Vastavalt teoreemile 1.2 leidub graafis $G$ mingi tsükkel $C$. Kui $C$ sisaldab graafi $G$ kõiki servi, siis on teoreem tõestatud.

Vastasel korral moodustame graafist $G$ uue graafi $G'$, kustutades $G$-st kõik tsüklisse $C$ kuuluvad servad. Graafis $G'$ on vähem servi kui graafis $G$ ning ka graafi $G'$ kõigi tippude astmed on paarisarvulised. Tõepoolest, kustutades kõik mingisse tsüklisse kuuluvad servad, vähendasime me iga tipu astet kas nulli või kahe võrra. Me ei saa induktsiooni eeldust siiski otse graafi $G'$ jaoks kasutada, kuna ta ei pruugi olla sidus. Küll aga võime me seda kasutada graafi $G'$ iga sidususkomponendi jaoks — vastavalt induktsiooni eeldusele on graafi $G'$ igal sidususkomponendil Euleri ahel.

Graafi $G$ Euleri ahela konstrueerime me, liikudes mööda tsükli $C$ servi, kuni jõuame mõne sellise tipuni $v$, mille aste graafis $G'$ ei ole null, ning mis kuulub graafi $G'$ sellisesse sidususkomponenti, mida me veel graafi $G$ Euleri ahelat konstrueerides läbinud ei ole. Järgmise sammuna läbime me graafi $G'$ tippu $v$ sisaldava Euleri ahela ja jõuame peale selle läbimist tippu $v$ tagasi. Seejärel jätkame me tsükli $C$ servade läbimist poolelijäänud kohast, kuni jõuame graafi $G'$ järgmise veel töötlemata sidususkomponendini. Protsess lõpeb, kui me oleme tsükli $C$ tervenisti läbinud. □

**Järeldus 2.2** *Sidus graaf $G$ on Euleri graaf parajasti siis, kui tema kaarte hulk $E$ esitub paarikaupa lõikumatute tsüklite ühendina.*

Tõestus. Järeldub otseselt teoreemi 2.1 tõestusest. Tõepoolest, selle teoreemi tõestuses me tükeldasime graafi $G$ servade hulga (paarikaupa lõikumatuteks) tsükliteks. □

**Järeldus 2.3** *Sidus graaf $G$ on pool-Euleri graaf parajasti siis, kui selles graafis on täpselt kaks sellist tippu, mille aste on paarituarvuline.*

Tõestus. **Suund $\Rightarrow$.** Olgu $G$ pool-Euleri graaf ning olgu $P$ ahel, mis läbib selle graafi iga serva täpselt üks kord. Olgu $x$ ja $y$ ahela $P$ alg- ja lõpptipp. Olgu $G'$ graaf, mis on saadud graafile $G$ täiendava serva $e$, kus $\mathcal{E}(e) = \{x, y\}$, lisamisel. Ahel $x \overset{P}{\rightsquigarrow} y \xrightarrow{e} x$ on graafi $G'$ Euleri ahel, seega on graafis $G'$ kõigi tippude aste paarisarv. Graafis $G$ on tippude $x$ ja $y$ aste paaritu arv (ühe võrra väiksem kui graafis $G'$) ning ülejäänud tippude aste paarisarv (sama palju kui graafis $G'$).

**Suund $\Leftarrow$.** Olgu $G$ graaf, milles täpselt kahe tipu aste on paaritu arv. Olgu need tipud $x$ ja $y$. Olgu $G'$ graaf, mis on saadud graafile $G$ täiendava serva $e$, kus $\mathcal{E}(e) = \{x, y\}$, lisamisel. Graafi $G'$ kõikide tippude aste on paarisarv, seega on $G'$ Euleri graaf. Olgu $C$ graafi $G'$ Euleri ahel. Kui me eemaldame ahelast $C$ serva $e$, siis saame me ahela, mis läbib graafi $G$ kõiki servi täpselt ühel korral. Seega on $G$ pool-Euleri graaf. $\square$

Järgmine teoreem kirjeldab üht lihtsat algoritmi Euleri graafis Euleri ahela leidmiseks. Enne selle algoritmi esitamist tuleb meil veel üks varem mitteesinenud mõiste defineerida.

Sidusa graafi $G = (V, E)$ serva $e \in E$ nimetatakse *sillaks*, kui selle serva eemaldamisel graafist $G$ muutub graaf mittesidusaks.

**Teoreem 2.4 (Fleury' algoritm)** *Olgu $G = (V, E)$ Euleri graaf. Järgnev konstruktsioon annab meile Euleri ahela graafis $G$:*

*Alusta graafi $G$ mingist (suvalisest) tipust $u$ ning liigu sammhaaval mööda graafi servi. Seejuures*

*(i). Olles teinud sammu mööda serva $e \in E$, kustuta see serv servade hulgast $E$. Kui seejuures muutus tipu, millest lahkuti, aste nulliks, siis kustuta ka see tipp hulgast $V$.*

*(ii). Järgmise sammu jaoks serva valides kasuta graafi $(V, E)$ silda ainult muude võimaluste puudumisel.*

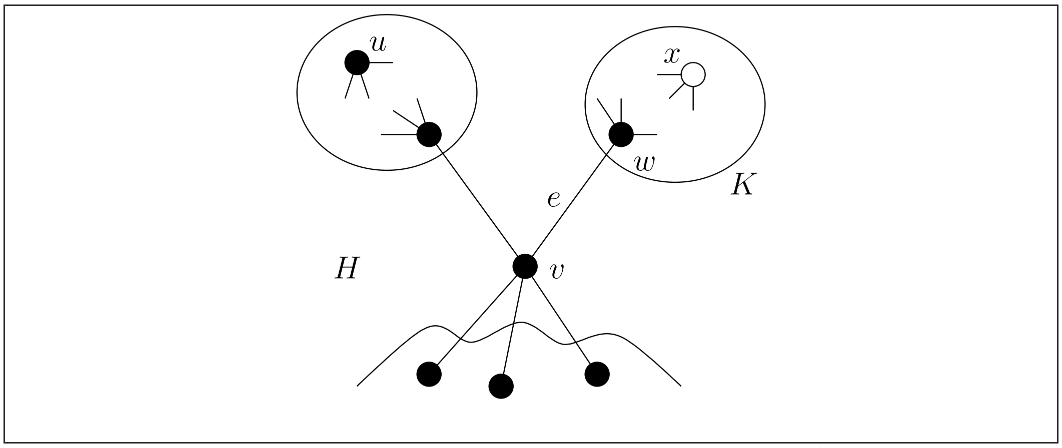
*Jätka, kuni hulgast $E$ on kõik servad kustutatud.*

Tõestus. Näitame kõigepealt, et kirjeldatud viisil tõepoolest jõutakse seisuni, kus kõik servad on hulgast $E$ kustutatud. S.t. ei teki olukorda, kus hulk $E$ ei ole veel tühi, aga ei ole enam ühtegi serva, et väljuda tipust, kus parasjagu ollakse. Me näitame, et kehtib järgmine invariant: Olgu $v$ tipp, kuhu me algoritmi järgides parasjagu jõudnud oleme. Olgu $H$ graaf, mis graafist $G$ veel järel on. Siis graaf $H$ on sidus ning $u$ (tipp, kust me graafi läbimist alustasime) on graafi $H$ tipp. Peale selle, kui $v = u$, siis on graafi $H$ kõigil tippudel paarisarvuline aste. Kui $v \neq u$, siis on tippudel $u$ ja $v$ paarituarvuline ning kõigil teistel $H$ tippudel paarisarvuline aste.

On ilmne, et invariant kehtib algoritmi täitma asudes (siis $v = u$ ja $H = G$). Oletame nüüd, et ta kehtib enne mingi sammu tegemist, ning näitame, et ta kehtib ka peale järjekordset sammu. Viibigu me tipus $v$ ning olgu veel allesolev graafi osa $H$. Meil on vaja leida tipu $v$ naabertipp (graafis $H$) $v'$, nii et peale $v$ ja $v'$ vahelise serva kustutamist tekkiv graaf $H'$ rahuldaks meie invarianti. Ilmne on, et ükskõik, kuidas me ka tippu $v'$ ei valiks, rahuldab graaf $H'$ invariandi neid osi, mis räägivad tippude astmete paarsusest.

Meil tuleb veel näidata, et graaf $H'$ on sidus. Oletame, et $v \neq u$. Piisab, kui me näitame, et graafis $H$ leidub ülimalt üks sild, mis on intsidentne tipuga $v$. Tõepoolest, järgmisel sammul ei kasutata silda, siis on graaf $H'$ sidus. Kui tipuga $v$ on intsidentne ainult üks sild ning seda silda kasutatakse järgmisel sammul, siis oli see sild ainus tipuga $v$ intsidentne serv graafis $H$ ning järgmisel sammul kustutatakse lisaks sellele servale ka tipp $v$ ise.

Oletame, et enam kui üks sild on graafis $H$ intsidentne tipuga $v$. Sel juhul leidub selline tipp $w$, et graafi $H$ serv $e = (v, w)$ on sild, ning graafi $H - e$ sidususkomponent $K$, mis sisaldab tippu $w$, ei sisalda tippu $u$ (vaata joonist 2.1). Tipu $w$ aste graafis $H$ on paaris, seega on ta aste graafis $K$



**Joonis 2.1:** Tipuga $v$ intsidentsed sillad graafis $H$

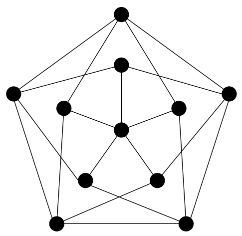
paaritu. Teoreemi 1.1 järgi leidub graafis $K$ veel mingi tipp $x$, mille aste on paaritu. Aga siis on tipu $x$ aste ka graafis $H$ paaritu ning $x \neq u$ ja $x \neq v$. Vastuolu graafi $H$ invariandiga.

Kui $v = u$ ja $u$ ei ole graafi ainus tipp, siis leiame me samasuguse arutelu tulemusena, et $u$-ga pole intsidentne ükski sild. Seega on ka sel juhul graaf $H'$ sidus. Samuti jääb tipp $u$ peale sammu kustutamata, kuna tal on peale sammu paaritu arv (s.t. rohkem kui null) intsidentset serva. □

## 2.1 Ülesanded

**Ülesanne 18.** Millised järgmistest graafidest on millistel tingimustel Euleri? Pool-Euleri?

1. $K_n$,
2. $O_n$,
3. $C_n$,
4. $P_n$,
5. $Q_n$ ($n$-mõõtmelise ühikkuubi karkass),
6. $Pet$,
7. $K_{m,n}$,
8. $K_{2,2,2}$,
9. Grötzschi graaf



**Ülesanne 19.** Vaatleme malendite hulka

$$M = \{Kuningas, Lipp, Vanker, Oda, Ratsu\}.$$

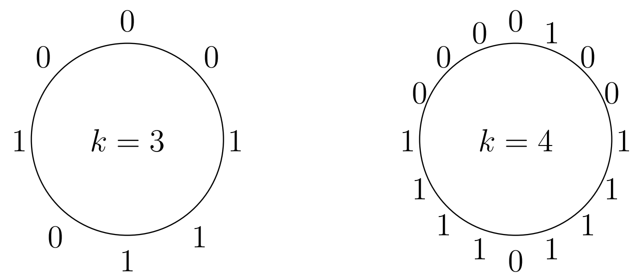
Malendi $X \in M$ graafiks $n \times n$ malelaual nimetame graafi $G_X^{n \times n}$, mille tippude hulgaks on $n \times n$ rudustiku ruutude hulk ja serv kahe tipu vahele on tõmmatud parajasti siis, kui malendi $X$ ühe käiguga saab ühele tipule vastavalt ruudult teisele tipule vastavale ruudule. Milliste malendi $X$ ja arvu $n$ väärtuste korral on graaf $G_X^{n \times n}$ Euleri?

**Ülesanne 20.** Tõesta, et Euleri graafi servgraaf on Euleri.

**Ülesanne 21.** Leia, millist tarvilikku ja piisavat tingimust peavad rahuldama graafi $G$ tippude astmed selleks, et $L(G)$ oleks Euleri.

**Ülesanne 22.** Olgu $G$ Euleri graaf. Olgu $v_1, v_2, v_3 \in V$ ja $e_1, e_2, e_3 \in E$ sellised, et $\mathcal{E}(e_1) = \mathcal{E}(e_2) = \{v_1, v_2\}$ ja $\mathcal{E}(e_3) = \{v_2, v_3\}$ (loeme, et $v_1 \neq v_2 \neq v_3 \neq v_1$ ja $e_1 \neq e_2 \neq e_3 \neq e_1$). Näita, et graafis $G$ leidub selline Euleri ahel, kus servale $e_1$ järgneb vahetult $e_3$.

**Ülesanne 23.** Tõesta, et ringiratast on võimalik paigutada $2^k$ arvu, igaüks neist kas 0 või 1, nii et iga bitijada $x \in \{0,1\}^k$ esineks ringi kellaosuti liikumise suunas läbides täpselt ühel korral.




**Ülesanne 24.** Tõesta, et igas sidusas graafis on võimalik leida kinnine ahel, mis läbib iga serva vähemalt üks ja mitte rohkem kui kaks korda.

# Peatükk 3

# Hamiltoni graafid

Sidusat mittesuunatud graafi nimetatakse *Hamiltoni graafiks*, kui selles graafis leidub kõiki tippe läbiv kinnine lihtahel. Mitte-Hamiltoni graafi nimetatakse *pool-Hamiltoni graafiks*, kui selles graafis leidub kõiki tippe läbiv lihtahel.

## 3.1 Ore teoreem.

**Lemma 3.1** *Olgu $U$ ja $W$ arvuhulga $M = \{1, ..., n-2\}$ kaks alamhulka nii et $1 \in U$, $n-2 \in W$ ja $|U|+|W| \geq n \geq 4$. Siis leidub $i < n-2$, nii et $i \in W$ ja $i+1 \in U$.*

Tõestus. Olgu $W^+ := \{i+1 \mid i \in W \backslash \{n-2\}\}$. Oletame vastuväiteliselt, et teoreemi eeldused on täidetud, kuid väide mitte, st kui $i \in W$, siis $i+1 \notin U$. See aga tähendab, et $U \cap W^+ = \emptyset$ ja et kehtib valem

$$|U \cup W^+| = |U| + |W^+|.$$

Ühelt poolt $U \cup W^+ \subseteq M$, ja seega $|U \cup W^+| \leq n-2$. Teiselt poolt aga kujutuse $^+ : i \mapsto i+1$ injektiivsuse tõttu $|W^+| = |W| - 1$ ja seega

$$|U| + |W^+| = |U| + |W| - 1 \geq n - 1,$$

mis viib vastuolule. Lemma on tõestatud. □

**Teoreem 3.2 (Ore, 1960)** *Kui $G = (V, E)$ on lihtgraaf, kus on $n \geq 3$ tippu ja kehtib seos*

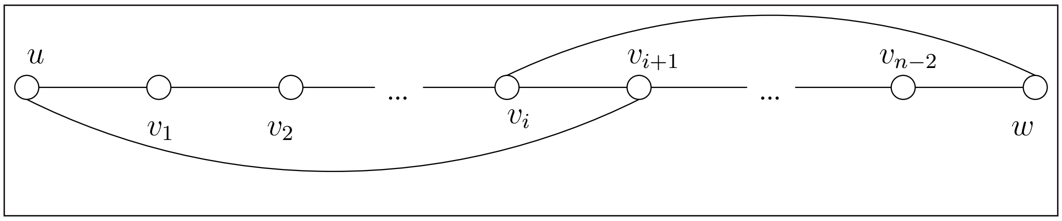
$$\deg(u) + \deg(w) \geq n, \tag{3.1}$$

*suvalise paari $(u,w) \in \overline{E}$ korral (st $(u,w) \notin E$), siis graafis $G$ leidub Hamiltoni tsükkel.*

Tõestus. Oletame, et teoreem ei kehti. Oletame vastuväiteliselt et leiduvad $n$-tipulised mitte-Hamiltoni graafid, milles kehtib tingimus (3.1). Olgu kõikige selliste $n$-tipuliste graafide klass $\mathcal{G}_n$. Märgime esmalt, et kui $n = 3$, siis ainus tingimust (3.1) rahuldav graaf on täisgraaf $K_3$, milles loomulikult on ka Hamiltoni tsükkel. Olgu $n \geq 4$ ja $G = (V, E)$ selline graaf klassist $\mathcal{G}_n$, kus on maksimaalselt palju servi, st ükskõik millise serva edasine lisamine muudab graafi Hamiltoni graafiks, sest tingimus (3.1) jääb servade lisamisel alati kehtima. Lisamegi $G$-le ühe serva $e$ juurde ja oletame, et selle tegevuse tulemusena tekib Hamiltoni tsükkel:

$$u = v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_{n-2} - v_{n-1} = w \overset{e}{-} u.$$

Seega peab juba esialgses graafis $G$ leiduma Hamiltoni ahel, mis algab tipust $u$ ja lõpeb tipus $w$, kusjuures $(u,w) \notin E$. Seega kehtib ka võrratus (3.1). Olgu $U = \{i \mid 1 \leq i \leq n-2,\ (u, v_i) \in E\}$ ja $W = \{j \mid 1 \leq j \leq n-1,\ (v_j, w) \in E\}$. On selge, et $U$ ja $W$ on hulga $M = \{1, ..., n-2\}$ alamhulgad ning $|U| = \deg(u)$ ja $|W| = \deg(w)$. Vastavalt võrratusele (3.1) saame, et $|U| + |W| \geq n$. Seega kehtivad Lemma 3.1 eeldused ja lemmast tulenevalt leidub $i$, nii et $i \in W$ ja $i + 1 \in U$, st leidub tipp $v_i$, nii et $(v_i, w) \in E$ ja $(u, v_{i+1}) \in E$ (vaata joonist 3.1). Siit aga järeldub, et graafis $G$ peab leiduma Hamiltoni tsükkel




**Joonis 3.1:** Hamiltoni ahel $\Rightarrow$ Hamiltoni tsükkel

$$u \to v_{i+1} \to v_{i+2} \to \ldots \to v_{n-2} \to w \to v_i \to v_{i-1} \to \ldots \to v_1 \to u,$$

mis on aga vastuolus eeldusega. □

Ore teoreemi tõestades oleme me muuhulgas andnud tõestuse järgmisele tulemusele:

**Lause 3.3** *Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ning olgu $u, w \in V$ sellised, et $(u, w) \notin E$ ja $\deg(u) + \deg(w) \geq |V|$. Siis leidub graafis $G$ Hamiltoni tsükkel parajasti siis, kui graafis $G' = (V, E \cup \{(u, w)\})$ leidub Hamiltoni tsükkel.*

Tõestus. **Suund $\Rightarrow$.** On ilmne, et kui $G$ on Hamiltoni graaf, siis ka $G'$ on Hamiltoni graaf — servi juurde lisades ei saa Hamiltoni tsükkel ära kaduda.

**Suund $\Leftarrow$.** Olgu $C$ mingi Hamiltoni tsükkel graafis $G'$. Kui ta ei sisalda serva $(u, w)$, siis on ta ka Hamiltoni tsükkel graafis $G$. Kui ta sisaldab serva $(u, w)$, siis on meil, analoogiliselt Ore teoreemi tõestusega, graafis $G$ Hamiltoni ahel tipust $u$ tippu $w$. Jällegi õnnestub meil leida selles ahelas kaks naabertippu $v_i$ ja $v_{i+1}$ (me loeme, et indeksid kasvavad tipu $w$ poole minnes), nii et $(u, v_{i+1}) \in E$ ja $(v_i, w) \in E$ (vaata joonist 3.1). See annabki meile Hamiltoni tsükli graafis $G$. $\square$

## 3.2 Ore sulund

Olgu $G = (V, E)$ mingi $n$-tipuline lihtgraaf. Graafi $G$ *ülemgraafiks* nimetatakse suvalist graafi $(V, E_1)$, nii et $E \subseteq E_1$. Tipu $v$ valentsiks ülemgraafis $(V, E_1)$ nimetatakse naturaalarvu

$$\deg_{E_1}(v) := |\{w \mid (v, w) \in E_1\}|.$$

On lihtne veenduda, et graafi valents ülemgraafis on vähemalt niisama suur, kui graafis endas, st kui $E \subseteq E_1$, siis mistahes tipu $v \in V$ korral $\deg_E(v) \leq \deg_{E_1}(v)$.

Olgu $(G_\iota)_{\iota \in I}$ mingi graafide pere, kusjuures $G_\iota = (V, E_\iota)$. Pere $(G_\iota)_{\iota \in I}$ *lõikeks*, nimetatakse graafi

$$\bigcap_{\iota \in I} G_\iota = (V, \bigcap_{\iota \in I} E_\iota).$$

Graafi $G = (V, E)$ nimetatakse *Ore-kinniseks*, kui selle mistahes tipupaari $u \neq v$ korral kehtib implikatsioon

$$\deg_E(u) + \deg_E(v) \geq |V| \implies (u, v) \in E. \tag{3.2}$$

**Lemma 3.4** *Kui $(G_\iota)_{\iota \in I}$ on Ore-kinniste graafide mittetühi pere, siis lõige $G = \cap_{\iota \in I} G_\iota$ on ka Ore-kinnine.*

Tõestus. Olgu $G_\iota = (V, E_\iota)$ ja $G = (V, E)$, st $E := \cap_{\iota \in I} E_\iota$. Olgu $u, v \in V$ mingi erinevate tippude paar ja kehtigu võrratus

$$\deg_E(u) + \deg_E(v) \geq n = |V|.$$

Et iga $\iota \in I$ korral kehtib sisalduvus $E \subseteq E_\iota$, siis järelikult iga $\iota \in I$ korral kehtivad võrratused:

$$\deg_{E_\iota}(u) + \deg_{E_\iota}(v) \geq \deg_E(u) + \deg_E(v) \geq n,$$

millest graafide $G_\iota$ Ore-kinnisuse tõttu järeldub, et $\forall \iota \in I[(u, v) \in E_\iota]$, ehk $(u, v) \in \cap_{\iota \in I} E_\iota$. Järelikult on $G$ ise ka Ore-kinnine. □

Graafi $G$ *Ore sulundiks* $\mathcal{O}(G)$ nimetatakse graafi $G$ kõikide Ore-kinniste ülemgraafide lõiget. Selle määratluse korrektsus tuleneb faktist, et $n$-tipulisel graafil $G$ leidub alati vähemalt üks Ore-kinnine ülemgraaf milleks on täisgraaf $K_n$.

Esitame nüüd ühe algoritmi, mis, nagu me edaspidi tõestame, leiab graafi Ore sulundi.

**Algoritm.** Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. Olgu $n = |V|$.

1. Leia $u, v \in V$ nii, et $(u, v) \notin E$ ja $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Kui selliseid tippe $u$ ja $v$ ei leidu, siis väljasta graaf $G$ ja lõpeta töö.

2. Lisa hulka $E$ uus serv $(u, v)$ ja mine punkti 1.

Nagu me näeme, on esitatud algoritm mittedeterministlik — esimesel sammul võib ta valida ükskõik millise tipupaari, mis teatavat tingimust rahuldab. Graafi Ore sulund on seevastu üheselt määratud. Näitamegi kõigepealt, et esitatud algoritmi töö tulemus (graaf, mille ta lõpuks väljastab) ei sõltu tema mittedeterministlikest valikutest.

**Lemma 3.5** *Algoritmi väljund ei sõltu tippude $u, v$ valikust algoritmi esimeses punktis.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline graaf $G = (V, E)$, nii et andes selle kirjeldatud algoritmi sisendiks, võime väljundiks saada mitu erinevat graafi. Olgu $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$ kaks erinevat võimalikku väljundit, s.t. $E_1 \neq E_2$.

Olgu $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_k, v_k)$ servad, mis algoritm lisab (seejuures lisamine toimub toodud järjekorras) graafile $G$, saamaks graafi $G_1$. Samuti, olgu $(u'_1, v'_1), \ldots, (u'_l, v'_l)$ servad, mis algoritm lisab graafile $G$, saamaks graafi $G_2$. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $E_1 \backslash E_2 \neq \emptyset$ (vastasel juhul vahetame ära graafid $G_1$ ja $G_2$). Sel juhul leidub servade $(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k)$ seas mõni, mis pole ükski servadest $(u'_1, v'_1), \ldots, (u'_l, v'_l)$. Olgu $i \in \{1, \ldots, k\}$ vähim selline indeks, et $(u_i, v_i)$ pole ükski servadest $(u'_1, v'_1), \ldots, (u'_l, v'_l)$.

Olgu $G' = (V, E \cup \{(u_1, v_1), \ldots, (u_{i-1}, v_{i-1})\})$. Siis on graaf $G'$ graafi $G_2$ alamgraaf, sest kõik tema servad leiduvad ka $G_2$-s. Kuna algoritm lisas graafile $G'$ serva $(u_i, v_i)$, siis $\deg_{G'}(u_i) + \deg_{G'}(v_i) \geq |V|$. Ülemgraafiks olemise tõttu siis ka $\deg_{G_2}(u_i) + \deg_{G_2}(v_i) \geq |V|$. Peale selle on tipud $u_i$ ja $v_i$ graafis $G_2$ servaga ühendamata, sest ükski lisatud servadest (tegemaks graafist $G$ graafi $G_2$) pole $(u_i, v_i)$. Seega pole algoritm, olles jõudnud graafini $G_2$, oma tööd veel lõpetanud — punktis 1 on tal veel võimalik valida tipupaar (milleks moodustavad $u_i$ ja $v_i$), mis rahuldavad antud tingimusi. $\square$

Sarnaselt saame näidata, et kirjeldatud algoritm on monotoonne:

**Lemma 3.6** *Olgu $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$ kaks lihtgraafi, nii et $E_1 \subseteq E_2$. Olgu $G'_1 = (V, E'_1)$ ja $G'_2 = (V, E'_2)$ algoritmi väljundid, kui tema sisenditeks on vastavalt $G_1$ ja $G_2$. Siis $E'_1 \subseteq E'_2$.*

Tõestus. Olgu $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_k, v_k)$ servad, mis algoritm lisab (seejuures lisamine toimub toodud järjekorras) graafile $G_1$, saamaks graafi $G'_1$. Oletame vastuväiteliselt, et mõni servadest $(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k)$ ei esine graafis $G'_2$. Olgu $i \in \{1, \ldots, k\}$ vähim indeks, nii et serv $(u_i, v_i)$ ei esine graafis $G'_2$.

Vaatame graafi $G' = (V, E_1 \cup \{(u_1, v_1), \ldots, (u_{i-1}, v_{i-1})\})$. Siis on $G'$ graafi $G'_2$ alamgraaf. Jällegi on meil

- $\deg_{G'}(u_i) + \deg_{G'}(v_i) \geq |V|$, mistõttu
- $\deg_{G'_2}(u_i) + \deg_{G'_2}(v_i) \geq |V|$.
- $(u_i, v_i) \notin E'_2$.

Seega pole algoritm, jõudnuna graafini $G_2$, veel oma tööd lõpetanud. $\square$

**Lause 3.7** *Toodud algoritm leiab graafi Ore sulundi.*

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf ja olgu $G' = (V, E')$ toodud algoritmi väljund, kui tema sisendiks on $G$. Algoritmi punktist 1 järeldub, et kõigi $u, v \in V$ jaoks, kus $\deg_{G'}(u) + \deg_{G'}(v) \geq |V|$, kehtib $(u, v) \in E'$, seega on $G'$ Ore-kinnine.

Samuti tuleb algoritmi punktist 1 välja, et kui algoritmi sisendiks on mingi Ore-kinnine graaf, siis lõpetab algoritm kohe tööăning väljastab sellesama graafi. Muuhulgas, kui algoritmi sisendiks on $\mathcal{O}(G)$, siis ka tema väljundiks on $\mathcal{O}(G)$.

Kuna $\mathcal{O}(G)$ on $G$ ülemgraaf, siis peab vastavalt lemmale 3.6 ka $\mathcal{O}(G)$ olema $G'$-i ülemgraaf. Samas on $\mathcal{O}(G)$ vähim graafi $G$ Ore-kinnine ülemgraaf (järeldub otseselt Ore sulundi definitsioonist). Seega $G' = \mathcal{O}(G)$, sest $G'$ on Ore-kinnine. □

Algoritmi tõime me sisse selleks, et tõestada ära järgmine tulemus:

**Lause 3.8** *Graaf on Hamiltoni parajasti siis, kui tema Ore sulund on Hamiltoni.*

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ning olgu $(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k)$ servad, mis Ore sulundi leidmise algoritm lisab (antud järjekorras) graafile $G$. Defineerime graafid $G_0, \ldots, G_k$ järgmiselt:

$$\begin{aligned} G_0 &= G \\ G_i &= G_{i-1} \cup \{(u_i, v_i)\} \ . \end{aligned}$$

Vastavalt Ore sulundi algoritmi konstruktsioonile ning lausele 3.3 on graaf $G_{i-1}$ Hamiltoni parajasti siis, kui graaf $G_i$ on Hamiltoni. Samas aga $G_0 = G$ ja $G_k = \mathcal{O}(G)$. □

**Järeldus 3.9** *Kui $n$-tipulise graafi $G$ Ore sulund $\mathcal{O}(G)$ on $K_n$, siis $G$ on Hamiltoni graaf.*

Tõestus. $K_n$ on Hamiltoni graaf. □

**Teoreem 3.10** *Igas $n$-tipulises mitte-Hamiltoni graafis leidub $k$ tippu $v$ valentsiga $\deg(v) \leq k$ ja $n-k$ tippu $w$ valentsiga $\deg(w) < n-k$ mingi $k < n/2$ korral.*

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ mingi $n$-tipuline mitte-Hamiltoni graaf. Vastavalt järeldusele 3.9 teame, et $\mathcal{O}(G) = (V, E') \neq K_n$, st et leiduvad tipud $u, w \in V$, nii et $(u, w) \notin E'$. Valime tipud $u$ ja $w$ nii, et summa $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w)$ oleks maksimaalne. Paneme tähele, et

$$\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w) \leq n - 1, \tag{3.3}$$

sest muidu oleks Ore sulundi definitsiooni kohaselt $(u, w) \in E'$. Defineerime nüüd kaks hulka:

$$U := \{u' \mid u' \neq u,\ (u', u) \notin E'\}, \qquad W := \{w' \mid w' \neq u,\ (w', w) \notin E'\}.$$

Kuna me valisime $u$ ja $w$ nii, et summa (3.3) oleks maksimaalne, siis järelikult mistahes $u' \in U$ ja $w' \in W$ korral kehtivad võrratused:

$$\deg_{E'}(w') \leq \deg_{E'}(u), \qquad \deg_{E'}(u') \leq \deg_{E'}(w). \tag{3.4}$$

Hulkade $U$ ja $W$ võimsused avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned} |U| &= |V| - |\{u\}| - |\{v \mid (u, v) \in E'\}| = n - 1 - \deg_{E'}(u), \qquad (3.5) \\ |W| &= |W| - |\{w\}| - |\{v \mid (w, v) \in E'\}| = n - 1 - \deg_{E'}(w). \end{aligned}$$

Üldisust kitsendamata võib eeldada, et $\deg_{E'}(u) \leq \deg_{E'}(w)$. Olgu $k := \deg_{E'}(u)$. Võrratusest (3.3) tuleneb, et $2k \leq n - 1$ ja seega $k < n/2$. Jällegi võrratusest (3.3) saame, et $|W| = n - 1 - \deg_{E'}(w) \geq \deg_{E'}(u) = k$, st et hulgas $W$ on vähemalt $k$ tippu. Võrratustest (3.4) järeldub, et

$$\deg_E(w') \leq \deg_{E'}(w') \leq \deg_{E'}(u) = k$$

mistahes tipu $w' \in W$ korral. Seega oleme tõepoolest leidnud $k$ tippu, mille valentsid ei ületa arvu $k$. Jääb veel üle näidata, et leidub $n - k$ tippu valentsidega $< n - k$. Võrratusest (3.5) tuleneb otseselt, et $|U| = n - k - 1$ ja samuti

$$\deg_E(u') \leq \deg_{E'}(u') \leq \deg_{E'}(w) \leq n - 1 - \deg_{E'}(u) = n - 1 - k < n - k$$

iga tipu $u' \in U$ korral. Seega on meil õnnestunud leida $n - k - 1$ tippu, mille valents on väiksem kui $n - k$. Teoreemi lõplikuks tõestamiseks tuleks veel kusagilt leida üks tipp väljaspool hulka $U$, mille valents on väiksem kui $n - k$. Lihtne on aga veenduda, et selleks tipuks sobib $u$ ise. Tõepoolest,

$$\deg_E(u) \leq \deg_{E'}(u) \leq \deg_{E'}(w) < n - k,$$

millega toereemi väide on täielikult tõestatud. □

## 3.3 Ülesanded

**Ülesanne 25.** Millised ülesandes 18 toodud graafidest on millistel tingimustel Hamiltoni? Pool-Hamiltoni?

**Ülesanne 26.** Tõesta, et kui $n \geq 3$, siis on $\overline{Q_n}$ Hamiltoni graaf.

**Ülesanne 27.** Tõesta, et kui $G$ on paaritu arvu tippudega kahealuseline graaf, siis $G$ pole Hamiltoni.

**Ülesanne 28.** Milliste malendi $X$ ja arvu $n$ väärtuste korral on graaf $G_X^{n\times n}$ Hamiltoni?

**Ülesanne 29.** *Turniir* on orienteeritud graaf, kus iga kahe tipu vahel on täpselt üks kaar (mingit pidi orienteeritud). Näita, et igas turniiris leidub orienteeritud Hamiltoni ahel.

**Ülesanne 30.** Tõesta, et Euleri graafi servgraaf on Hamiltoni.

**Ülesanne 31.** Tõesta, et Hamiltoni graafi servgraaf on Hamiltoni.

**Ülesanne 32.** Graafi nimetame *Hamiltoni-sidusaks*, kui tema iga kahe tipu jaoks leidub Hamiltoni ahel, mille otspunktideks need tipud on. Kas graaf $Q_3$ on Hamiltoni-sidus?

**Ülesanne 33.**

1. Leia graafis $K_9$ 4 serviti lõikumatut Hamiltoni tsüklit.

2. Tõesta, et graafis $K_{2k+1}$ ei saa leiduda üle $k$ serviti lõikumatu Hamiltoni tsükli.

3. Tõesta, et graafis $K_{2k+1}$ leidub täpselt $k$ serviti lõikumatut Hamiltoni tsüklit.

# Peatükk 4

# Puud

*Mets* on lihtgraaf, milles puuduvad tsüklid. *Puu* on sidus mets. See on kõigest üks viis puid defineerida, järgmine teoreem annab mitu alternatiivset versiooni.

**Teoreem 4.1** *Olgu $T$ lihtgraaf, millel on $n$ tippu. Järgmised väited on kõik üksteisega samaväärsed:*

*(i). $T$ on puu (s.t. sidus ja tsükliteta).*

*(ii). $T$ on tsükliteta graaf, millel on $n-1$ serva.*

*(iii). $T$ on sidus graaf, millel on $n-1$ serva.*

*(iv). $T$ on sidus ning $T$ iga serv on sild.*

*(v). $T$ suvalise kahe tipu vahel on täpselt üks lihtahel.*

*(vi). $T$ on tsükliteta, aga $T$-le mõne uue serva lisamisel tekib tsükkel.*

Tõestus. **(i)⇒(ii).** Kerge on veenduda, et igas $n$-tipulises puus on täpselt $n-1$ serva. Tõepoolest, kui $n=1$, on asi selge. Oletame, et teoreemi väide kehtib $n-1$ korral (st. igas $(n-1)$-tipulises puus on $n-2$ serva) ja $T=(V,E)$ on mingi $n$ tipuline puu. Vastavalt teoreemile 1.2 leidub graafis $T$ vähemalt üks tipp $v$ valentsiga 1 (nullise valentsiga tippe ei leidu sidususe tõttu). Olgu $w \in V$ tipp nii et $(v,w) \in E$. Indutseeritud $(n-1)$-tipuline alamgraaf $T'$ tippude hulgaga $V\setminus\{v\}$ on samuti sidus ja tsükliteta, st puu, milles induktsiooni eeldusele tuginedes on $n-2$ serva. Järelikult on graafis $T$ servi täpselt $n-1$.

**(ii)⇒(iii).** Graafi $T$ kõik sidususkomponendid on tsükliteta, s.t. nad on puud. Vastavalt järeldusele (i)⇒(ii) on neis kõigis servi ühe võrra vähem kui tippe. Seega on graafis $T$ servi tippudest vähem sidususkomponentide arvu võrra. Vastavalt eeldusele on servi ühe võrra vähem kui tippe, seega on sidususkomponentide arv 1.

**(iii)⇒(iv).** Sarnaselt tõestuse (i)⇒(ii) arutlusele saame me näidata, et igas sidusas $n$-tipulises graafis on vähemalt $n-1$ serva. Kui meil on nüüd antud sidus graaf $T$, millel on $n$ tippu ja $n-1$ serva, siis kui me temast mingi serva eemaldame, saame $n-2$ servaga graafi, mis peab olema mittesidus. Seega pidi eemaldatud serv olema sild.

**(iv)⇒(i).** Kui graafis $T$ leiduks mõni tsükkel, siis, mõne sellesse tsüklisse kuuluva serva eemaldamisel jääks graaf endiselt sidusaks. Seega see tsüklisse kuuluvad servad ei ole sillad.

**(i)⇒(v).** Kuna $T$ on sidus, siis on $T$ iga kahe tipu vahel vähemalt üks lihtahel. Kui mingite tippude $u$ ja $v$ vahel on enam kui üks lihtahel, siis peab nende vahel leiduma tsükkel.

**(v)⇒(vi).** Kui $T$-s oleks tsükkel, siis oleks kahe sellel tsüklil asuva tipu vahel vähemalt kaks erinevat lihtahelat. Kui me lisame graafile $T$ uue serva $e$ tippude $u$ ja $v$ vahele, siis on $u \overset{P}{\rightsquigarrow} v \xrightarrow{e} u$ graafi $T+e$ tsükkel, kus $P$ on vastavalt eeldustele leiduv tee tippude $u$ ja $v$ vahel.

**(vi)⇒(i).** Oletame, et $T$ on mittesidus. Lisades talle serva, mis ühendab kaht erinevatesse sidususkomponentidesse kuuluvat tippu, ei teki tsüklit. □

**Järeldus 4.2** *Kui puus leidub lihttee $u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$, siis $d(u,w) = d(u,v) + d(v,w)$.*

Tõestus. Järeldub teoreemi 4.1 väitest (v). Tippude $u$ ja $w$ kaugus on nende kahe tipu vahel oleva ainsa lihttee pikkus, see lihttee läbib tippu $v$. □

Sidusa graafi $G$ *aluspuuks* nimetatakse tema alamgraafi $T$, mis on puu ja mis sisaldab kõiki graafi $G$ tippe. Graafi alampuu kujutab endast mingis mõttes lihtsaimat viisi graafi kõigi tippude kokkuühendamiseks.

Kui meil on defineeritud graafi $G$ servade *kaalud* (s.t. antud mingi funktsioon $E(G) \xrightarrow{w} \mathbb{R}$) ning on antud $G$ mingi aluspuu $T$, siis me võime defineerida ka $T$ kaalu $W(T)$ kui kõigi $T$ servade kaalude summa. Erinevate aluspuude kaalud võivad erinevad olla, meid huvitab, kuidas leida mõni graafi $G$ minimaalse kaaluga aluspuu.

**Teoreem 4.3** *Järgmine algoritm leiab $n$-tipulise sidusa graafi $G$ minimaalse kaaluga aluspuu $T$:*

*(i). Olgu $e_1$ graafi $G$ minimaalse kaaluga serv.*

*(ii). Iga $j \in \{2, \ldots, n-1\}$ jaoks olgu $e_j$ minimaalse kaaluga serv, nii et*

- *$e_j$ on erinev servadest $e_1, \ldots, e_{j-1}$;*
- *$e_j$ ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{j-1}$ tsüklit.*

*Olgu puu $T$ graafi $G$ alamgraaf, mis sisaldab servi $e_1, \ldots, e_{n-1}$.*

Tõestus. See, et $T$ on graafi $G$ aluspuu, järeldub teoreemi 4.1 osast (ii). Meil tuleb veel näidata, et $T$ on minimaalse kaaluga.

Olgu $T'$ graafi $G$ selline aluspuu, mis

- on minimaalse kaaluga;
- minimaalse kaaluga aluspuude seas omab puuga $T$ maksimaalse arvu ühiseid servi.

Oletame vastuväiteliselt, et $W(T') < W(T)$, sel juhul $T' \neq T$. Olgu $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ vähim selline arv, et teoreemi sõnastuses defineeritud serv $e_k$ ei kuulu puusse $T'$. Olgu $S$ graafi $G$ alamgraaf, mis saadakse serva $e_k$ lisamisel puule $T'$. Graaf $S$ sisaldab tsükleid, olgu $C$ selle graafi üks tsükkel. See tsükkel peab sisaldama serva $e_k$, ta peab ka sisaldama mingit serva $e$, mis ei kuulu puusse $T$. Kui me kustutame graafist $S$ serva $e$, siis me saame mingi graafi $T''$, mis on jälle $G$ aluspuu — graaf $T''$ on sidus ja tal on $n-1$ serva.

Servad $e_1, \ldots, e_{k-1}$ kuuluvad ka puusse $T'$. Vastavalt meie konstruktsioonile on $e_k$ minimaalse kaaluga graafi $G$ selliste servade hulgas, mis pole võrdsed servadega $e_1, \ldots, e_{k-1}$ ning ei moodusta koos nende servadega tsüklit graafis $G$. Ka serv $e$ on üks graafi $G$ sellistest servadest, mis pole võrdsed servadega $e_1, \ldots, e_{k-1}$ ning ei moodusta koos nende servadega tsüklit graafis $G$. Seetõttu $w(e_k) \leq w(e)$. Järelikult $W(T'') \leq W(T')$ ning puul $T''$ on puuga $T$ rohkem ühiseid servi kui puul $T'$. Vastuolu $T'$ valikuga. $\square$

## 4.1 Ülesanded

**Ülesanne 34.** Näita, et sidus graaf on puu parajasti siis, kui ta on kahealuseline ja iga kahe tipu jaoks on nendevaheline lühim tee unikaalne.

**Ülesanne 35.** Leia puu kõigi tippude astmete summa.

**Ülesanne 36.** Tõesta, et kui puus on vähemalt kaks tippu, leidub seal ka vähemalt kaks *rippuvat tippu* (st tippu astmega 1).

**Ülesanne 37.** Tõesta, et puul $T$ on kas üks tsenter või kaks omavahel servaga ühendatud tsentrit ning et esimene juht esineb parajasti siis, kui $d(T)$ on paaris.

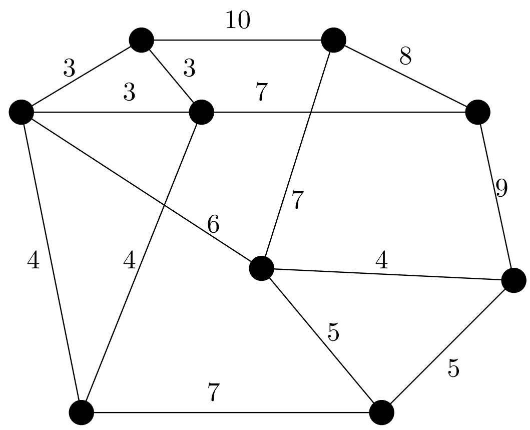
**Ülesanne 38.** Tõesta, et kui $T$ on puu, siis

$$r(T) = \left\lceil \frac{d(T)}{2} \right\rceil .$$

**Ülesanne 39.** Olgu $T$ puu. Tõesta, et kehtib üks kahest väitest:

1. $\exists v \in V(T)\ \forall \phi \in Aut(T)\ \phi(v) = v$ või
2. $\exists (x, y) \in E(T)\ \forall \phi \in Aut(T)\ \phi(\{x, y\}) = \{x, y\}$.

**Ülesanne 40.** Leia järgmise graafi minimaalse kaaluga aluspuu.




**Ülesanne 41.** Kas võib väita, et iga sidusa graafi kaks suvalist aluspuud omavad vähemalt ühte ühist serva?

**Ülesanne 42.** Mitu paarikaupa mitteisomorfset aluspuud on graafil $K_{2,n}$?

**Ülesanne 43.** Kas kehtib, et sidusa graafi $G$ korral

1. $\forall e \in E(G)\ \exists$ aluspuu $T$, $e \in E(T)$?

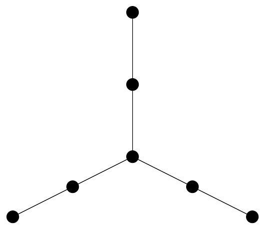
2. $\forall e_1 \neq e_2 \in E(G)\ \exists$ aluspuu $T$, $e_1, e_2 \in E(T)$?

3. $\forall e_1 \neq e_2 \neq e_3 \neq e_1 \in E(G)\ \exists$ aluspuu $T$, $e_1, e_2, e_3 \in E(T)$?

**Ülesanne 44.** Kas võib väita, et kui graafi diameeter on $k$, siis leidub selles graafis aluspuu diameetriga $k$?

**Ülesanne 45.** Näita, et graafi $Q_n$ suvalise aluspuu diameeter on vähemalt $2n-1$. Konstrueeri $Q_n$ aluspuu diameetriga $2n-1$.

**Ülesanne 46.** Puu on *tõuk*, kui temast kõigi tema lehtede kustutamisel allesjääv graaf on ahel. Näita, et puu on tõuk parajasti siis, kui järgmine graaf ei sisaldu temas alamgraafina:



# Peatükk 5

# Märgendatud puude loendamine

Märgendatud graafiks märgendite hulgaga $M \subset \mathbb{N}$ nimetatakse kolmikut $G_M = (V, E, \mu)$, kus $G = (V, E)$ on mingi graaf ja $V \xrightarrow{\mu} M$ on bijektiivne kujutus.

Märgendatud graafe $G_M^1 = (V_1, E_1, \mu_1)$ ja $G_M^2 = (V_2, E_2, \mu_2)$ niemtatakse isomorfseteks (tähistatakse $G_M^1 \cong G_M^2$), kui leidub kujutus $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2$, mis on graafide $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ isomorfism ja $\mu_1(v) = \mu_2(\varphi(v))$ iga $v \in V_1$ korral, st järgmine diagramm on kommutatiivne:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mu_1"'] & V_2 \arrow[d, "\mu_2"] \\ M \arrow[r, equal] & M. \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Paneme tähele, et märgistatud graafid saavad isomorfsed olla siis, kui nende märgendite hulgad on võrdsed. Märgistatud graafi $G_M = (V, E, \mu)$ nimetatakse märgistatud puuks, kui $G = (V, E)$ kui graaf on puu.

Kirjeldame nüüd algoritmi, mis igale $n$-tipulisele ($n \geq 2$) märgendatud puule $G_M = (V, E, \mu)$ märgendite hulgaga $M$ seab vastavusse teatud $(n-2)$-elemendilise (hulka $M$ kuuluvate) märgendite jada, mida nimetatakse märgendatud puu Prüferi koodiks ja tähistatakse $\wp(G_M)$. Algoritm ise on järgmine:

| |
|---|
| 1. Kui $\|V\| = 2$, siis $\wp(G) = []$, st kood on tühisõna. |
| 2. Leia vähima kaaluga leht $v$. Olgu $(v, w) \in E$. |
| 3. Lisa senikoostatud koodi lõppu märgend $\mu(w)$. |
| 4. Eemalda graafist $G$ tipp $v$ koos servaga $(v, w)$ ja mine punkti 1. |

(5.2)

Olgu $T_M = (V, E, \mu)$ on märgendatud puu ja $v \in V$ on mingi leht. Tähistame edaspisi $T - v$ märgendatud puud märgendite hulgaga $M \backslash \{\mu(v)\}$, mis on saadud puust $T$ lehe $v$ eemaldamisel koos teda ühendava servaga, kusjuures kõikide muude tippude märgendid jäävad samaks. Seljuhul saab koodi $\wp(T)$ leidise algoritmi formaalselt kirja panna järgmisel viisil:

$$\wp(T) := \begin{cases} [] & \text{kui } |T| = 2; \\ [\mu(w)\wp(T - v)] & \text{kui } \mu(v) = \min_{\deg_T(u)=1} \mu(u) \text{ ja } (u, w) \in E. \end{cases} \tag{5.3}$$

**Lemma 5.1** *Kui* $\wp(T) = [\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{n-2}]$*, ja* $v$ *on minimaalse märgendiga tipp, siis* $\wp(T - v) = [\mu_2 \ldots \mu_{n-2}]$.

Tõestus. Väide tuleneb otseselt algoritmi kirjeldusest (5.2),(5.3). □

**Lemma 5.2** *Märgend* $\mu(v)$ *esineb koodis* $\wp(T_M)$ *täpselt* $\deg_T(v) - 1$ *korda.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni tippude arvu järgi. Teoreemi väide kehtib, kui $|V| = 2$, sest siis on puus parajasti kaks tippu, mille valentsid on mõlemal ühed, ning Prüferi kood on tühi, st mõlemad tipud esinevad koodis täpselt 0 korda.

Oletame, et teoreemi väide kehtib kõigi $(n - 1)$-tipuliste märgendatud puude korral (mistahes $(n - 1)$-tipuliste märgendite hulkadega). Olgu $T = (V, E, \mu)$ mingi $n$-tipuline märgendatud puu märgendite hulgaga $M$ ja Prüferi koodiga $[\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{n-2}]$.

Olgu $v \in V$ minimaalse märgendiga leht selles puus ja $(u, w) \in E$. Vastavalt Algoritmile (5.2) on $\mu(w) = \mu_1$. $T' = T - v$ on $(n - 1)$-tipuline märgendatud puu märgendite hulgaga $M \backslash \{\mu_1\}$, ja vastavalt Lemmale 5.1 on $\wp(T') = [\mu_2 \ldots \mu_{n-2}]$. Olgu $u \in V$ suvaline tipp puus $T$. On kolm võimalust:

- Kui $u = v$, siis on selge, et $\deg(u) = 1$ ja $\mu(u)$ ei esine kordagi prüferi koodis $\wp(T)$, sest $v$ eemaldatakse puust juba esimesel sammul.

- Kui $u = w \in T'$, siis $\deg_{T'}(u) = \deg_T(u) - 1$ ja $\mu(u) = \mu_1$ esineb koodis $\wp(T') = [\mu_2 \dots \mu_{n-2}]$ ühe korra rohkem kui koodis $\wp(T) = [\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-2}]$. Kuna vastavalt induktsiooni eeldusele esineb $\mu(u) = \mu_1$ koodis $\wp(T')$ täpselt $\deg_{T'}(u) - 1$ korda, siis järelikult esineb ta koodis $\wp(T)$ ühe korra rohkem, st

$$(\deg_{T'}(u) - 1) + 1 = \deg_{T'}(u) = \deg_T(u) - 1$$

korda.

- Kui $u \in V\backslash\{v, w\}$, siis järelikult $(v, u) \notin E$ (sest $\deg_T(v) = 1$ ja $(u, w) \in E$), mistõttu $\deg_T(u) = \deg_{T'}(u)$. Kujutuse $\mu$ injektiivsuse tõttu $\mu(u) \neq \mu_1 = \mu(w)$ ja seega esineb $\mu(u)$ koodis $\wp(T)$ sama arv kordi, kui koodis $\wp(T')$, st vastavalt induktsiooni eeldusele

$$\deg_{T'}(u) - 1 = \deg_T(u) - 1$$

korda.

Lemma on tõestatud. □

**Teoreem 5.3** *Kui $T^1_M = (V_1, E_1, \mu_1)$ ja $T^2_M = (V_2, E_2, \mu_2)$ on märgendatud puud ühise märgendite hulgaga $M$ ja $\wp(T^1_M) = \wp(T^2_M)$, siis $T^1_M \cong T^2_M$.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni tippude hulga järgi. See on võimalik, sest puu tippude arv on Prüferi koodi pikkusega üheselt määratud, mistõttu kaks puud, mille koodid on samad, on võrdse tippude arvuga.

Näitame, et teoreemi väide kehtib, kui $T^1_M$ ja $T^2_M$ on kahetipulised. Olgu $M = \{m_1, m_2\}$, kus $m_1 < m_2$. Kuna puud on kahetipulised, siis $\wp(T^1_M) = [] = \wp(T^2_M)$. On selge, et kahetipuliste graafide korral on iga diagrammi (5.1) kommutatiivseks tegev bijektsioon $\varphi$ ühtlasi ka märgistatud graafide $T^1_M$ ja $T^2_M$ isomorfism. Samuti on selge et parajasti üks selline bijektsioon leidub.

Oletame, et teoreemi väide kehtib kõigi $(n-1)$-tipuliste märgendatud puude korral. Olgu $T^1_M$ ja $T^2_M$ mingid $n$-tipulised märgendatud puud, nii et

$$\wp(T^1_M) = [\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-2}] = \wp(T^2_M).$$

Paneme tähele, et Prüferi koodist saab leida lehtede märgendite hulga, milleks on kõik need märgendid, mis on hulgas $M$, kuid mis ei esine kordagi

Prüferi koodis. Seega on mõlema puu lehtede märgendite hulgad võrdsed. Seega on ka minimaalse märgendiga lehtede $v_1 \in V_1$ ja $v_2 \in V_2$ märgendid võrdsed, st $\mu_1(v_1) = m = \mu_2(v_2)$ mingi $m \in M$ korral, mistõttu $T_M^1 - v_1$ ja $T_M^2 - v_2$ on märgendatud puud ühise märgendite hulgaga $M\backslash\{m\}$, kusjuures

$$\wp(T_M^1 - v_1) = [\mu_2 \dots \mu_{n-2}] = \wp(T_M^2 - v_2).$$

Vastavalt induktsiooni eeldusele $T_M^1 - v_1 \cong T_M^2 - v_2$, st leidub isomorfism $V_1\backslash\{v_1\} \xrightarrow{\varphi} V_2\backslash\{v_2\}$. Olgu $(v_1, w_1) \in E_1$ ja $(v_2, w_2) \in E_2$. Vastavalt Prüferi koodi definitsioonile, $\mu_1(w_1) = \mu_1 = \mu_2(w_2)$, ja seega diagrammi (5.1) kommutatiivsuse tõttu

$$\mu_2(w_2) = \mu_1(w_1) = \mu_2(\varphi(w_1)),$$

millest funktsiooni $\mu_2$ injektiivsuse tõttu saame, et $\varphi(w_1) = w_2$. Viimasest seosest järeldub, et isomorfismi $\varphi$ saab jätkata isomorfismini $T_M^1 \xrightarrow{\bar{\varphi}} T_M^2$ defineerides iga $v \in V_1$ korral

$$\bar{\varphi}(v) = \begin{cases} \varphi(v), & \text{kui } v \in V_1\backslash\{v_1\} \\ v_2, & \text{kui } v = v_1. \end{cases}$$

Lihtne on veenduda, et $\bar{\varphi}$ on tõepoolest märgendatud graafide isomorfism. Seega $T_M^1 \cong T_M^2$. □

**Teoreem 5.4** *Olgu $M \subset \mathbb{N}$ ja $|M| = n \geq 2$. Olgu $\mathcal{M} = [\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-2}]$ mingi $(n-1)$-elemendiline järjend, nii et $\mu_i \in M$ iga $i \in \{1 \dots n-2\}$ korral. Siis leidub $n$-tipuline märgendatud puu $T_M = (V, E, \mu)$ märgendite hulgaga $M$ nii et $\wp(T_M) = \mathcal{M}$.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni hulga $M$ võimsuse järgi. Kui $M = \{m_1, m_2\}$, siis $\mathcal{M} = []$ ja võime $T$-ks võtta kaheelemendilise puu, omistades märgendid suvalises järjekorras. Oletame, et väide kehtib $(n-1)$-elemendiliste märgendihulkade korral.

Olgu $|M| = n$ ja $\mathcal{M} = [\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-2}]$ on mingi $(n-2)$-elemendiline järjend, nii et $\forall i \in \{1 \dots n-2\}\colon \mu_i \in M$. On selge, et hulk $M\backslash\mathcal{M}$ pole tühi, sest hulgas $M$ on rohkem elemente kui järjendis $\mathcal{M}$. Olgu $\mu_0$ minimaalne element selles hulgas. Olgu $T'_{M'} = (V', E', \mu')$ märgendatud puu märgendite hulgaga $M' = M\backslash\{\mu_0\}$, nii et $\wp(T'_{M'}) = \mathcal{M}' = [\mu_2 \dots \mu_{n-2}]$, mis leidub tänu induktsiooni eeldusele ja faktile, et $|M'| = n-1$.

Olgu $w \in V'$ tipp, nii et $\mu'(w) = \mu_1$. Selline tipp leidub, sest $V' \xrightarrow{\mu'} M'$ on bijektiivne. Moodustame uue puu $T_M$ lisades puusse $T'_{M'}$ uue tipu $v$ ja uue serva $(v, w)$, nii et $v$ on puu $T_M$ leht. Olgu $V = V' \cup \{v\}$ ja $E = E' \cup \{(u, v)\}$. Laiendame funktsiooni $V' \xrightarrow{\mu'} M'$ funktsioonini $V \xrightarrow{\mu} M$ defineerides $\mu(v) := \mu_0$.

Tipp $v$ puu $T_M$ minimaalse märgendiga leht, sest kui leiduks leht $v' \in V$ nii et $\mu(v') < \mu(v) = \mu_0$, siis $v' \in V'$ ja $v'$ seega on $v'$ leht ka puus $T'_{M'}$, millest $\wp(T'_{M'}) = \mathcal{M}'$ ja Lemma 5.2 tõttu saame, et $v' \in M \backslash \mathcal{M}$, mis on vastuolus $\mu_0$ valikuga. Seega vastavalt algoritmile (5.3)

$$\wp(T_M) = [\mu_1 \wp(T_M - v)] = [\mu_1 \wp(T'_{M'})] = [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-2}],$$

mis tõestabki teoreemi väite. □

Siit aga järeldub kohe Cayley teoreem:

**Teoreem 5.5 (Cayley)** *Iga $n \geq 2$ korral leidub täpselt $n^{n-2}$ mitteisomorfset märgendatud puud märgendite hulgaga $M = \{1, \dots, n\}$.*

Tõestus. Eelmised kaks teoreemi tõestavad, et saab korraldada üksühese vastavuse $n$-tipuliste märgendatud puude ja $(n-2)$-elemendiliste arvujadade $[\mu_1 \dots \mu_{n-2}]$ vahel, kus $\mu_i \in M$. Neid jadasid on $n^{n-2}$ ja seega on sama palju ka märgendatud puid. □

## 5.1 Ülesanded

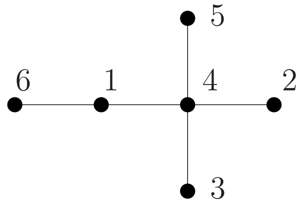
**Ülesanne 47.** Leia Prüferi koodidele

1. $(1, 2, 3, 4)$,
2. $(4, 3, 2, 1)$,
3. $(3, 3, 3, 3)$,
4. $(4, 3, 4, 5, 4, 7, 7)$,
5. $(2, 3, 3, 3, 6, 6, 6)$,
6. $(2, 4, 2, 1, 9, 1, 8)$

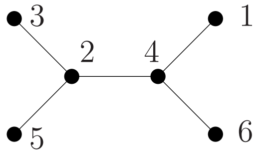
vastavad märgendatud puud.

**Ülesanne 48.** Leia järgmiste märgendatud puude Prüferi koodid:

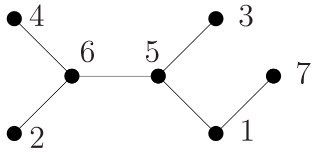
1.



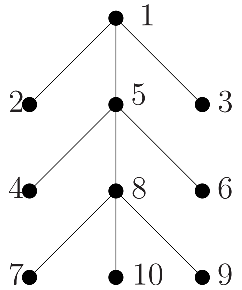

2.



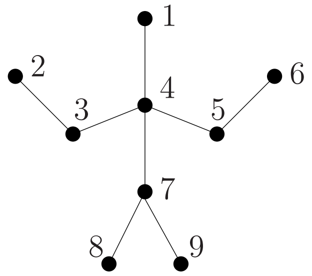

3.



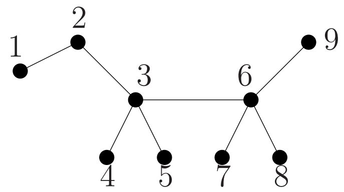

4.




5.



6.




**Ülesanne 49.** Tõesta, et iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks kehtib

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2} \quad .$$

Vihje: $n$-tipulise märgendatud puu saame $k$-tipulise märgendatud puu ja $(n-k)$-tipulise märgendatud puu mingil viisil servaga ühendamisel.

**Ülesanne 50.** Olgu $\tau(G)$ graafi $G$ aluspuude arv. Näita, et iga $e \in E(G)$ jaoks kehtib $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \backslash e)$. Siin $G \backslash e$ tähistab serva $e$ *kokkutõmbamist*, s.t. tema otstipud loetakse üheks tipuks.

# Peatükk 6

# Võrgud ja vood

*Võrk* on suunatud graaf $G$, mille igal serval $e$ on defineeritud *läbilaskevõime* $\psi(e)$, kus $\psi(e)$ on mittenegatiivne reaalarv, s.t. $E(G) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}_+$.

Suunatud graafi tippu $v$ nimetatakse *lähteks*, kui see tipp pole ühegi serva lõpptipp. Suunatud graafi tippu $v$ nimetatakse *suudmeks*, kui see tipp pole ühegi serva algtipp. Käesolevas osas me vaatame ainult selliseid võrkusid, millel on täpselt üks lähe ja täpselt üks suue. Siintoodavaid tulemusi saab üldistada ka juhule, kus graafil on mingi muu arv lähteid või suudmeid.

Kui $G$ on suunatud graaf ja $f$ on selle graafi servade märgendus reaalarvudega, s.t. $E(G) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, siis on graafi $G$ tipu $v$ *$f$-sisendaste* $\overrightarrow{\deg}_f(v)$ ja *$f$-väljundaste* $\overleftarrow{\deg}_f(v)$ defineeritud järgmiselt:

$$\overrightarrow{\deg}_f(v) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \exists w: \mathcal{E}(e)=(w,v)}} f(e) \quad \text{ja} \quad \overleftarrow{\deg}_f(v) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \exists w: \mathcal{E}(e)=(v,w)}} f(e) \ .$$

**Lause 6.1** *Olgu $G$ suunatud graaf ja olgu $f$ on selle graafi servade märgendus reaalarvudega. Siis on $G$ kõigi tippude $f$-väljundastmete summa võrdne $G$ kõigi tippude $f$-sisendastmete summaga.*

Tõestus. Meil on

$$\sum_{v \in V(G)} \overleftarrow{\deg}_f(v) = \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \exists w: \mathcal{E}(e)=(w,v)}} f(e) = \sum_{e \in E(G)} f(e) = \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \exists w: \mathcal{E}(e)=(v,w)}} f(e) = \sum_{v \in V(G)} \overrightarrow{\deg}_f(v) \ .$$

$\square$

Olgu $(G, \psi)$ võrk ja olgu tipud $s$ ja $t$ selle võrgu lähe ja suue. *Vooks* $\varphi$ võrgul $G$ nimetatakse graafi $G$ servade märgendust mittenegatiivsete reaalarvudega, nii et

- iga $G$ serva $e$ jaoks kehtib $\varphi(e) \leq \psi(e)$;
- iga $G$ tipu $v$ jaoks, välja arvatud tipud $s$ ja $t$, kehtib $\overrightarrow{\deg_\varphi}(v) = \overleftarrow{\deg_\varphi}(v)$.

Olgu $(G, \psi)$ võrk ja olgu $\varphi$ mingi tema voog. Lausest 6.1 järeldub, et $G$ lähte $\varphi$-väljundaste võrdub $G$ suudme $\varphi$-sisendastmega; seda arvu nimetatakse voo $\varphi$ *väärtuseks* ja tähistatakse $|\varphi|$. Meid huvitab, kui suur võib $(G, \psi)$ voo väärtus olla; neid voogusid, millel on see suurim võimalik väärtus, nimetame *maksimaalseteks voogudeks*.

Voo väärtust ei pea tingimata „mõõtma" võrgu lähte või suudme juures. Me võime võrgu tipud suvalisel viisil kahte ossa jagada, nii et lähe kuuluks ühte ossa ja suue teise ossa, voo $\varphi$ väärtuse võib siis leida suuruste $\varphi(e)$ kaudu, kus $e$ on serv kahe osa vahel.

**Lemma 6.2** *Olgu $(G, \psi)$ mingi võrk ning $\varphi$ mingi voog sellel võrgul. Olgu $G$ tipuhulk $V(G)$ tükeldatud hulkadeks $V_s$ ja $V_t$ (s.t. $V_s \cup V_t = V(G)$ ja $V_s \cap V_t = \emptyset$) nii, et $s \in V_s$ ja $t \in V_t$. Siis $\varphi$ väärtus on võrdne suurusega $\Phi(V_s, V_t)$, mis on defineeritud kui*

$$\Phi(V_s, V_t) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \mathcal{E}(e) \in V_s \times V_t}} \varphi(e) - \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \mathcal{E}(e) \in V_t \times V_s}} \varphi(e) \ . \tag{6.1}$$

Tõestus. Paneme kõigepealt tähele, et kui $e \in E(G)$ on silmus ning $\varphi$ on mingi $E(G)$ märgendus mittenegatiivsete reaalarvudega, siis ei sõltu ei $\varphi$ vooks olemine või mitteolemine ega ka $\varphi$ väärtus (kui ta on voog) $\varphi(e)$ väärtusest. Seetõttu võime me üldsust kitsendamata eeldada, et $\varphi(e) = 0$ iga silmuse $e \in E(G)$ jaoks.

Lemma tõestame induktsiooniga üle hulga $V_s$ võimsuse. Baasiks on juht $|V_s| = 1$, s.t. $V_s = \{s\}$. Sel juhul on vahe (6.1) vasak pool võrdne $\varphi$ väärtusega (vastavalt voo väärtuse definitsioonile) ning parem pool võrdne nulliga (kuna ei leidu servi, mille lõpptipp oleks $s$).

$\Phi(V_s, V_t) =$

| $V \times V$ | $V_s$ | $x$ | $V_t'$ |
|---|---|---|---|
| $V_s$ | | $+\varphi$ | $+\varphi$ |
| $x$ | $-\varphi$ | | |
| $V_t'$ | $-\varphi$ | | |

$\Phi(V_s', V_t') =$

| $V \times V$ | $V_s$ | $x$ | $V_t'$ |
|---|---|---|---|
| $V_s$ | | | $+\varphi$ |
| $x$ | | | $+\varphi$ |
| $V_t'$ | $-\varphi$ | $-\varphi$ | |

$\Phi(V_s, V_t) - \Phi(V_s', V_t') =$

| $V \times V$ | $V_s$ | $x$ | $V_t'$ |
|---|---|---|---|
| $V_s$ | | $+\varphi$ | |
| $x$ | $-\varphi$ | | $-\varphi$ |
| $V_t'$ | | $+\varphi$ | |

**Joonis 6.1:** $\Phi(V_s, V_t)$, $\Phi(V_s', V_t')$ ja nende vahe arvutamine.

Kehtigu lemma väide nüüd mingite hulkade $V_s$ ja $V_t$ jaoks ning olgu $x \in V_t \backslash \{t\}$. Olgu $V_s' = V_s \cup \{x\}$ ja $V_t' = V_t \backslash \{x\}$. Piisab, kui näitame, et $\Phi(V_s', V_t') = \Phi(V_s, V_t)$. Meil on

$$\Phi(V_s, V_t) - \Phi(V_s', V_t') = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \mathcal{E}(e) \in V_s \times \{x\}}} \varphi(e) - \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \mathcal{E}(e) \in \{x\} \times V_t'}} \varphi(e) - \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \mathcal{E}(e) \in \{x\} \times V_s}} \varphi(e) + \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \mathcal{E}(e) \in V_t' \times \{x\}}} \varphi(e) = \overrightarrow{\deg_\varphi}(x) - \overleftarrow{\deg_\varphi}(x) = 0$$

(esimest võrdust selgitab joonis 6.1), seega $\Phi(V_s', V_t') = \Phi(V_s, V_t)$. $\square$

Vooga mingis mõttes duaalne mõiste on *lõige*. Võrgu $(G, \psi)$ lõikeks nimetatakse sellist graafi $G$ servade hulka $L \subseteq E(G)$, et $L$-i kuuluvate servade eemaldamisel $G$-st poleks $G$-s enam ühtegi (suunatud) teed lähtest suudmesse. Lõike $L$ *läbilaskevõimeks* nimetatakse tema elementide läbilaskevõimete summat. Minimaalse võimaliku läbilaskevõimega lõikeid nimetatakse *minimaalseteks lõigeteks*.

**Teoreem 6.3 (Ford ja Fulkerson, 1955)** *Võrgu maksimaalsete voogude väärtused on võrdsed selle võrgu minimaalsete lõigete läbilaskevõimetega.*

Tõestus. Olgu $(G, \psi)$ mingi võrk ning olgu $s$ tema lähe ja $t$ tema suue. Näitame kõigepealt, et tema ükskõik millise voo väärtus ei saa olla suurem kui tema ükskõik millise lõike läbilaskevõime. Olgu $L$ võrgu $G$ mingi lõige ja olgu $G'$ graaf, mis saadakse graafist $G$ jättes temast välja $L$-i kuuluvad servad. Olgu $V_s$ graafi $G$ (ja $G'$) selliste tippude hulk, millesse leidub graafis $G'$ tipust $s$ suunatud tee. Olgu $V_t$ graafi $G$ kõigi ülejäänud tippude hulk. Siis $s \in V_s$ ja $t \in V_t$. Vastavalt lemmale 6.2 on $\varphi$ väärtus võrdne vahega (6.1). Kõik servad, üle mille summeeritakse selle vahe vasakus pooles, kuuluvad lõikesse $L$. Seega pole selle vahe vasak pool, seda enam terve vahe, suurem kui $L$-i läbilaskevõime.

Me oleme näidanud, et võrgu maksimaalsete voogude väärtus pole suurem kui selle võrgu minimaalsete lõigete läbilaskevõime. Olgu $\varphi$ nüüd mingi võrgu $(G, \psi)$ maksimaalne voog, tõestamaks teoreemi tuleb meil veel näidata, et leidub selline lõige, mille läbilaskevõime on võrdne $\varphi$ väärtusega.

Selleks defineerime me graafi $G$ tipuhulga $V(G)$ tükelduse $V_s \dot\cup V_t$. Tippu $v \in V(G)$ loeme kuuluvaks hulka $V_s$ parajasti siis, kui graafis $G$ leidub *suunamata* tee $s = v_0 \overset{e_1}{—} v_1 \overset{e_2}{—} \cdots \overset{e_m}{—} v_m = v$, nii et iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ jaoks:

(i). kui $\mathcal{E}(e_i) = (v_{i-1}, v_i)$, siis $\varphi(e_i) < \psi(e_i)$;

(ii). kui $\mathcal{E}(e_i) = (v_i, v_{i-1})$, siis $\varphi(e_i) > 0$.

Sellist teed nimetame suurendavaks teeks (tippu $v$). Kui mingi tipupaari $(v_{i-1}, v_i)$ (siin $v_{i-1}$ ja $v_i$ on suvalised tipud hulgast $V$) jaoks leidub serv $e_i$, mis rahuldab tingimusi (i) ja (ii), siis ütleme, et voog on tippude $v_{i-1}$ ja $v_i$ vahel *küllastamata*. Tipp $v$ kuulub hulka $V_t$ parajasti siis, kui ta ei kuulu hulka $V_s$.

Vastavalt definitsioonile kuulub lähe $s$ hulka $V_s$. Tuleb välja, et suue $t$ kuulub hulka $V_t$. Tõepoolest, oletame, et ta kuulub hulka $V_s$, sel juhul leidub suurendav tee $s = v_0 \overset{e_1}{—} v_1 \overset{e_2}{—} \cdots \overset{e_m}{—} v_m = t$. Defineerime positiivsed reaalarvud $\delta_i \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ järgmiselt:

$$\delta_i = \begin{cases} \psi(e_i) - \varphi(e_i), & \text{kui } \mathcal{E}(e_i) = (v_{i-1}, v_i) \\ \varphi(e_i), & \text{kui } \mathcal{E}(e_i) = (v_{i-1}, v_i) \end{cases}$$

ja olgu $\varepsilon = \min_{i \in \{1, \ldots, m\}} \delta_i$. Olgu $\varphi'$ järgmine voog võrgul $(G, \psi)$:

$$\varphi'(e) = \begin{cases} \varphi(e), & \text{kui } e \notin \{e_1, \ldots, e_m\} \\ \varphi(e) + \varepsilon, & \text{kui } \exists i : e = e_i \text{ ja } \mathcal{E}(e_i) = (v_{i-1}, v_i) \\ \varphi(e) - \varepsilon, & \text{kui } \exists i : e = e_i \text{ ja } \mathcal{E}(e_i) = (v_i, v_{i-1}); \end{cases}$$

on ilmne, et selliselt defineeritud $\varphi'$ on tõepoolest voog. Voo $\varphi'$ väärtus on $\varepsilon$-i võrra suurem kui voo $\varphi$ väärtus, see on vastuolus meie eeldusega, et $\varphi$ on maksimaalne voog. Järelikult $t \in V_t$.

Hulkade $V_s$ ja $V_t$ konstruktsiooni tõttu kehtivad graafi $G$ serva $e$ kohta järgmised väited:

- kui $\mathcal{E}(e) \in V_s \times V_t$, siis $\varphi(e) = \psi(e)$ (muidu kuuluks $e$ lõpptipp hulka $V_s$);

- kui $\mathcal{E}(e) \in V_t \times V_s$, siis $\varphi(e) = 0$ (muidu kuuluks $e$ algtipp hulka $V_s$).

Siit omakorda järeldub, et $\varphi$ väärtus on võrdne kõigi servade $e \in E(G)$, kus $\mathcal{E}(e) \in V_s \times V_t$, läbilaskevõimete summaga. Kõigi selliste servade hulk on võrgu $G$ lõige, mis ongi otsitav. □

**Järeldus 6.4** *Olgu $(G, \psi)$ võrk ning olgu $\varphi$ mingi tema voog ja $L$ mingi tema lõige, nii et $\varphi$ väärtus on võrdne $L$-i läbilaskevõimega. Siis $\varphi$ on $(G, \psi)$ maksimaalne voog ja $L$ on minimaalne lõige.*

Tõestus. Teoreemi 6.3 järgi on $\varphi$ väärtus vähemalt sama suur kui maksimaalsetel voogudel ning $L$ läbilaskevõime on ülimalt nii suur kui minimaalsetel lõigetel. □

Teoreemi 6.3 tõestus annab meile ka algoritmi maksimaalse voo leidmiseks võrgus $(G, \psi)$. Olgu $\varphi_0$ ükskõik milline voog selles võrgus (näiteks *nullvoog* — voog, kus kõigi servade märgendiks on 0). Kui meil on antud voog $\varphi_i$, siis püüame leida mingi suurendava tee tippu $t$. Selleks võime näiteks konstrueerida hulgad $V_s$ ja $V_t$ analoogiliselt teoreemi tõestusega; hulk $V_s$ konstrueeritakse graafi mingil viisil läbides, sellest läbimisest on lihtsalt leitavad suurendavad teed kõigisse hulga $V_s$ elementidesse. Kui $t \in V_t$ (ja suurendavat teed tippu $t$ ei leidu), siis on $\varphi_i$ maksimaalne voog, sest leidub lõige, mille läbilaskevõime võrdub $\varphi_i$ väärtusega. Kui $t \in V_s$, siis konstrueerime voo $\varphi_{i+1}$ analoogiliselt voo $\varphi'$ konstruktsiooniga teoreem 6.3 tõestuses, kasutades selleks leitud suurendavat teed tippu $t$. Seejärel kordame eeltoodud sammu vooga $\varphi_{i+1}$. Kirjeldatud algoritmi nimetatakse Ford-Fulkersoni algoritmiks.

Ford-Fulkersoni algoritmi kirjeldusest ei selgu, mitu iteratsiooni võib vaja minna (s.t. kui suur võib indeks $i$ maksimaalse vooni jõudes olla), saamaks mingit maksimaalset voogu. Uurime seda küsimust veidi lähemalt.

**Lause 6.5** *Olgu $(G, \psi)$ mingi võrk, kus kõigil servadel on täisarvulised läbilaskevõimed. Sel juhul tehakse maksimaalse voo leidmise algoritmis ülimalt $|\varphi|$ iteratsiooni, kus $\varphi$ on $(G, \psi)$ mingi maksimaalne voog.*

Tõestus. Kui kõigi servade läbilaskevõimed on täisarvud, siis märgendavad ka vood $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, mis Ford-Fulkersoni algoritm oma järjestikustel iteratsioonidel koostab, kõik graafi $G$ servad täisarvudega. Tõepoolest, murdarvud ei saa algoritmi töö käigus kuskilt sisse tulla — ainsad operatsioonid, mida algoritm arvudega teeb, on liitmine, lahutamine ja miinimumi leidmine, need operatsioonid aga annavad täisarvudele rakendades jälle tulemuseks täisarvu.

Seega on ka $|\varphi_0|, |\varphi_1|, |\varphi_2|, \ldots$ kõik täisarvud. Kuna $|\varphi_{i+1}| > |\varphi_i|$, siis $|\varphi_{i+1}| - |\varphi_i| \geq 1$. Seega jõutakse ülimalt $|\varphi|$ sammu pärast mingi maksimaalse vooni $|\varphi|$. □

See iteratsioonide ülemtõke võib vägagi ebatäpne olla, kuid vähemalt näitab ta, et kui kõigi servade läbilaskevõimed on täisarvud, siis lõpetab Ford-Fulkersoni algoritm töö. Siit järeldub kohe, et ka siis, kui kõigi servade läbilaskevõimed on ratsionaalarvud, siis lõpetab Ford-Fulkersoni algoritm töö. Sel juhul on mingil iteratsioonil leitud voo väärtus eelmisel iteratsioonil leitud voo väärtusest vähemalt kõigi servade läbilaskevõimete vähima ühise nimetaja pöördväärtuse võrra suurem. Kui me lubame servade läbilaskevõimetena ka irratsionaalarve, siis on võimalik konstrueerida võrk ning sellised suurendavate teede valikud, et algoritmi iteratsioonidel leitavate voogude väärtused küll lähenevad piiramatult maksimaalse voo väärtusele, kuid ei saa sellega kunagi võrdseks.

Parema keerukushinnangu Ford-Fulkersoni algoritmile saame, kui me fikseerime, mil viisil suurendav tee leitakse. Loeme nüüd, et suurendav tee tippu $t$ leitakse graafi $G$ *laiuti läbides*. Sellist täiendust nimetatakse Edmonds-Karpi täienduseks. Sel juhul on suurendav tee tippu $t$, mida algoritm kasutab, minimaalse võimaliku pikkusega. Enamgi veel, kõigi tippude $v \in V_s$ jaoks on suurendav tee lähtest $s$ tippu $v$, mis hulka $V_s$ konstrueerides leitakse, minimaalse võimaliku pikkusega.

Kui $(G, \psi)$, kus $G = (V, E)$, on mingi võrk ja $\varphi$ mingi voog sellel, siis tähistagu $\delta_\varphi(v)$, kus $v \in V$, lühima suurendava tee pikkust tippu $v$.

**Lemma 6.6** *Olgu $(G, \psi)$, kus $G = (V, E)$, mingi võrk ja olgu $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ voogude jada, mis leitakse Ford-Fulkersoni algoritmi (koos Edmonds-Karpi täiendusega) järjestikustel iteratsioonidel. Siis on suvalise $v \in V$ jaoks jada $\delta_{\varphi_i}(v)$ mittekahanev.*

Tõestus. Olgu $\varphi_n$ ja $\varphi_{n+1}$ kaks järjestikust voogu selles voogude jadas ning olgu $B \subseteq V$ kõigi selliste tippude hulk, mis $n$-i juures seda mittekahanevuse tingimust ei täida, s.t. olgu

$$B = \{v \mid v \in V, \delta_{\varphi_{n+1}}(v) < \delta_{\varphi_n}(v)\} \ .$$

Oletame vastuväiteliselt, et hulk $B$ ei ole tühi. Olgu $v \in B$ selline, mille jaoks $\delta_{\varphi_{n+1}}(v)$ on minimaalne.

Olgu $P'$ lühim suurendav tee tippu $v$ (voo $\varphi_{n+1}$ järgi). Olgu $u$ selle tee eelviimane tipp (s.t. vahetult enne $v$-d). Kuna $P'$ ilma oma viimase tiputa on lühim suurendav tee tippu $u$, siis $\delta_{\varphi_{n+1}}(u) = \delta_{\varphi_{n+1}}(v) - 1$. Kuna $\delta_{\varphi_{n+1}}(v)$ väärtus on minimaalne hulga $B$ elementide seas, siis $u \notin B$. Uurime voogu $\varphi_n$ tippude $u$ ja $v$ vahel.

Kui $\varphi_n$ on tippude $u$ ja $v$ vahel küllastamata, siis on iga suurendav tee tippu $u$ (voo $\varphi_n$ järgi) ühe sammuga pikendatav suurendavaks teeks tippu $v$. Muuhulgas kehtib see ka lühima suurendava tee kohta ning seega $\delta_{\varphi_n}(v) \leq \delta_{\varphi_n}(u) + 1$. Kuna ka $\delta_{\varphi_n}(u) \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u)$ (sest $u \notin B$), siis

$$\delta_{\varphi_n}(v) \leq \delta_{\varphi_n}(u) + 1 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u) + 1 = \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja järelikult $v \notin B$, vastuolu.

Kui $\varphi_n$ on tippude $u$ ja $v$ vahel küllastatud, siis tähistame $P_n$-iga suurendavat teed (voo $\varphi_n$ suhtes) võrgu $(G, \psi)$ suudmesse, nii et voog $\varphi_{n+1}$ on saadud voost $\varphi_n$, lisades talle täiendava voo üle tee $P_n$ (sama moodi, nagu teoreemi 6.3 tõestuses saadakse voog $\varphi'$ voost $\varphi$, lisades talle täiendava voo üle teatava suurendava tee). Kuna $\varphi_{n+1}$ on tippude $u$ ja $v$ vahel küllastamata, siis peab tees $P_n$ leiduma fragment $\cdots — v — u — \cdots$.

Kuna $P_n$ on leitud graafi $G$ laiuti läbides, siis on $P_n$-i prefiks kuni tipuni $v$ (analoogiliselt: kuni tipuni $u$) minimaalse pikkusega suurendav tee (voo $\varphi_n$ järgi) tippu $v$ (analoogiliselt: tippu $u$). Järelikult $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1$. Kuna ka $\delta_{\varphi_n}(u) \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u)$ (sest $u \notin B$), siis

$$\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u) - 1 = \delta_{\varphi_{n+1}}(v) - 2 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja järelikult $v \notin B$, vastuolu. □

**Teoreem 6.7** *Ford-Fulkersoni algoritm koos Edmonds-Karpi täiendusega teeb võrgu* $(G, \psi)$, *kus* $G = (V, E)$, *maksimaalset voogu leides ülimalt* $(|V| - 2) \cdot |E|$ *iteratsiooni.*

Tõestus. Olgu $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ vood, mis maksimaalse voo leidmise algoritm oma järjestikustel iteratsioonidel koostab. Leidmaks voost $\varphi_n$ voogu $\varphi_{n+1}$ konstrueerib algoritm $n$-ndal iteratsioonil mingi suurendava tee

$$P_n : s = v_0 \overset{e_1}{—} v_1 \overset{e_2}{—} v_2 \overset{e_3}{—} \cdots \overset{e_m}{—} v_m = t \ .$$

Defineerime suurused $\delta_1, \ldots, \delta_m$ samamoodi nagu teoreemi 6.3 tõestuses. Ütleme, et tipupaar $(v_{i-1}, v_i)$ on *kriitiline*, kui talle vastav suurus $\delta_i$ on minimaalne (teoreemi 6.3 tõestuse terminites: $(v_{i-1}, v_i)$ on kriitiline, siis kui $\delta_i = \epsilon$). Igal iteratsioonil leidub vähemalt üks kriitiline tipupaar ja järgmisel iteratsioonil on voog nende tippude vahel küllastatud.

Olgu $u, v \in V$. Loeme, mitmel iteratsioonil võib tipupaar $(u, v)$ kriitiline olla. Kui $(u, v)$ on $n$-ndal iteratsioonil kriitiline, siis sisaldab $P_n$ fragmenti $\cdots — u — v — \cdots$ ja seega $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) + 1$.

Iteratsioonil järjekorranumbriga $n + 1$ on voog tippude $u$ ja $v$ vahel küllastatud. Kui $(u, v)$ on iteratsioonil $n'$, kus $n' > n$, taas kriitiline, siis on voog $\varphi_{n'}$ tippude $u$ ja $v$ vahel taas küllastamata. Järelikult peab leiduma mingi iteratsioon $n''$, kus $n < n'' < n'$, nii et suurendav tee $P_{n''}$ sisaldaks fragmenti $\cdots — v — u — \cdots$. Siis aga $\delta_{\varphi_{n''}}(u) = \delta_{\varphi_{n''}}(v) + 1$.

Kokkuvõttes saame

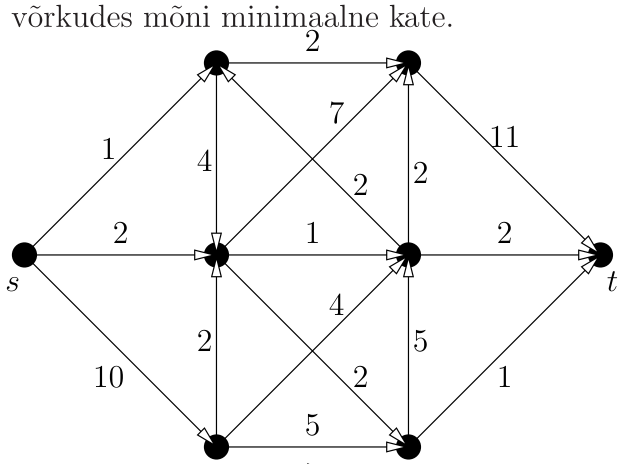
$$\delta_{\varphi_{n'}}(u) \geq \delta_{\varphi_{n''}}(u) = \delta_{\varphi_{n''}}(v) + 1 \geq \delta_{\varphi_n}(v) + 1 = \delta_{\varphi_n}(u) + 2,$$

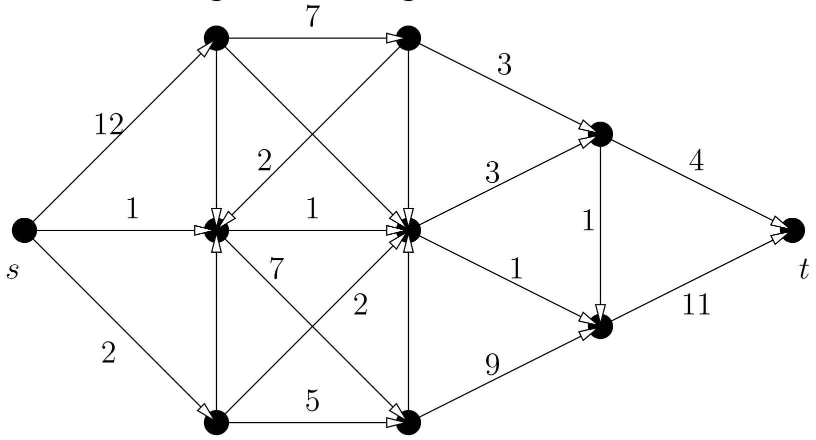
seega iga kord, kui $(u, v)$ saab kriitiliseks, on suurus $\delta_{\varphi_n}(u)$ eelmise korraga võrreldes vähemalt kahe võrra suurenenud.

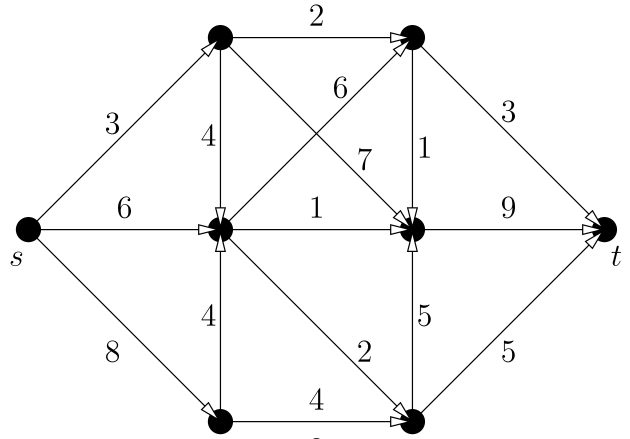
Kui $(u, v)$ on kriitiline tipupaar, siis ei saa suurus $\delta_{\varphi_n}(u)$ olla suurem kui $|V| - 2$. Tõepoolest, kriitilise tee $P_n$ pikkus ei ole suurem kui $n - 1$, sest ta sisaldab kõiki tippe ülimalt üks kord. Samuti pole tipp $u$ tee $P_n$ viimane tipp, sest tipp $v$ tuleb veel peale teda. Tipupaare, mis üldse võivad kriitiliste tipupaaridena kõne alla tulla, on ülimalt $2 \cdot |E|$ tükki — kui $(u, v)$ on kriitiline, siis peab leiduma serv tipust $u$ tippu $v$ või tipust $v$ tippu $u$. □

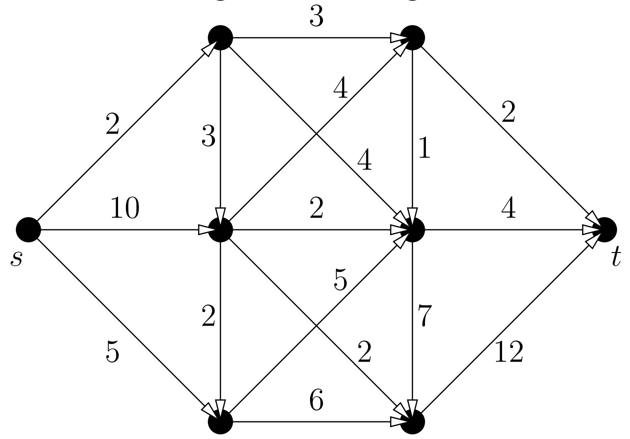
## 6.1 Ülesanded

**Ülesanne 51.** Leia maksimaalsed vood järgmistes võrkudes. Samuti leia neis võrkudes mõni minimaalne kate.

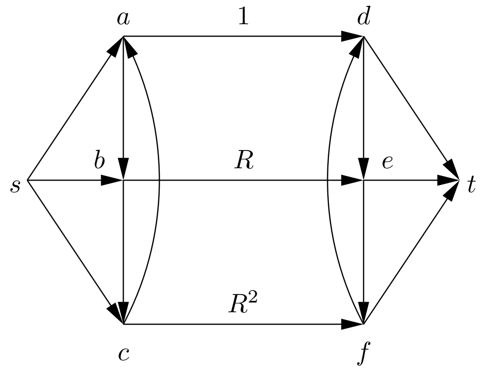





**Ülesanne 52.** Vaatleme voogu järgmisel joonisel.




Olgu $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, siis $R^n = R^{n+1} + R^{n+2}$, ja olgu ülejäänud servadel suured läbilaskevõimed. Olgu esimene suurendav tee $s — a — d — t$. Olgu järgmised suurendavad teed (tsüklis)

1. $s — c — f — d — a — b — e — t$

2. $s — b — e — f — c — a — d — t$

3. $s — a — d — e — b — c — f — t$.

Näita, et Ford-Fulkersoni algoritm ei lõpeta tööd.

# Peatükk 7

# Vastavused ja katted

Olgu $G$ mittesuunatud graaf. *Vastavuseks* graafis $G$ nimetatakse tema servade alamhulka $M \subseteq E(G)$, nii et iga tipu $v \in V(G)$ jaoks kehtib $\deg_M(v) \leq 1$. Siin $\deg_M(v)$ tähistab hulga $M$ tipuga $v$ intsidentsete elementide arvu. Vastavust $M$ nimetatakse *maksimaalseks*, kui ta on suurima võimaliku võimsusega. Kui iga tipu $v \in V(G)$ jaoks kehtib $\deg_M(v) = 1$, siis nimetatakse vastavust $M$ *kooskõlaks*.

Kui $G$ on graaf ja $S \subseteq V(G)$, siis on hulga $S$ *naabrus* $N(S) \subseteq V(G)$ defineeritud järgmiselt:

$$N(S) = \{w \mid w \in V(G), \exists e \in E(G), v \in S : \mathcal{E}(e) = (v, w)\} \ .$$

## 7.1 Berge'i teoreem

Olgu $M$ vastavus graafis $G$. Teed $P$ selles graafis nimetatakse *$M$-vahelduvaks*, kui sellel teel olevad servad kuuluvad vaheldumisi hulkadesse $M$ ja $E(G)\backslash M$. Kui tee $P$ otstippudega $u$ ja $v$ on $M$-vahelduv, siis nimetatakse teda *$M$-laienevaks*, kui $\deg_M(u) = \deg_M(v) = 0$.

**Teoreem 7.1 (Berge)** *Vastavus $M$ graafis $G$ on maksimaalne parajasti siis, kui selles graafis ei leidu $M$-laienevat teed.*

Tõestus. **Suund $\Rightarrow$.** Olgu $M$ graafi $G$ maksimaalne vastavus ning oletame vastuväiteliselt, et leidub $M$-laienev tee $P$ otspunktidega $u$ ja $v$. Olgu $M'$ kõigi selliste servade hulk, mis kuuluvad *täpselt* ühte hulkadest $M$ ja $P$. Olgu $w \in V(G)$. Uurime, millega võrdub $\deg_{M'}(w)$.

- Kui $w$ ei asu teel $P$, siis $\deg_{M'}(w) = \deg_M(w)$. Tõepoolest, kuna $P$-s ei ole $w$-ga intsidentseid servi, siis on mingi $w$-ga intsidentne serv $M'$-s parajasti siis, kui ta on $M$-s.

- Kui $w$ asub teel $P$ ning $w \notin \{u, v\}$, siis $\deg_{M'}(w) = \deg_M(w) = 1$. Antud juhul on $P$-s kaks $w$-ga intsidentset serva, neist üks kuulub $M$-i (ja ei kuulu $M'$-i) ja teine ei kuulu (ja kuulub $M'$-i). Teised $w$-ga intsidentsed servad ei kuulu $M$-i.

- Kui $w \in \{u, v\}$, siis $\deg_{M'} = 1$. Tipud $u$ ja $v$ pole ühegi $M$-i kuuluva servaga intsidentsed, küll aga on nad intsidentsed ühe $P$-sse kuuluva servaga.

Meil on $\deg_{M'}(u) = \deg_M(u) + 1$ ning $\deg_{M'}(v) = \deg_M(v) + 1$. Ülejäänud tippude jaoks on $\deg_{M'}$ ja $\deg_M$ võrdsed. Seega $|M'| = |M| + 1$ ning $M$ ei ole maksimaalne vastavus.

**Suund $\Leftarrow$.** Olgu $M$ mingi graafi $G$ vastavus, mis ei ole maksimaalne, me peame konstrueerima mingi $M$-laieneva tee. Olgu $M^*$ graafi $G$ mingi maksimaalne vastavus ning vaatame graafi $H = (V, M \cup M^*)$. Selle graafi sidususkomponentidel võib olla üks järgmistest kujudest:

(i). Isoleeritud tipp.

(ii). $u \overset{e}{—} v$, kus $e \in M \cap M^*$.

(iii). Tsükkel, mille servad kuuluvad vaheldumisi hulka $M$ ja hulka $M^*$. Seega peab selle tsükli pikkus olema paarisarv ning ta peab sisaldama võrdsel arvul hulka $M$ kuuluvaid ning hulka $M^*$ kuuluvaid servi.

(iv). Tee, mille servad kuuluvad vaheldumisi hulka $M$ ja hulka $M^*$.

Kuna $|M| < |M^*|$ ning sidususkomponentides (i), (ii) ja (iii) on $M$-i ja $M^*$-i elemente võrdsel arvul, siis peab $H$ sisaldama vähemalt ühte sidususkomponenti kujuga (iv), nii et see tee nii algaks kui ka lõpeks hulka $M^*$ kuuluva servaga. See tee ongi $M$-laienev. $\square$

## 7.2 Halli abieluteoreem

**Teoreem 7.2 (Hall)** *Olgu $G$ kahealuseline graaf, olgu tema alused $X$ ja $Y$ (s.t. $X \cup Y = V(G)$, $X \cap Y = \emptyset$ ning iga $e \in E(G)$ jaoks $\mathcal{E}(e) = (x, y)$ mingi*

*$x \in X$ ja $y \in Y$ jaoks). Graafil $G$ leidub vastavus $M$ omadusega* $\deg_M(x) = 1$ *iga $x \in X$ jaoks parajasti siis, kui iga $S \subseteq X$ jaoks kehtib $|N(S)| \geq |S|$.*

Tõestus. **Suund $\Rightarrow$.** Olgu $M$ selline vastavus, mis iga $x \in X$ jaoks sisaldab $x$-ga intsidentset serva. See vastavus defineerib teatava funktsiooni $X \xrightarrow{m} Y$, mis kujutab iga hulga $X$ elemendi $x$ selliseks hulga $y$ elemendiks $Y$, et vastavus $M$ sisaldab serva, mille otstippudeks on $x$ ja $y$. Vastavalt eeldustele leidub iga $x \in X$ jaoks täpselt üks selline $y \in Y$. Kuna $M$ on vastavus, siis pole ükski $y \in Y$ intsidentne enam kui ühe hulka $M$ kuuluva servaga, järelikult on funktsioon $m$ injektiivne. Kuna $m(S) \subseteq N(S)$, siis $|N(S)| \geq |m(S)| = |S|$.

**Suund $\Leftarrow$.** Olgu $M$ mingi maksimaalne vastavus graafis $G$. Oletame, et leidub selline $x \in X$, mille korral $\deg_M(x) = 0$. Olgu $Z$ kõigi selliste tippude $v \in V(G)$ hulk, mille korral leidub $M$-vahelduv tee tipust $x$ tippu $v$ (vastavalt $M$-vahelduvuse definitsioonile kehtib $x \in Z$) ning olgu $S = Z \cap X$ ja $T = Z \cap Y$.

Näitame, et $N(S) = T$. Tõepoolest, olgu $s \in S$. Kui $s = x$ ja $t \in Y$ on $x$-i naabertipp, siis $x$ — $y$ on $M$-vahelduv ahel. Kui $s \neq x$, siis olgu $P$ $M$-vahelduv ahel $x$-st $s$-i. Selle ahela viimane serv kuulub $M$-i, sest selle ahela pikkus on paarisarv ja tema esimene serv ei kuulu $M$-i (kuna $\deg_M(x) = 0$). Olgu $e \in E(G)$ tipuga $s$ intsidentne serv ja olgu $t \in Y$ selle serva teine naabertipp. Meil tuleb näidata, et leidub $M$-vahelduv tee $x$-st $t$-sse.

(i). Kui $e \in M$, siis on $e$ ahela $P$ viimane serv. Kui me jätame ahelast $P$ välja serva $e$ ja tipu $s$, siis jääb järgi $M$-vahelduv ahel $x$-st $t$-sse.

(ii). Kui $e \notin M$, siis $x \overset{P}{\rightsquigarrow} s \xrightarrow{e} t$ on $M$-vahelduv ahel $x$-st $t$-sse.

Näitame, et hulgad $S \backslash \{x\}$ ja $T$ on võrdse võimsusega. Selleks konstrueerime üksühese vastavuse nende vahel. Olgu $s \in S \backslash \{x\}$. Eespool me juba näitasime, et leidub $e \in M$, mis on $s$-ga intsidentne. Tipuga $s$ seame vastavusse serva $e$ teise otstipu, eespool (juht (i)) me juba näitasime, et see tipp kuulub hulka $T$. On ilmne, et erinevatele $S \backslash \{x\}$ elementidele seatakse vastavusse erinevad $T$ elemendid, seega $|S \backslash \{x\}| \leq |T|$.

Olgu $t \in T$. Siis $\deg_M(t) = 1$, vastasel juhul oleks $M$-vahelduv tee $P$ tipust $x$ tippu $t$ $M$-laienev ning see läheks vastuollu Berge'i teoreemiga. Tipuga $t$ seame vastavusse temaga intsidentse serva $e \in M$ teise otstipu $s$, siis $x \overset{P}{\rightsquigarrow} t \xrightarrow{e} s$ on $M$-vahelduv tee tipust $x$ tippu $s$. On ilmne, et $s \neq x$ ja erinevatele $T$ elementidele seatakse vastavusse erinevad $S$ elemendid. Seega $|T| \leq |S \backslash \{x\}|$.

Me oleme konstrueerinud sellise hulga $S \subseteq X$, et $|N(S)| = |S| - 1$. See on vastuolus teoreemi eeldustega. $\square$

**Järeldus 7.3** *Kui $G$ on regulaarne (s.t. kõigi tippude aste on sama) kahealuseline graaf, mis ei ole nullgraaf, siis leidub $G$-s kooskõla.*

Tõestus. Olgu $X$ ja $Y$ graafi $G$ alused. $G$ regulaarsusest järeldub $|X| = |Y|$. Tõepoolest, kahealuselises graafis kehtib $\sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y)$ ning kui $G$ on regulaarne, siis on see võrdus sama, mis $|X| \cdot k = |Y| \cdot k$, kus $k > 0$ on kõigi tippude aste.

Kui $S \subseteq X$ ning $e \in E(G)$ on mõne hulka $S$ kuuluva tipuga intsidentne, siis on $e$ ka mõne hulka $N(S)$ kuuluva tipuga intsidentne. Järelikult $\sum_{x \in S} \deg(x) \leq \sum_{y \in N(S)} \deg(y)$ ehk $|S| \cdot k \leq |N(S)| \cdot k$ ja $|S| \leq |N(S)|$. Vastavalt Halli abieluteoreemile leidub graafis $G$ vastavus $M$, nii et kõigi $x \in X$ jaoks kehtib $\deg_M(x) = 1$. Kuna $Y$-s on sama palju tippe kui $X$-s, siis peab ka kõigi $y \in Y$ jaoks kehtima $\deg_M(y) = 1$, seega on $M$ kooskõla. $\square$

## 7.3 Königi teoreem

Vastavusega mingis mõttes duaalne mõiste on *kate*. Graafi $G$ katteks nimetatakse sellist tippude hulka $K \subseteq V(G)$, nii et graafi $G$ iga serva mõni otstipp kuulub hulka $K$. Katet $K$ nimetatakse minimaalseks, kui tema võimsus on vähim võimalik.

**Lemma 7.4** *Kui $M$ on graafi $G$ mingi vastavus ja $K$ sellesama graafi mingi kate, siis $|M| \leq |K|$. Kui $|M| = |K|$, siis on $M$ maksimaalne vastavus ja $K$ minimaalne kate.*

Tõestus. Iga $e \in M$ jaoks leidub mingi $v \in K$, nii et $v$ on $e$ otstipp. Vastavuse definitsiooni tõttu peavad seejuures erinevatele $M$-i kuuluvatele servadele vastama erinevad tipud. Seega $|M| \leq |K|$. Lemma teine väide järeldub otseselt esimesest. $\square$

**Teoreem 7.5 (König)** *Olgu $G$ kahealuseline graaf. Siis on tema maksimaalsete vastavuste ja minimaalsete katete võimsused võrdsed.*

Tõestus. Olgu $X$ ja $Y$ graafi $G$ alused ning olgu $M$ tema mingi maksimaalne vastavus. Me konstrueerime $G$ sellise katte $K$, mille korral $|M| = |K|$.

Olgu $U \subseteq X$ selliste tippude $u \in X$ hulk, nii et $\deg_M(u) = 0$. Paneme tähele, et $M$ võimsus on võrdne $X \backslash U$ võimsusega — iga hulka $X \backslash U$ kuuluv tipp on intsidentne mõne $M$-i kuuluva servaga ja rohkem servi $M$-s pole. Olgu $Z$ selliste tippude $v \in V(G)$ hulk, mille korral leidub mingi $u \in U$ jaoks $M$-vahelduv tee $u$-st $v$-sse. Olgu $S = Z \cap X$ ja $T = Z \cap Y$. Analoogiliselt Halli abieluteoreemi tõestusega kehtivad $N(S) = T$ ja $|S \backslash U| = |T|$.

Olgu $K = T \cup (X \backslash S)$, siis $K$ on kate. Tõepoolest, oletame, et serva $e \in E(G)$ kumbki otspunkt ei kuulu hulka $K$. Sel juhul kuulub $e$ alusesse $X$ kuuluv otspunkt hulka $S$, ning alusesse $Y$ kuuluv otspunkt $w$ hulka $Y \backslash T$. Järelikult kuulub $w \in Y \backslash T$ hulga $S$ naabrusse, see on vastuolus väitega $N(S) = T$.

Katte $K$ võimsus on

$$|K| = |T| + |X \backslash S| = |S \backslash U| + |X \backslash S| = |X \backslash U| = |M|$$

(eelviimane võrdus kehtib $U \subseteq S \subseteq X$ tõttu). Lõpuks järeldub lemmast 7.4, et kate $K$ on minimaalne kate. □

## 7.4 Tutte'i teoreem

Järgmisena anname me tarviliku ja piisava tingimuse kooskõla leidumiseks (üldises) graafis. Graafi $G$ jaoks tähistagu $\mathrm{odd}(G)$ selle graafi paarituarvulise tippude arvuga sidususkomponentide arvu. Kui $G$ on graaf ja $S \subseteq V(G)$, siis tähistagu $G \backslash S$ graafi $G$ indutseeritud alamgraafi tipuhulgaga $V(G) \backslash S$.

**Teoreem 7.6 (Tutte)** *Graafis $G = (V, E)$ leidub kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib* $\mathrm{odd}(G \backslash S) \leq |S|$.

Tõestus. **Suund ⇒.** Olgu $M$ kooskõla graafil $G$ ja olgu $S \subseteq V$. Olgu $G_1, \ldots, G_k$ graafi $G \backslash S$ paarituarvulise tippude arvuga sidususkomponendid. Igas komponendis $G_i$ leidub vähemalt üks selline tipp $v_i$, nii et serva $e_i \in M$, mille üheks otstipuks on $v_i$, teiseks otstipuks oleks mingi $s_i \in S$. Kuna $M$ on vastavus, siis on erinevate $v_i$-de jaoks vastavad $s_i$-d samuti erinevad. Seega peab hulgas $S$ olema vähemalt $k$ tippu.

**Suund ⇐.** Oletame vastuväiteliselt, et $\mathrm{odd}(G \backslash S) \leq |S|$ kehtib iga $S \subseteq V$ jaoks, aga graafil $G$ ei leidu kooskõla. Kui me võtame $S = \emptyset$, siis saame, et odd$(G) = 0$, seega on graafis $G$ paarisarv tippe. Lisame graafile $G$ mingil viisil servi senikaua, kuni saame mingi graafi $G^*$, millel ei ole kooskõla, aga kui me talle veel mõne serva lisaksime, siis sellel graafil juba oleks kooskõla. Kuna täisgraafis $K_{2n}$ leidub kooskõla, siis pole $G^*$ täisgraaf.

Ka graafis $G^*$ kehtib iga $S \subseteq V$ jaoks võrratus $\text{odd}(G^* \backslash S) \leq |S|$, kuna

- graaf $G^* \backslash S$ on saadud graafile $G \backslash S$ mingil viisil servi lisades;

- graafile mingil viisil servi lisades ei saa odd$(\cdot)$ suureneda — serva lisades võivad sidususkomponendid kas samaks jääda või võib kahest sidususkomponendist üks saada. Seejuures saab kahest paarisarvulise tippude arvuga komponendist paarisarvulise tippude arvuga komponent (seejuures odd$(\cdot)$ ei muutu), kahest paarituarvulise tippude arvuga komponendist paarisarvulise tippude arvuga komponent (odd$(\cdot)$ väheneb kahe võrra) ning paaris- ja paarituarvulise tippude arvuga komponendist paarituarvulise tippude arvuga komponent (odd$(\cdot)$ ei muutu).

Olgu $U$ kõigi selliste tippude $u \in V$ hulk, mis on graafis $G^*$ servaga ühendatud kõigi ülejäänud tippudega. On selge et $U$ indutseeritud $G^*$ alamgraaf on täisgraaf.

**Edasise tõestuse idee.** Näitame, et graafi $G^* \backslash U$ iga sidususkomponent on täisgraaf. Kui see tõepoolest nii on, siis saame me konstrueerida graafile $G^*$ kooskõla järgmisel viisil:

- Graafi $G^* \backslash U$ paarisarvulise tippude arvuga sidususkomponendis korraldame kooskõla selle komponendi piires.

- Graafi $G^* \backslash U$ paarituarvulise tippude arvuga sidususkomponendis korraldame samuti kooskõla selle komponendi piires, sellise vahega, et üks tipp jääb üle.

- Eelmisel sammul graafi $G^* \backslash U$ paarituarvulise tippude arvuga sidususkomponentides $G_1, \ldots, G_k$ seame vastavusse mingite (suvaliste) tippudega $u_1, \ldots, u_k \in U$. Saame seda teha, kuna $k = \text{odd}(G^* \backslash U) \leq |U|$ ning $u_1, \ldots, u_k$ on ühendatud kõigi ülejäänud tippudega.

- Hulka $U \backslash \{u_1, \ldots, u_k\}$ tipud seame mingil viisil omavahel vastavusse. See on võimalik, kuna need tipud on kõik omavahel ühenduses ja neid on paarisarv (kuna graafis $G^*$ on paarisarv tippe).

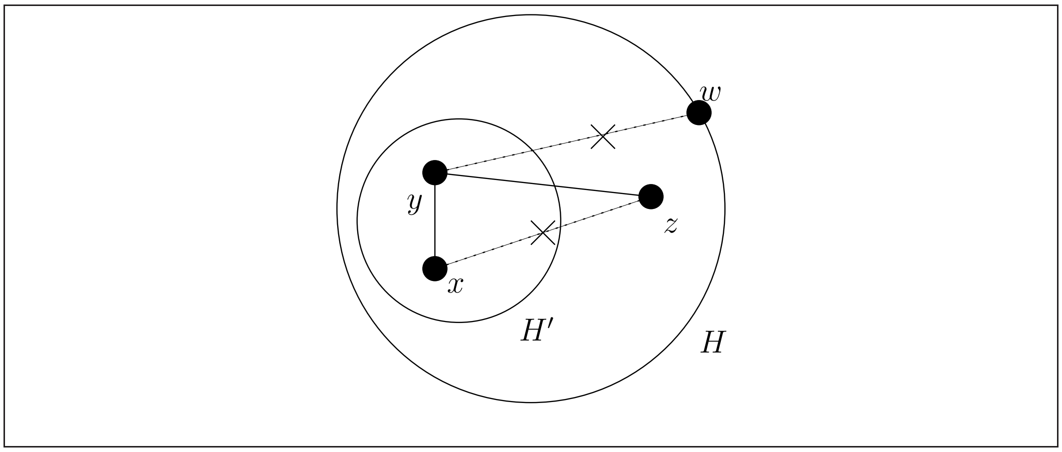
Kirjeldatud kooskõla eksisteerimine on vastuolus graafile $G^*$ seatud tingimusega, et seal pole kooskõla.

Nagu öeldud, tuleb meil näidata, et $G^* \backslash U$ kõik sidususkomponendid on täisgraafid. Oletame vastuväiteliselt, et sidususkomponent $H$ pole täisgraaf. Sel juhul sisaldab $H$ vähemalt kolme tippu, sest 1- ja 2-tipulised graafid on kõik kas mittesidusad või täisgraafid.

Olgu $H'$ graafi $H$ maksimaalse tippude arvuga täisalamgraaf. Siis leiduvad $z \in V(H) \backslash V(H')$ ning $y \in V(H')$, nii et $y$ ja $z$ on omavahel servaga ühendatud. Kui selliseid $y$-t ja $z$-i ei leiduks, siis oleks $H'$ omaette sidususkomponent.

Olgu $x \in V(H')$ selline, et $x$ ja $z$ ei ole omavahel servaga ühendatud. Kui sellist $x$-i ei leiduks, siis peaks ka $z$ graafi $H'$ tipp olema, seega ei oleks $H'$ siis maksimaalse tippude arvuga.

Olgu $w \in V \backslash U$ selline tipp, et $y$ ja $w$ ei ole omavahel servaga ühendatud. Selline $w$ peab leiduma, sest $y$ ei ole ühendatud kõigi graafi $G^*$ tippudega — vastasel juhul kuuluks ta ise hulka $U$. Tippude $x$, $y$, $z$ ja $w$ asendit ja nendevahelisi servi illustreerib joonis 7.1.




**Joonis 7.1:** Tipud $y$, $z$, $x$ ja $w$ Tutte'i teoreemi tõestuses

Kuna graaf $G^*$ oli selline, et talle ükskõik millise serva lisamisel leidub temas kooskõla, siis leidub kooskõla $M_1$ graafis $G^* \cup \{x \overset{e_{xz}}{—} z\}$ ja kooskõla $M_2$ graafis $G^* \cup \{y \overset{e_{yw}}{—} w\}$.

Olgu $G' = (V, (M_1 \backslash M_2) \cup (M_2 \backslash M_1))$, s.t. graaf $G'$ sisaldab graafi $G^*$ kõiki tippe ja kõiki selliseid servi, mis kuuluvad *täpselt* ühte hulkadest $M_1$ ja $M_2$. Kui $v \in V$, siis on $\deg_{G'}(v)$ võimalikud väärtused ainult kas 0 või 2. Tõepoolest, leidub täpselt üks serv $e_1 \in M_1$ ja täpselt üks serv $e_2 \in M_2$, mis on intsidentnsed $v$-ga. Kui $e_1 = e_2$, siis ei ole see serv graafis $G'$ ja $\deg_{G'}(v) = 0$. Kui $e_1 \neq e_2$, siis $e_1 \notin M_2$ ja $e_2 \notin M_1$ (muidu poleks $M_2$ või $M_1$ vastavus) ning seetõttu on nii $e_1$ kui ka $e_2$ graafi $G'$ servad ja $\deg_{G'}(v) = 2$. Graafi, kus tippude astmete võimalikeks väärtusteks on ainult 0 ja 2, sidususkomponentidel on kaks võimalikku kuju — isoleeritud tipud ja tsüklid. Graafis $G'$ olevates tsüklites esinevad vaheldumisi servad $M_1$-st ja servad $M_2$-st, muuhulgas tähendab see, et graafi $G'$ kõik tsüklid on paarisarvulise pikkusega.

On selge, et $e_{xz} \in M_1$ ja $e_{yw} \in M_2$, muidu oleks $M_1$ või $M_2$ juba graafi $G^*$ kooskõla, aga meie eeldasime, et $G^*$-l kooskõlasid ei ole. Vaatame graafi $G'$ neid sidususkomponente (tsükleid), kuhu kuuluvad servad $e_{xz}$ ja $e_{yw}$. On kaks võimalust — nad asuvad kas samas sidususkomponendis või erinevates sidususkomponentides.

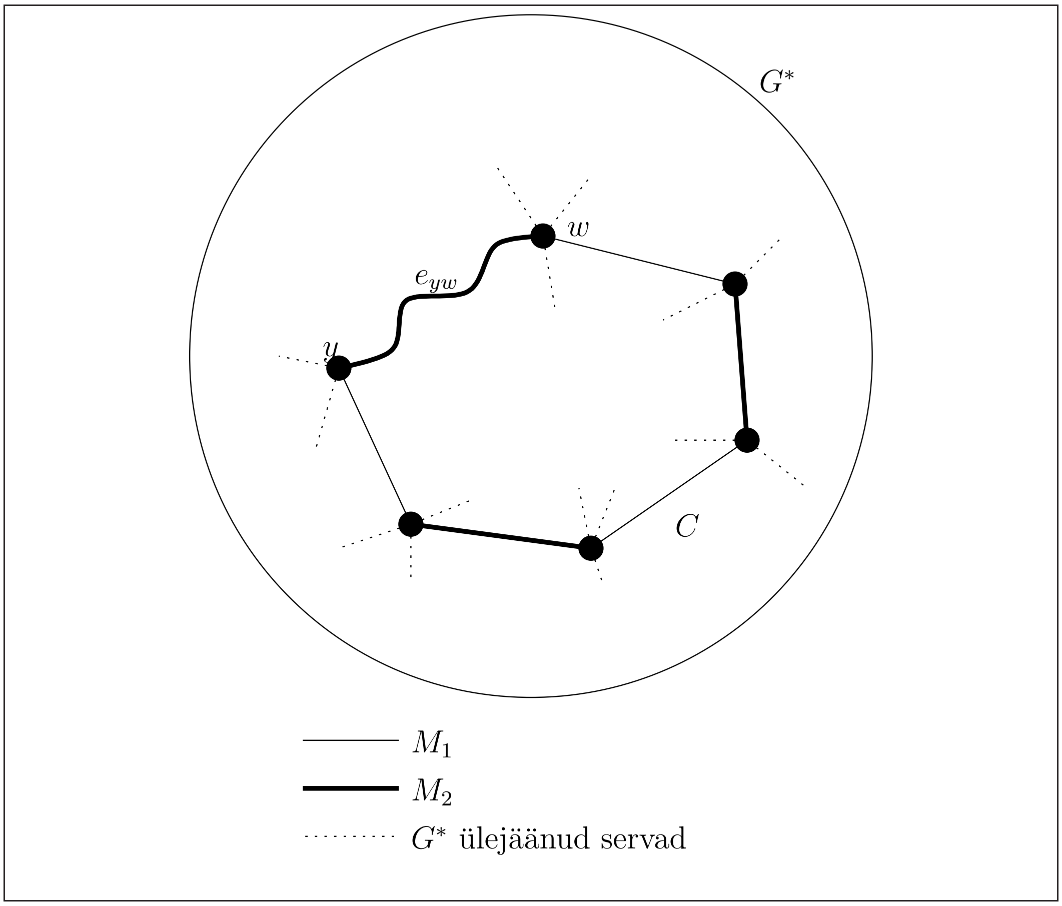
*1: Servad $e_{xz}$ ja $e_{yw}$ asuvad erinevates sidususkomponentides.* Olgu $C$ graafi $G'$ tsükkel/sidususkomponent, mis sisaldab serva $e_{yw}$ (vaata ka joonist 7.2). Tähistagu $V_C \subseteq V$ kõigi tippude hulka, mida tsükkel $C$ läbib. Olgu $G^*_C$ graafi $G^*$ indutseeritud alamgraaf tipuhulgaga $V_C$. Me näitame, et nii graafil $G^*_C$ kui ka graafil $G^* \backslash V_C$ leidub kooskõla. See aga on vastuolus meie eeldustega, sest nende kahe kooskõla ühend annab meile kooskõla graafil $G^*$.

- Kooskõlaks graafil $G^*_C$ on kooskõla $M_1$ kõigi nende servade hulk, mis kuuluvad tsüklisse $C$. Tõepoolest, tsükli $C$ iga tipp on intsidentne täpselt ühe hulka $M_1$ kuuluva servaga. Samuti on kõik hulka $M_1$ kuuluvad servad, mis asuvad tsüklis $C$, ühtlasi ka graafi $G^*$ servad, sest et $e_{xz}$ ei asu tsüklis $C$.

- Kooskõlaks graafil $G^* \backslash V_C$ on kooskõla $M_2$ kõigi nende servade hulk, mis ei kuulu tsüklisse $C$. See järeldub sellest, et $M_2$ kõigi nende servade hulk, mis ei kuulu tsüklisse $C$, on kooskõlaks graafil $(G^* \cup \{y \overset{e_{yw}}{—} w\}) \backslash V_C$, see graaf on aga võrdne graafiga $G^* \backslash V_C$ (sest $y, w \in V_C$).

*2: Servad $e_{xz}$ ja $e_{yw}$ asuvad samas sidususkomponendis.* Olgu selleks komponendiks tsükkel $C$. Olgu $V_C$ ja $G^*_C$ defineeritud samamoodi nagu eelmises variandis. Me konstrueerime taas kooskõlad graafidel $G^*_C$ ja $G^* \backslash V_C$ ning jõuame vastuoluni — kooskõlani graafil $G^*$.

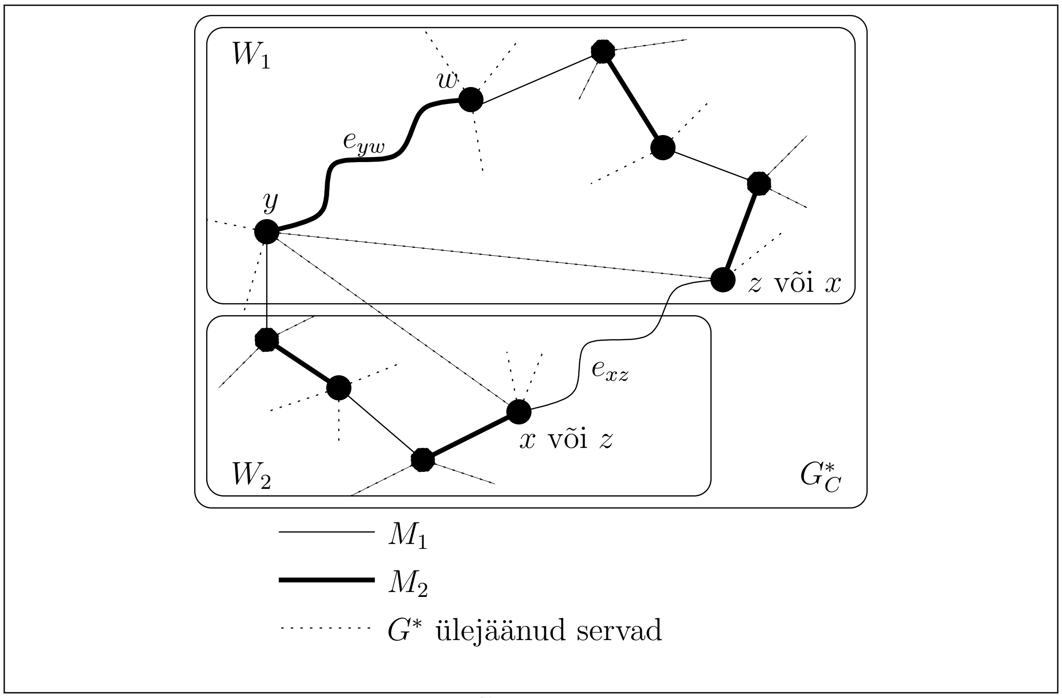
Kooskõlaks graafil $G^* \backslash V_C$ on taas kooskõla $M_2$ kõigi nende servade hulk, mis ei kuulu tsüklisse $C$, põhjendus on sama, mis eelmisel korral. (Praegusel juhul oleksime me võinud $M_2$ asemel kasutada ka $M_1$-e.)




**Joonis 7.2:** Tsükkel, mis sisaldab serva $e_{yw}$, kuid ei sisalda serva $e_{xz}$

Tsüklit $C$ ja graafi $G^*_C$ illustreerib joonis 7.3 (suurused $W_1$ ja $W_2$ defineerime me hiljem). Nagu me sellelt jooniselt näeme, võivad tipud $x$, $y$, $z$ ja $w$ esineda selles tsüklis kahes põhimõtteliselt erinevas järjekorras („põhimõtteliselt erinev“ tähendab, et pole teineteisest saadavad nihutamiste ja peegeldamiste teel), need järjekorrad on $(y, w, z, x)$ ja $(y, w, x, z)$. Oma edasises arutelus me eeldame, et järjekorraks on $(y, w, z, x)$. Saamaks arutelu järjekorra $(y, w, x, z)$ jaoks, tuleb meil edaspidi lihtsalt kõikjal „$x$“ ja „$z$“ ära vahetada.

Olgu $W_1 \subseteq V_C$ tipuhulk, kuhu kuuluvad $y$, $w$ ja kõik neile tsüklit $C$ selles suunas ($y \to w \to \cdots$) läbides järgnevad tipud, kuni tipuni $z$ (kaasa arvatud). Olgu $W_2 = V_C \backslash W_1$. Olgu $G^*_i$, kus $i \in \{1, 2\}$, graafi $G^*$ indutseeritud alamgraaf tipuhulgaga $W_i$. Konstrueerimaks kooskõla graafil $G^*_C$ piisab,




**Joonis 7.3:** Tsükkel $C$, mis sisaldab servi $e_{xz}$ ja $e_{yw}$

kui konstrueerime kooskõlad graafidel $G_1^*$ ja $G_2^*$; nende kooskõlade ühend on kooskõla graafil $G_C^*$.

Kooskõlaks graafil $G_2^*$ on kooskõla $M_2$ kõigi selliste servade hulk, mis on mõne hulka $W_2$ kuuluva tipuga intsidentsed. Kooskõlaks graafil $G_1^*$ on kooskõla $M_1$ kõigi selliste servade hulk, mis on mõne hulka $W_1$ kuuluva servaga intsidentsed, ning millele lisaks on veel võetud serv tippude $y$ ja $z$ vahel. Serv $y$ ja $z$ vahel leidub vastavalt nende tippude valikule (joonis 7.1). Sellega oleme me konstrueerinud kooskõla graafil $G_C^*$ ning ka graafil $G^*$. Vastuolu. $\square$

## 7.5 Ülesanded

**Ülesanne 53.** (Ruut)maatriksi $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ *permanendiks* nimetame suurust

$$per(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Ütleme, et (ruut)maatriks $P$ on *permutatsioonmaatriks*, kui tema igas reas ja igas veerus on täpselt üks 1 ning kõik ülejäänud elemendid on 0. Ütleme, et maatriks $A$ on *topeltstohhastiline*, kui kõik tema elemendid on mittenegatiivsed ja kõik ridade ja veergude summad on 1.

Olgu $A$ topeltstohhastiline (ruut)maatriks. Tõesta, et siis

1. $per(A) \neq 0$;

2. $A$ avaldub kujul $A = x_1P_1 + \ldots + x_rP_r$, kus $x_i$ on mittenegatiivsed, $x_1 + \ldots + x_r = 1$ ja kõik maatriksid $P_i$ on permutatsioonmaatriksid.

**Ülesanne 54.** Olgu antud hulga $X$ alamhulkade pere $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Siis nimetame vektorit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ selle pere *erinevate esindajate komplektiks*, kui iga $i$ korral $x_i \in X_i$ ja kõik elemendid $x_i$ on erinevad.

Olgu antud hulga $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ alamhulkade pere $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nii, et iga $i$ korral $|X_i| = k$ ja hulga $X$ iga element kuulub täpselt $k$ alamhulka. Tõesta, et

1. sellel perel leidub erinevate esindajate komplekt;

2. sellel perel leidub $k$ lõikumatut erinevate esindajate komplekti.

**Ülesanne 55.** Olgu $m$ ja $n$ positiivsed täisarvud. *Ladina ruut* on $m \times n$ maatriks $M = (m_{ij})$, mille elemendid on täisarvud, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

(a) $1 \leq m_{ij} \leq n$,

(b) üheski reas ega veerus ei ole kaht võrdset elementi.

Paneme tähele, et neist tingimustest järeldub $m \leq n$. Kui $m = n$, siis nimetatakse seda ristkülikut *ladina ruuduks*.

Olgu antud selline ladina ristkülik $M$, mille korral $m < n$. Tõesta, et ristkülikule $M$ saab lisada $n - m$ rida nii, et moodustuks ladina ruut.

**Ülesanne 56.** Olgu $m$ ja $n$ positiivsed täisarvud. Hulk $\{1, 2, \ldots, mn\}$ on jagatud õaarikaupa ühisosata hulkadeks $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kus $|A_i| = m$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tõesta, et iga teise samasuguse jaotuse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ korral saab hulgad $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nii ümber nummerdada, et $A_i \cap B_1 \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Ülesanne 57.** Kaks mustkunstnikku näitavad järgmist trikki. Esimene mustkunstnik läheb ruumist välja. Teine mustkunstnik võtab paki 100 kardiga, mis on nummerdatud arvudega $1, 2, \ldots, 100$, ja laseb kolmel pealtvaatajal järgemööda valida igaühel ühe kaardi. Teine mustkunstnik näeb, millise kaardi iga pealtvaataja on võtnud. Seejärel lisab ta ühe kaardi ülejäänud pakist. Pealtvaatajad segavad need 4 kaarti, kutsuvad esimese mustkunstniku ja annavad need talle. Esimene mustkunstnik vaatab neid 4 kaarti ja "mõistatab", millise kaardi võttis esimene, millise teine ja millise kolmas pealtvaataja. Tõesta, et mustkunstnikud saavad seda trikki teha.

# Peatükk 8

# Graafi servade värvimine

Olgu meil antud silmusteta graaf $G = (V, E)$. Peale selle olgu meil antud graafi $G$ vastavused $M_1, \ldots, M_k$, nii et $M_1, \ldots, M_k$ on servade hulga $E$ tükeldus.

Vajadus selliseid servade hulka tükeldavaid vastavusi konstrueerida tekib näiteks järgmisel juhul. Olgu $X$ mingi toodete hulk ning olgu $Y$ mingi tööpinkide hulk. Vaatame kahealuselist graafi alustega $X$ ja $Y$, kus serv $x \in X$ ja $y \in Y$ vahel tähendab, et toote $x$ valmistamisel tuleb mingil ajal kasutada pinki $y$. Eeldame, et üht toodet võib pinkidel töödelda ükskõik mis järjekorras. Samuti eeldame, et kõigi töötlemiste ajakulu on 1 ajaühik.

Vastavuste hulk $M_1, \ldots, M_k$ sellel graafil kujutab siis endast tööplaani — kui serv, mis ühendab toodet $x$ ja tööpinki $y$, kuulub vastavusse $M_i$, siis tähendab see seda, et ajahetkel $i$ tuleb toodet $x$ töödelda pingil $y$.

Kui meil on antud graaf $G = (V, E)$, siis meid huvitab, milline on minimaalne selline $k$, et leiduks servahulga $E$ tükeldus vastavusteks $M_1, \ldots, M_k$. Seda minimaalset $k$-d tähistame sümboliga $\chi'(G)$ ja nimetame $G$ *kromaatiliseks arvuks servade järgi*.

Sama probleemi saab ka teisiti sõnastada (ja see sõnastus selgitab, miks sümbolit $\chi'(G)$ just niimoodi nimetatakse). Silmusteta graafi $G = (V, E)$ *servade värvimisviisiks $k$ värviga* nimetatakse funktsiooni $c$ graafi servade hulgast $E$ hulka $\{1, \ldots, k\}$. Värvimisviisi $c$ nimetatakse *korrektseks*, kui ei leidu tippu $v \in V$ ja servi $e_1, e_2 \in E$, nii et $e_1$ ja $e_2$ on intsidentsed tipuga $v$ ja $c(e_1) = c(e_2)$. Graafi $G$ kromaatiline arv servade järgi on siis vähim selline $k$, mille puhul leidub $G$ servade korrektne värvimisviis $k$ värviga.

Tähistagu $\Delta(G)$ graafi $G$ tippude maksimaalset astet. On ilmne, et $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, sest kõik maksimaalse astmega tipuga intsidentsed servad peavad olema eri värvi. Järgnevas me näitame, et kahealuselise graafi $G$ korral $\chi'(G) = \Delta(G)$ ning lihtgraafi $G$ korral $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Teoreem 8.1** *Olgu $G = (V, E)$ kahealuseline graaf. Siis $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Tõestus. Olgu $X$ ja $Y$ graafi $G$ alused. Me võime eeldada, et $|X| = |Y|$, kui see nii ei ole, siis lisame väiksema võimsusega alusele niipalju tippe, et aluste võimsused võrdsustuksid.

Järgmise sammuna muudame graafi $G$ $k$-regulaarseks, kus $k = \Delta(G)$. Kui ta seda veel ei ole, siis leidub mingi tipp $x$ mingis aluses (üldsust kitsendamata eeldame, et aluses $X$), nii et $\deg(x) < k$. Siis peab ka aluses $Y$ leiduma mingi tipp $y$, nii et $\deg(y) < k$, sest tippude astmete summa ühes aluses on võrdne astmete summaga teises aluses ning mõlemas aluses on ühepalju tippe. Lisame graafile $G$ serva, mis ühendab tippe $x$ ja $y$. On selge, et kui graaf $G$ on pärast selle serva lisamist värvitav $k$ värviga, siis oli ta ka enne lisamist värvitav $k$ värviga. Kordame seda operatsiooni senikaua, kuni oleme saanud $k$-regulaarse graafi.

Vastavalt järeldusele 7.3 leidub regulaarses kahealuselises graafis kooskõla. Olgu $M_1$ meie $k$-regulaarse kahealuselise graafi $G = (V, E)$ mingi kooskõla. Vaatame graafi $(V, E \backslash M_1)$, see graaf on $(k - 1)$-regulaarne kahealuseline. Järelikult leidub ka temas mingi kooskõla $M_2$ ning graaf $(V, E \backslash (M_1 \cup M_2))$ on $(k - 2)$ regulaarne kahealuseline. Neid samme jätkates tükeldame servade hulga $E$ lõpuks $k$-ks kooskõlaks $M_1, \ldots, M_k$. See tükeldus $k$-ks ehk $\Delta(G)$-ks vastavuseks annabki meile $G$ servade korrektse värvimisviisi $\Delta(G)$ värviga. $\square$

Vaatame nüüd suvalisi silmusteta lihtgraafe. Silmusteta lihtgraafis $G = (V, E)$ võime me hulga $E$ samastada hulga $V$ kaheelemendiliste alamhulkade hulga mingi alamhulgaga, seda samastamist kirjeldab funktsioon $\mathcal{E}$. Tähistuste lihtsustamiseks me seda edaspidises teemegi (kuni servade värvimist puudutava osa lõpuni). Kõigepealt sõnastame me ühe üpris tehnilise (ja ehk isegi kunstilikuvõitu) lemma:

**Lemma 8.2** *Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ning olgu $k \in \mathbb{N}$. Olgu $v \in V$ selline tipp, et*

*(i). $v$ ja kõigi tema naabertippude aste on ülimalt $k$*

*(ii). tipul $v$ on ülimalt üks naabertipp, mille aste on täpselt $k$.*

*Sel juhul, kui graafil $G\backslash v$ leidub servade korrektne värvimisviis $k$ värviga, siis ka graafil $G$ leidub servade korrektne värvimisviis $k$ värviga.*

Sellest lemmast järeldub kohe tulemus, mida me näidata lubasime:

**Teoreem 8.3 (Vizing)** *Kui $G$ on lihtgraaf, siis $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.*

Tõestus. Seda, et $\Delta(G) \leq \chi'(G)$, oleme me juba näidanud. Võrratuse $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$ tõestamiseks tõestame me induktsiooniga üle tippude arvu võrratuse $\chi'(G') \leq \Delta(G)+1$, kus $G'$ on graafi $G$ mingi indutseeritud alamgraaf.

Kui graafis $G'$ on ainult üks tipp, siis loomulikult leidub $G'$-l servade korrektne värvimisviis $\Delta(G)+1$ värviga. Oletame nüüd, et graafil $G'$ on enam kui üks tipp, ning olgu $v$ graafi $G'$ mingi tipp. Siis on graafis $G'$ tipu $v$ jaoks lemma 8.2 eeldused (i) ja (ii) triviaalselt täidetud, kui $k = \Delta(G)+1$ — tipu $v$ ja tema naabrite astmed ei ole suuremad kui $\Delta(G)$. Induktsiooni eelduse järgi on $G'\backslash v$ värvitav $\Delta(G)+1$ värviga. Lemma 8.2 järgi on siis ka $G'$ värvitav $\Delta(G)+1$ värviga. $\square$

Tõestus (lemma 8.2). Lemma tõestatakse induktsiooniga üle $k$. Kui $k = 1$, siis ka $\deg(v) \leq 1$ ja kui $\deg(v) = 1$, s.t. tipul $v$ on naabertipp $u$, siis on ka selle naabertipu aste 1. Seega on $v$ graafis $G$ isoleeritud tipp, või on graafi $G$ tippu $v$ sisaldav sidususkomponent kujul $u$ — $v$. Esimesel juhul on graafidel $G\backslash v$ ja $G$ samad servad ning $G\backslash v$ servade korrektne värvimisviis 1 värviga on ühtlasi ka $G$ servade korrektne värvimisviis 1 värviga. Teisel juhul saame $G$ servade korrektse värvimisviisi $G\backslash v$ servade korrektsest värvimisviisist, kui me lisaks värvime tippude $u$ ja $v$ vahelise serva ainsama värviga.

Olgu $k > 1$. Üldisust kitsendamata võime me eeldada, et tipu $v$ aste on täpselt $k$ ning tipul $v$ on täpselt üks naaber, mille aste on täpselt $k$, ning tipu $v$ kõigi ülejäänud naabertippude aste on täpselt $k-1$. Tõepoolest, kui mõne tipu $v'$ (kus $v'$ on kas $v$ või $v$ naabertipp) aste on eeldatust väiksem, siis lisame graafile $G$ uue tipu $u$ ning uue serva $\{u, v'\}$. Sel viisil suureneb tipu $v'$ aste ühe võrra. On ilmne, et kui enne uue tipu ja serva lisamist oli graafil $G\backslash v$ servade korrektne värvimisviis $k$ värviga, siis on tal selline värvimisviis ka pärast. Samuti on ilmne, et me ei jää graafi $G$ sel viisil lõpmatuseni täiendama.

Olgu $c$ graafi $G\backslash v$ servade mingi korrektne värvimisviis $k$ värviga. Olgu $X_i$, kus $i \in \{1, \ldots, k\}$, tipu $v$ selliste naabrite (graafis $G$) $v'$ hulk, et graafis $G\backslash v$ ei leidu tipuga $v'$ intsidentset serva $e$, mille korral $c(e) = i$ (sellises olukorras me ütleme, et värv $i$ *ei esine* tipus $v'$). Formaalselt:

$$X_i = \{v' \mid v' \in V, \{v, v'\} \in E, \nexists v'' \in V\backslash v : \{v', v''\} \in E \wedge c(\{v', v''\}) = i\} \ .$$

Tipu $v$ ühe naabri aste graafis $G\backslash v$ on $k-1$, see tipp kuulub täpselt ühte hulkadest $X_i$. Tipu $v$ ülejäänud naabrite aste selles graafis on $k-2$, need tipud kuuluvad igaüks täpselt kahte hulkadest $X_i$. Kokkuvõttes saame

$$\sum_{i=1}^{k}|X_i| = 2\deg(v) - 1 = 2k - 1 < 2k \ . \tag{8.1}$$

Järgmise sammuna näitame, et värvimisviis $c$ on võimalik valida nii, et kehtiks ka

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,k\} : \big||X_i| - |X_j|\big| \leq 2 \ . \tag{8.2}$$

Tõepoolest, see võrratus kehtib näiteks kõigi selliste värvimisviiside $c$ jaoks, mille puhul $\sum_{i=1}^{k}|X_i|^2$ on minimaalne võimalikest. Oletame vastuväiteliselt, et mingi $c$ puhul on see summa minimaalne võimalikest, aga leiduvad värvid $i$ ja $j$, nii et $|X_i| > |X_j| + 2$. Vaatame graafi $G\backslash v$ alamgraafi $H$, millel on sama tipuhulk ning mille servadeks on täpselt need graafi $G\backslash v$ servad $e$, mille jaoks $c(e) = i$ või $c(e) = j$. Graafis $H$ on kõigi tippude astmed kas 0, 1 või 2, seega on graafi $H$ sidususkomponendid kõik kas isoleeritud tipud, ahelad või tsüklid.

Paneme tähele, et kui me värvimisviisi $c$ sel viisil muudame, et valime välja graafi $H$ ühe sidususkomponendi $H'$ ning „vahetame“ sellesse komponenti kuuluvate servade värvid (s.t. kui mingi serv oli enne värvitud värviga $i$, siis on ta pärast värvitud värviga $j$ ja vastupidi), siis on ka saadav värvimisviis $c'$ korrektne. Tõepoolest, kui mingi tipp ei kuulu komponenti $H'$, siis värvivad viisid $c$ ja $c'$ temaga intsidentsed servad ühtemoodi. Kui mingi tipp kuulub komponenti $H'$, siis on servi viisil $c'$ värvides selle tipuga intsidentseid servi, mis on värvi $i$, samapalju, kui on servi viisil $c$ värvides selle tipuga intsidentseid servi, mis on värvi $j$ — s.t. ülimalt 1 (kuna $c$ on korrektne värvimisviis). Samuti on värvimisviisis $c'$ selle tipuga intsidentseid servi, mis on värvi $j$, ülimalt 1. Muid värve kasutavad värvimisviisid $c$ ja $c'$ ühtemoodi.

Olgu $v' \in X_i\backslash X_j$. See tähendab, et tipul $v'$ on intsidentseid servi, mis on värvitud värviga $j$, aga ei ole intsidentseid servi, mis on värvitud värviga $i$. Järelikult leidub graafis $H$ sidususkomponent $H'$, mis on ahel ning mille üheks otstipuks on $v'$. Kuna $|X_i| > |X_j|$, siis on võimalik see $v'$ valida sellisel viisil, et ahela $H'$ teine otstipp $v''$ ei kuuluks hulka $X_j\backslash X_i$; olgu $v'$ sellisel viisil valitud. Tipp $v''$ kas ei ole tipu $v$ naabertipp või kuulub ta hulka $X_i\backslash X_j$.

Vahetame sidususkomponenti $H'$ kuuluvate servade värvid. Sellega me tõstame tipu $v'$ hulgast $X_i$ hulka $X_j$. Kui $v''$ on tipu $v$ naabertipp, siis me tõstame ka tema hulgast $X_i$ hulka $X_j$. Rohkem muutusi hulkades $X_1,\ldots,X_k$ ei toimu. Seega oleme me vähendanud suurust $|X_i|$ ühe või kahe võrra ning suurendanud suurust $|X_j|$ sama palju. Selline muutus vähendab suurust $|X_i|^2 + |X_j|^2$. Tõepoolest, kui $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x - y > 2$, siis

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y+1)^2 &= x^2 + y^2 - 2(x-y) + 2 < x^2 + y^2 - 2 \cdot 2 + 2 \\
(x-2)^2 + (y+2)^2 &= x^2 + y^2 - 4(x-y) + 8 < x^2 + y^2 - 4 \cdot 2 + 8 \ .
\end{aligned}
$$

Me oleme näidanud, et värvimisviis $c$ on valitav nii, et (8.2) kehtiks; eeldame, et $c$ on niimoodi valitud.

Võrratuste (8.1) ja (8.2) tõttu kuuluvad kõik suurused $|X_i|$, kus $i \in \{1, \ldots, k\}$ hulka $\{0, 1, 2\}$ või hulka $\{1, 2, 3\}$. Kui nad kuuluvad hulka $\{1, 2, 3\}$, siis peab leiduma mõni $i$, nii et $|X_i| = 1$, muidu ei kehtiks võrratus (8.1). Ka siis, kui nad kuuluvad hulka $\{0, 1, 2\}$, peab leiduma mõni $i$, mille korral $|X_i| = 1$, sest võrduse (8.1) järgi on kõigi hulkade $X_i$ võimsuste summa paaritu arv. Üldsust kitsendamata eeldame, et $|X_k| = 1$. Tähistagu $u$ hulga $X_k$ ainsat elementi.

Olgu graaf $G'$ saadud graafist $G$, kustutades sealt serva $\{v, u\}$ ning kõik servad $e \in E$, mille korral $c(e) = k$. Neid servi kustutades vähendame me tipu $v$ astet ühe võrra, tipu $u$ astet ühe võrra ning ka tipu $v$ ülejäänud naabertippude astet ühe võrra, sest ülejäänud naabertippudel on igaühel intsidentne serv, mille värvimisviis $c$ värvib värviga $k$. Seega on graafis $G'$ tipu $v$ aste $k - 1$. Samuti on kõigi $v$ naabertippude aste graafis $G'$ ülimalt $k - 1$ ning ülimalt ühe $v$ naabertipu aste graafis $G'$ on täpselt $k - 1$.

Värvimisviis $c$, mis oli graafi $G \backslash v$ korrektne värvimisviis $k$ värviga, on ühtlasi graafi $G' \backslash v$ korrektne värvimisviis $k - 1$ värviga. Tõepoolest, graaf $G' \backslash v$ on saadud graafist $G \backslash v$ kustutades sealt kõik servad, mis on värvitud värviga $k$.

Me oleme näidanud, et lemma 8.2 eeldused kehtivad graafi $G'$, tipu $v$ ja värvide arvu $k-1$ jaoks. Induktsiooni eelduse järgi leidub graafil $G'$ korrektne värvimisviis $k - 1$ värviga. Olgu see värvimisviis $c'$. Graafi $G$ korrektse värvimisviisi $k$ värviga saame värvimisviisist $c'$ nii, et kõik servad $e \in E$, mille korral $c(e) = k$, värvime värviga $k$ ning serva $\{u, v\}$ värvime samuti värviga $k$. □

## 8.1 Ülesanded

**Ülesanne 58.** Leia $\chi'(K_n)$, $\chi'(P_n)$ ja $\chi'(C_n)$.

**Ülesanne 59.** Näita, et paaritu arvu tippudega regulaarse mitte-nullgraafi $G$ jaoks $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

**Ülesanne 60.** Näita, et $\chi'(Pet) = 4$.

**Ülesanne 61.** Näita, et 3-regulaarses Hamiltoni graafis $G$ kehtib $\chi'(G) = 3$.

**Ülesanne 62.** Näita, et kui graafi $G$ servad on $k$ värviga värvitavad, siis on nad $k$ värviga värvitavad ka sellisel viisil, et servade arvud, mis on ühe või teise värviga värvitud, üksteisest rohkem kui ühe võrra ei erine.

**Ülesanne 63.** Kirjelda lihtne algoritm puu servade värvimiseks vähima võimaliku arvu värvidega.

**Ülesanne 64.** Ütleme, et graaf $G$ on $\chi'$-*kriitiline*, kui $\chi'(G) = \Delta(G)+1$ ja $G$ suvalise serva kustutamisel saadava graafi servi saab värvida väiksema arvu värvidega.

1. Leia 5-tipuline $\chi'$-kriitiline graaf, mille korral $\Delta(G) = 3$.

2. Milliste $n$ väärtuste korral on $K_n$ $\chi'$-kriitiline?

**Ülesanne 65.** Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ja olgu $S \subseteq V$ kõigi selliste tippude $x$ hulk, kus $\deg(x) = \Delta(G)$. Olgu $G[S]$ graafi $G$ alamgraaf, mille indutseerib tipuhulk $S$. Näita, et kui $G[S]$ on mets, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$.

# Peatükk 9

# Klikid ja sõltumatud hulgad

Sissejuhatuseks vaatleme järgmist ülesannet. Tõestada, et igal peol, kus on vähemalt kuus inimest, leidub alati kas:

- kolm inimest, kes kõik tunnevad üksteist; või siis
- kolm inimest, kes ei tunne üksteist.

Graafiteooria terminitesse üle minnes ... Olgu $V$ peol olevate inimeste hulk ja $E \subseteq V \times V$ olgu binaarne relatsioon hulgal $V$, nii et iga kahe inimese $x, y \in V$ korral $(x, y) \in E$ parajasti siis kui $x$ ja $y$ tunnevad teineteist.

Lihtgraafi $G$ tippude alamhulka $S \subseteq V(G)$ nimetatakse *klikiks*, kui iga kahe tipu $u, v \in S$ jaoks, kus $u \neq v$, leidub graafis $G$ serv nende kahe tipu vahel. Alamhulka $S \subseteq V(G)$ nimetatakse *sõltumatuks hulgaks*, kui ühegi kahe hulka $S$ kuuluva tipu vahel ei ole graafis $G$ serva. Äsjaesitatud väide pidude kohta on väljendatav graafiteoorias järgmiselt:

**Teoreem 9.1** *Iga mittesuunatud lihtgraaf $G = (V, E)$, kus $|V| \geq 6$ sisaldab indutseeritud alamgraafina vähemalt ühte graafidest $K_3$ (kolmetipuline täisgraaf) ja $O_3$ (kolmetipuline tühigraaf), st sisaldab kas kolme-elemendilist klikki või siis kolme-elemendilist sõltumatut hulka.*

Tõestus. Olgu $v \in V$ mingi suvaline tipp. Olgu $N(v) = \{u\colon (u, v) \in E\}$ tipu $v$ naabrite hulk ja $\overline{N}(v) = \{u\colon u \neq v,\ (u, v) \notin E\}$ tipu $v$ mitte-naabrite hulk. On selge, et peale tipu $v$ leidub graafis $G$ veel vähemalt viis tippu, mistõttu kas:

a) $|N(v)| \geq 3$, või siis

b) $|\overline{N}(v)| \geq 3$.

Juhul a) vaatleme indutseeritud alamgraafi $N(v)$. On kaks võimalust:

a1) Iga kahe tipu $u, w \in N(v)$ korral $(u, w) \notin E$. Siis on $N(v)$ sõltumatu hulk, milles on vähemalt kolm tippu.

a2) Leiduvad tipud $u, w \in N(v)$, nii et $(u, w) \in E$. Seljuhul on aga $\{u, v, w\}$ kolme-elemendiline klikk.

Juhul b) vaatleme indutseeritud alamgraafi $\overline{N}(v)$. On kaks võimalust:

b1) Iga kahe erineva tipu $u, w \in \overline{N}(v)$ korral $(u, w) \in E$. Siis on $\overline{N}(v)$ klikk, milles on vähemalt kolm tippu.

b2) Leiduvad erinevad tipud $u, w \in \overline{N}(v)$, nii et $(u, v) \notin E$. Siis aga on $\{u, v, w\}$ kolme-elemendiline sõltumatu hulk.

Teoreem on tõestatud. $\square$

Toodud näitest tulenevalt võib tekkida uus ja üldisem küsimus: "Kas kõigi positiivsete arvude $k$ ja $\ell$ korral leidub täisarv $r(k, \ell)$, nii et iga graaf $G = (V, E)$, kus $|V| \geq r(k, \ell)$, sisaldab indutseeritud alamgraafina kas $k$-elemendilist klikki (st $K_k \hookrightarrow G$) või siis $\ell$-elemendilist sõltumatut hulka (st $O_\ell \hookrightarrow G$)?" Osutub, et vastus sellele küsimusele on jaatav. Küsimuse tõstatas (ja ka vastas) esimesena Ramsey. Nii tekkis Ramsey teooria.

NB! Edaspidi eeldame, et $r(k, \ell)$ on **vähim** selline positiivne täisarv $r$, mis rahuldab tingimust

$$K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_\ell \hookrightarrow G$$

iga mittesuunatud lihtgraafi $G = (V, E)$ korral, milles $|V| \geq r$.

**Lemma 9.2** *$r(1, \ell) = r(k, 1) = 1$, $r(2, \ell) = \ell$ ja $r(k, 2) = k$.*

Tõestus. Iga graaf, kus on vähemalt 1 tipp, sisaldab alati ühe-elemendilist klikki ja ühe-elemendilist sõltumatut hulka. Samas ei sisaldu tühigraafis $(\emptyset, \emptyset)$ alamgraafe $K_1$ ja $O_1$. Seega $r(1, \ell) = r(k, 1) = 1$.

Olgu $G = (V, E)$ mingi $\ell$-tipuline graaf. On selge, et kui leiduvad tipud $u, v \in V$, nii et $(u, v) \in E$, siis $K_2 \hookrightarrow G$. Kui aga $(u, v) \notin E$ iga kahe tipu $u$ ja $v$ korral, siis $G$ ise on tühigraaf ja seega $O_\ell \hookrightarrow G$. Samas on selge, et leidub

$(\ell-1)$-tipuline graaf, milles ei sisaldu ei $K_2$ ega ka $O_\ell$. Selleks on $O_{\ell-1}$. Seega tõepoolest $r(2,\ell)=\ell$.

Olgu $G=(V,E)$ mingi $k$-tipuline graaf. On selge, et kui leiduvad erinevad tipud $u,v\in V$, nii et $(u,v)\notin E$, siis $O_2\hookrightarrow G$. Kui aga $(u,v)\in E$ iga kahe erineva tipu $u$ ja $v$ korral, siis on $G$ ise täisgraaf ja järelikult $K_k\hookrightarrow G$. Samas leidub $(k-1)$-tipuline graaf, mis ei sisalda indutseeritud alamgraafina ei graafi $K_k$ ega ka $O_2$. Selleks sobib graaf $K_{k-1}$. Seega tõepoolest $r(k,2)=k$. □

Teoreemi 9.1 tõestus näitab, et $r(3,3)\le 6$. Samas leidub viie-tipuline graaf, mis ei sisalda ei kolme-elemendilist klikki ega ka kolme-elemendilist tühigraafi. Selleks sobib väga hästi viie-elemendiline tsükkel.

**Teoreem 9.3 (Ramsey)** *Kõigi positiivsete täisarvude $k\ge 2$ ja $\ell\ge 2$ korral:*

$$r(k,\ell)\le r(k-1,\ell)+r(k,\ell-1)\ .$$

Tõestus. Kasutame induktsiooni suuruse $k+\ell$ järgi. Kui $k+\ell=4$, st $k=\ell=2$, siis vastavalt Lemmale 9.2:

$$r(k,\ell)=2=1+1=r(1,2)+r(2,1)=r(k-1,\ell)+r(k,\ell-1).$$

Oletame, et $k$ ja $\ell$ on positiivsed arvud ja teoreemi väide kehtib iga $k',\ell'$ korral, nii et $k'+\ell'<k+\ell$. Olgu $G=(V,E)$ graaf, milles on

$$|V|=r(k-1,\ell)+r(k,\ell-1)$$

tippu. Olgu $v\in V$ mingi suvaline tipp. On selge, et kas:

a) $|N(v)|\ge r(k-1,\ell)$, või siis

b) $|\overline{N}(v)|\ge r(k,\ell-1)$.

Juhul a) vaatleme indutseeritud alamgraafi $N(v)$. Vastavalt induktsiooni eeldusele on kaks võimalust:

a1) $K_{k-1}\hookrightarrow N(v)$, millest järeldub et $\{v\}\cup N(v)$ on $k$-tipuline klikk.

a2) $O_\ell\hookrightarrow N(v)$, millest triviaalselt tuleneb, et ka $O_\ell\hookrightarrow G$.

Juhul b) vaatleme indutseeritud alamgraafi $\overline{N}(v)$. Vastavalt induktsiooni eeldusele on kaks võimalust:

b1) $O_{\ell-1} \hookrightarrow \overline{N}(v)$, millest järeldub et $\{v\} \cup \overline{N}(v)$ on $\ell$-tipuline sõltumatu hulk.

b2) $K_k \hookrightarrow \overline{N}(v)$, millest triviaalselt tuleneb, et ka $K_k \hookrightarrow G$.

Teoreem on tõestatud. $\square$

**Järeldus 9.4** *Kui $k \geq 2$, $\ell \geq 2$ ning $r(k, \ell-1)$ ja $r(k-1, \ell)$ on mõlemad paarisarvud, siis*

$$r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) - 1 \ .$$

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ graaf, milles on $r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) - 1$ tippu. Kuna tippude arv on paaritu ja vastavalt teoreemile 1.1 on igas graafis paarisarv paaritu astmega tippe, siis leidub selline tipp $v \in V$, millel on paarisarv naabreid. Kuna nii $|N(v)|$ kui ka $|\overline{N}(v)|$ on paarisarvud, siis kehtib taas üks järgmistest väidetest:

a) $|N(v)| \geq r(k-1, \ell)$, või siis

b) $|\overline{N}(v)| \geq r(k, \ell-1)$.

Tõestus jätkub identselt teoreemi 9.3 tõestusega. $\square$

**Teoreem 9.5**

$$r(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}.$$

Tõestus. Kasutame induktsiooni $k + \ell$ järgi. Kui $k = \ell = 2$, siis

$$r(k, \ell) = 2 = \binom{2}{1} = \binom{k+\ell-2}{k-1}.$$

Olgu $k, \ell$ positiivsed täisarvud ja kehtigu teoreemi väide iga $k', \ell'$ korral, kui $k' + \ell' < k + \ell$. Siis vastavalt Teoreemile 9.3:

$$r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) \leq \binom{k+\ell-3}{k-2} + \binom{k+\ell-3}{k-1} = \binom{k+\ell-2}{k-1},$$

mis tõestabki teoreemi väite. $\square$

Järelikult $r(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 2^{2k-1}$. Järgnev teoreem annab suurusele $r(k, k)$ ka alumise tõkke.

**Teoreem 9.6 (Erdős)** *Kui $k \geq 2$, siis $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.*

Tõestus. Teoreemi väide on lihtsalt kontrollitav, kui $k = 2$. Olgu $k \geq 3$. Tõestus on mittekonstruktiivne ja põhineb niinimetatud tõenäosuslikul meetodil. Tuletame meelde, et leidub täpselt $2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ märgendatud $n$-tipulist graafi. Olgu $G$ graaf, mis on nende hulgast juhuslikult valitud. Seejuures eeldame, et see valik on *õiglane*, s.t. igaühel nendest $2^{\binom{n}{2}}$-st graafist on sama suur tõenäosus valituks saada. Tõestame, et kui $n < 2^{k/2}$, siis tõenäosus

$$\mathrm{Prob}[K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_k \hookrightarrow G] < 1,$$

mistõttu järeldame, et leidub $n$-tipuline graaf, mis ei sisalda alamgraafina ei graafi $K_k$ ega graafi $O_k$; ja seega $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.

Tõepoolest, kui $n < 2^{k/2}$, siis:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}[K_k \hookrightarrow G] &\leq \frac{\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} \\
&< \frac{2^{k^2/2} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} \qquad \text{(sest } n < 2^{k/2}\text{)} \\
&= \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2} \qquad \text{(sest } k \geq 3\text{)}.
\end{aligned}$$

Et ka võrratus $\mathrm{Prob}[O_k \hookrightarrow G] < 1/2$ on analoogiliselt tõestatav, siis saame, et:

$$\mathrm{Prob}[K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_k \hookrightarrow G] \leq \mathrm{Prob}[K_k \hookrightarrow G] + \mathrm{Prob}[O_k \hookrightarrow G] < 1,$$

mis tõestabki teoreemi. $\square$

Ramsey arvusid $r(k,\ell)$ saab mitmel viisil üldistada. Siinkohal vaatame neist ühte. Nimelt võiksime me arvu $r(k,\ell)$ defineerida ka kui vähima arvu $n$, mille korral täisgraafi $K_n$ servi ükskõik mis viisil kahe värviga värvides leiduvad $k$ tippu, mille vahelised servad on kõik värvitud esimese värviga, või $\ell$ tippu, mille vahelised servad on kõik värvitud teise värviga.

Kahe värvi asemel võime me vaadata ka mingit muud arvu värve. Defineerimegi Ramsey arvu $r(a_1, \ldots, a_k)$ kui vähima sellise arvu $n$, mille korral täisgraafi $K_n$ servi ükskõik mis viisil $k$ värviga värvides leidub selline $i \in \{1, \ldots, k\}$, et leiduvad $a_i$ tippu, mille vahelised servad on kõik värvitud $i$-nda värviga.

Arvud $r(a_1, \ldots, a_k)$ rahuldavad teoreemi 9.3 väitega analoogilist võrratust. Nimelt kehtib

$$\begin{multline} r(a_1, \ldots, a_k) \leq \\ r(a_1 - 1, a_2, \ldots, a_k) + r(a_1, a_2 - 1, a_3, \ldots, a_k) + \cdots + \\ r(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1) - (k-2) \ . \quad (9.1) \end{multline}$$

Selle võrratuse tõestus on analoogiline teoreemi 9.3 tõestusega.

## 9.1 Ülesanded

**Ülesanne 66.** Tõesta, et $r(3, 4) = 9$.

**Ülesanne 67.** Tõesta, et $r(n+1, n+1) \leq 4^n$.

**Ülesanne 68.** Tõesta, et suvaliste naturaalarvude $k$ ja $l$ korral leidub selline naturaalarv $n$, et igas reaalarvujärjendis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ leidub mittekahanev alamjärjend pikkusega $k$ või mittekasvav alamjärjend pikkusega $l$.

**Ülesanne 69.** Näita, et kui mõni arvudest $a_1, \ldots, a_k$ on võrdne ühega, siis $r(a_1, \ldots, a_k) = 1$.

**Ülesanne 70.** Tõesta võrratus (9.1).

**Ülesanne 71.** Tõesta, et $r(3, 3, 3) \leq 17$.

**Ülesanne 72.** Tõesta, et

$$r(a_1, \ldots, a_{i-1}, 2, a_{i+1}, \ldots, a_k) = r(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

# Peatükk 10

# Tasandilised graafid

Graaf on *tasandiline*, kui teda on võimalik joonistada nii, et nii, et tema servad väljaspool tippe ei lõikuks.

See „definitsioon“ on küll hästi intuitiivne, kuid ta pole matemaatiliselt range, kuna „ joonistamine“ ei ole rangeltdefineeritud mõiste. Tasandilisuse ühe võimaliku range definitsiooni annab jaotis 10.1. Käesolevas õppematerjalis kasutame me edaspidi siiski eeltoodud mitteranget definitsiooni ja jätame seetõttu mõned väliselt ilmsed, kuid tegelikult mittetriviaalsed väited tõestamata.

## 10.1 Tasandilisuse definitsioon

*Kõver* eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^n$ on mingi funktsioon $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, kus $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Punkte $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$ nimetatakse kõvera $\gamma$ *otspunktideks*.

Kõver $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on *pidev*, kui iga $y \in [a, b]$ jaoks kehtib $\lim_{x \to y} \gamma(x) = \gamma(y)$.

Pidev kõver on *sirgestuv*, kui järgmine ülemraja on lõplik:

$$\sup\{\sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\},$$

(siin $d$ on kaugus ruumis $\mathbb{R}^n$). Seda ülemraja nimetatakse kõvera *pikkuseks*.

*Jordani kõver* on sirgestuv kõver, mis ennast ei lõika (s.t. funktsioon $\gamma$ on injektiivne). Olgu $J_n$ kõigi Jordani kõverate hulk ruumis $\mathbb{R}^n$.

Graaf $G = (V, E)$ on *sisestatav* ruumi $\mathbb{R}^n$, kui leiduvad kujutised $\iota_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\iota_E : E \longrightarrow J_n$, mille korral

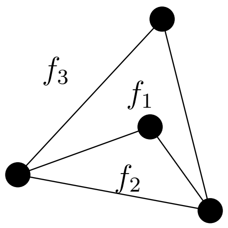
- $\iota_V$ ja $\iota_E$ on injektiivsed.
- Kui tipp $v \in V$ on serva $e \in E$ üheks otspunktiks, siis on punkt $\iota_V(v)$ kõvera $\iota_E(e)$ üheks otspunktiks.

- Servade kujutisteks olevad kõverad lõikavad üksteist vaid nende ühistes otspunktides.

Graaf on *tasandiline*, kui ta on sisestatav tasandile — ruumi $\mathbb{R}^2$. Tema sisestus tasandile ongi see, mida me intuitiivselt mõistame graafi joonise all.

## 10.2 Euleri valem

Kui graaf on mingil viisil tasandile joonistatud, siis jaotab tema joonis tasandi ülejäänud osa (s.t. osa, mis ei jää joonise alla) osadeks. Kaht tasandi punkti loeme erinevates osades olevaks, kui ühest punktist teise jõudmiseks tuleb graafi joonisest üle minna. Neid tasandi osi nimetame *tahkudeks*. Joonisel 10.1 on toodud graaf, mille joonis defineerib tasandil kolm tahku. Tahku $f_3$ sellel




**Joonis 10.1:** Tahud tasandilise graafi joonisel

joonisel nimetatakse *lõpmatuks tahuks*. Tahu lõpmatuses ei ole midagi erilist, me võime graafi joonistada nii, et ükskõik milline tahk on lõpmatu. Kui me joonistaks graafi mitte tasandile, vaid sfäärile, siis ei eristuks ükski tahk teistest oma lõpmatuse poolest.

**Teoreem 10.1 (Euler, 1750)** *Olgu $G$ sidusa tasandilise graafi joonis tasandil ning olgu $n$, $m$ ja $f$ vastavalt $G$ tippude arv, servade arv ja tahkude arv. Siis $n + f - m = 2$.*

See teoreem ütleb, et sõltumata sellest, kuidas sidus tasandiline tasandile joonistatud on, jääb joonise tahkude arv samaks.

Tõestus. Induktsioon üle servade arvu $m$.

Kui $m = 0$, siis $n = 1$ (meil on sidus graaf) ja $f = 1$ (lõpmatu tahk). Seega $n + f - m = 1 + 1 - 0 = 2$.

Eeldame nüüd, et teoreem kehtib kõigi ülimalt $m-1$ servaga graafide jaoks. Olgu $G$ graaf, millel on $m$ serva. Kui $G$ on puu, siis $m = n-1$ ja $f = 1$ ning $n+f-m = n+1-(n-1) = 2$. Kui $G$ ei ole puu, siis leidub graafis $G$ selline serv $e$, et tema eemaldamine $G$-st ei muuda graafi $G$ mittesidusaks. Graafis $G-e$ on $n$ tippu, $m-1$ serva ja $f-1$ tahku (sest serva lisamisel sidusasse graafi poolitame me mingi tahu[1]). Induktsiooni eelduse järgi $n+(f-1)-(m-1) = 2$. Siit järeldub kohe teoreemi väide. □

Teoreemist 10.1 järeldub päris mitu huvitavat tulemust.

**Järeldus 10.2** *Olgu $G$ tasandilise graafi joonis tasandil ning olgu $n$, $m$, $f$ ja $k$ vastavalt $G$ tippude arv, servade arv, tahkude arv ja sidususkomponentide arv. Siis $n+f-m = k+1$.*

Tõestus. Rakendame teoreemi 10.1 eraldi graafi $G$ kõigile sidususkomponentidele. Seejuures paneme tähele, et me loeksime lõpmatut tahku ainult üks kord. □

**Järeldus 10.3** *Olgu $G$ sidus tasandiline lihtgraaf, millel on $n$ tippu ja $m$ serva. Kehtivad järgmised väited:*

*(i).* $m \leq 3n-6$.

*(ii). Kui $G$ ei sisalda tsükleid pikkusega 3, siis $m \leq 2n-4$.*

Tõestus. Vaatame graafi $G$ joonist tasandil. Kuna $G$ on lihtgraaf, siis on igal tema tahul vähemalt 3 serva (1 servaga tahk tähendaks, et graafis on silmus, ja 2 servaga tahk tähendab, et graafis on kordseid servi). Kuna iga serv kuulub täpselt kahele tahule, siis $m \geq \frac{3}{2}f$. Euleri valemist saame nüüd

$$2 = n+f-m \leq n + \frac{2}{3}m - m = \frac{3n-m}{3},$$

millest järeldub $3n-m \geq 6$ ehk $3n-6 \geq m$.

Osas (ii) toodud täiendav tingimus tähendab, et $G$ joonise igal tahul on vähemalt neli serva. Seega kehtib meil võrratus $m \geq 2f$, mida sarnaselt eelmisele osale euleri valemiga kombineerides saame tõestamist vajava võrratuse. □

[1] See väide on tegelikult mittetriviaalne. Ta järeldub sellest, et iga kinnine Jordani kõver jagab tasandi kaheks osaks.

**Järeldus 10.4** *Graafid $K_5$ ja $K_{3,3}$ pole tasandilised.*

Tõestus. Graafil $K_5$ on 5 tippu ja 10 serva. Kui $K_5$ oleks tasandiline, siis saaksime järelduse 10.3 osast (i) $10 \leq 9$.

Graafil $K_{3,3}$ on 6 tippu ja 9 serva, lisaks sellele pole tal paarituarvulise pikkusega tsükleid (teoreem 1.6). Kui $K_{3,3}$ oleks tasandiline, siis saaksime järelduse 10.3 osast (ii) $9 \leq 8$. □

**Järeldus 10.5** *Igas tasandilises lihtgraafis leidub tipp astmega ülimalt* 5.

Tõestus. Olgu $G$ vaadeldava tasandilise lihtgraafi mingi sidususkomponent, olgu $n$ tippude arv ja $m$ servade arv $G$-s, oletame, et $G$-s on iga tipu aste vähemalt 6. Kuna iga serv on intsidentne kahe tipuga, siis kehtib meil võrratus $6n \leq 2m$ ehk $m \geq 3n$. Kombineerides seda võrratust järelduse 10.3 osast (i) tuleva võrratusega $m \leq 3n - 6$ saame vastuolu. □

## 10.3 Tasandilisuse kriteerium

Graaf on tasandiline parajasti siis, kui temas ei „sisaldu" graafe $K_5$ ja $K_{3,3}$. Allpool täpsustame me, mida sisaldumine tähendab.

Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf ja $e \in E$ tema mingi serv. Olgu $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$. Ütleme, et graaf $G' = (V', E')$ on saadud graafist $G$ serva $e$ *poolitades*, kui

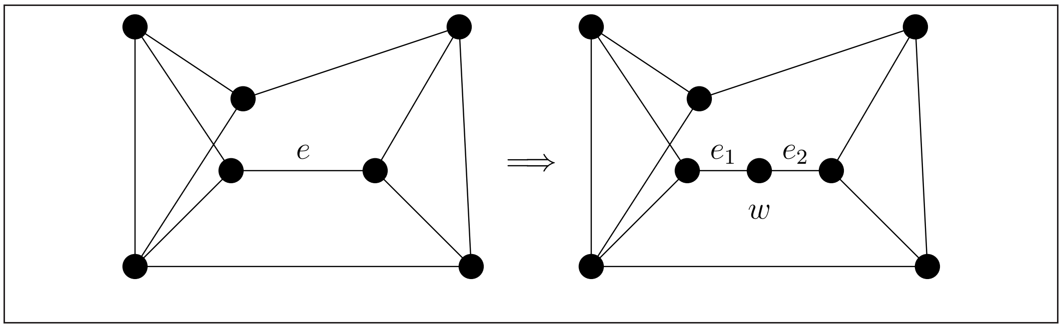
- $V' = V \cup \{w\}$, kus $w$ on mingi uus tipp.
- $E' = E \backslash \{e\} \cup \{e_1, e_2\}$, kus $e_1$ ja $e_2$ on mingid uued servad.
- $\mathcal{E}(e_1) = \{u, w\}$ ja $\mathcal{E}(e_2) = \{w, v\}$.

Serva poolitamist illustreerib joonis 10.2.

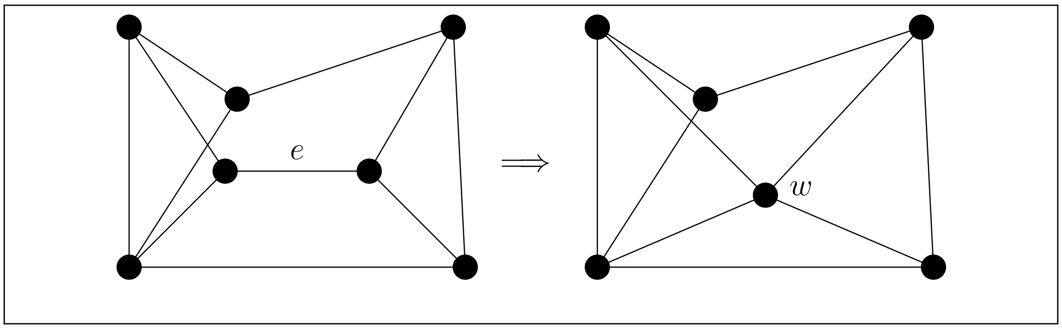
Graafe $G_1$ ja $G_2$ nimetame *homöomorfseteks*, kui leidub mingi graaf $G$, nii et nii $G_1$ kui ka $G_2$ on saadavad $G$-st servade poolitamiste teel.

Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf ning olgu $e \in E$. Loeme, et $E$ on tipuhulga $V$ kaheelemendiliste alamhulkade mingi hulk. Kui me graafis $G$ serva *e kokku tõmbame*, siis saame lihtgraafi, mida tähistame $G/e$, ning mille tipuhulk on $V \backslash \mathcal{E}(e) \cup \{w\}$, kus $w$ on mingi uus tipp, ja servahulk on

$$\{\{u, v\} \mid \{u, v\} \in E, u, v, \notin \mathcal{E}(e)\} \cup \{\{u, w\} \mid \{u, v\} \in E, u \notin \mathcal{E}(e), v \in \mathcal{E}(e)\} .$$




**Joonis 10.2:** Näide serva $e$ poolitamisest




**Joonis 10.3:** Näide serva $e$ kokkutõmbamisest

Joonisel 10.3 on toodud serva kokkutõmbamise näide. Paneme tähele, et kui me tasandilises graafis mingi serva kokku tõmbame, siis ka saadav graaf on tasandiline.

Ütleme, et graaf $G$ on *kokkutõmmatav* graafiks $G'$, kui $G'$ on saadav $G$-st servade kokkutõmbamiste teel.

**Teoreem 10.6 (Kuratowski)** *Graaf on tasandiline parajasti siis, kui ükski tema alamgraafidest pole homöomorfne graafiga $K_5$ või graafiga $K_{3,3}$.*

**Teoreem 10.7 (Wagner)** *Graaf on tasandiline parajasti siis, kui ükski tema alamgraaf pole kokkutõmmatav graafiks $K_5$ või graafiks $K_{3,3}$.*

## 10.4 Ülesanded

**Ülesanne 73.** Millised graafidest $K_n$ ja $K_{m,n}$ on tasandilised?

**Ülesanne 74.** Milliste $k$ väärtuste jaoks on graaf $Q_k$ tasandiline?

**Ülesanne 75.** Milliste $r$, $s$, $t$ väärtuste jaoks on graaf $K_{r,s,t}$ tasandiline?

**Ülesanne 76.** Milliste $n$ väärtuste jaoks on graaf $G_n$ (vt ülesanne 16) tasandiline?

**Ülesanne 77.** Tõesta, et Peterseni graaf pole tasandiline.

**Ülesanne 78.** Leia Peterseni graafis alamgraaf, mis on homöomorfne graafiga $K_{3,3}$.

**Ülesanne 79.** Kas leidub tasandiline graaf, mille iga tipu aste on 5?

**Ülesanne 80.** Tõesta, et iga $n \geq 20$ korral leidub $n$-tipuline tasandiline graaf, mille iga tipu aste on vähemalt 5.

**Ülesanne 81.** Tõesta, et kui $n$ tipu ja $m$ servaga tasandilise lihtgraafi iga tahk on tsükkel pikkusega $t$, siis $m = t(n-2)/(t-2)$.

**Ülesanne 82.** Tõesta, et kui graafil $G$ on vähemalt 11 tippu, on vähelalt üks graafidest $G$ ja $\overline{G}$ mittetasandiline. On võimalik näidata, et sama väide kehtib ka 9-tipuliste graafide korral.

**Ülesanne 83.** Leia 8-tipuline graaf $G$, mille korral

1. nii $G$ kui $\overline{G}$ on tasandilised,
2. nii $G$ kui $\overline{G}$ on mittetasandilised
3. $G$ on tasandiline, aga $\overline{G}$ mitte.

# Peatükk 11

# Graafi tippude värvimine

Olgu $G = (V, E)$ silmusteta graaf. Graafi $G$ *tippude värvimisviisiks $k$ värviga* nimetatakse funktsiooni $c$ graafi tippude hulgast $V$ hulka $C = \{1, \ldots, k\}$. Värvimisviisi $c$ nimetatakse *korrektseks*, kui ei leidu serva, mille mõlemad otspunktid oleksid sama värvi. Graaf $G$ on *värvitav $k$ värviga*, kui tal leidub tippude korrektne värvimisviis $k$ värviga. Minimaalset sellist $k$-d tähistame sümboliga $\chi(G)$ ja nimetame graafi $G$ *kromaatiliseks arvuks tippude järgi*.

On selge, et kui $V \xrightarrow{c} C$ on mingi korrektne värvimisviis ja $C \xrightarrow{\sigma} C$ on mingi bijektsioon, siis ka $V \xrightarrow{\sigma \circ c} C$ on korrektne värvimisviis. See tähendab, et permuteerides korrektse värvimisviisi värve ei muuda värvimisviisi mittekorrektseks. Näiteks saab omavahel ära vahetada kaks värvi.

## 11.1 Üldiste graafide värvimine

**Teoreem 11.1** *Silmusteta graaf $G$ on värvitav $\Delta(G) + 1$ värviga.*

Tõestus. Induktsioon üle tippude arvu. On ilmne, et teoreemi väide kehtib ühetipuliste graafide jaoks. Olgu $G$ mingi graaf ja oletame, et teoreemi väide kehtib kõigi sellest graafist väiksema tippude arvuga graafide jaoks. Olgu $v \in V(G)$ ja olgu $c$ graafi $G \backslash v$ mingi korrektne värvimisviis $\Delta(G)+1$ värviga. Kuna $\deg(v) < \Delta(G)+1$, siis leidub mingi värv $i \in \{1, \ldots, \Delta(G)+1\}$, nii et tipu $v$ ükski naabertipp graafis $G$ pole värvitud värviga $i$. Kui me täiendame värvimisviisi $c$, värvides täiendavalt tipu $v$ värviga $i$, siis saame korrektse värvimisviisi $\Delta(G) + 1$ värviga graafile $G$. $\square$

Enamasti õnnestub graafi tippe värvida ka ühe võrra väiksema tippude arvuga:

**Teoreem 11.2 (Brooks,1941)** *Kui $G$ on graaf, nii et $\Delta(G) \le d \ge 3$ ja $G$ ei sisalda $(d+1)$-elemendilist klikki, siis $\chi(G) \le d$.*

Tõestus. On selge, et teoreemi väide kehtib ühetipuliste graafide korral. Oletame vastuväiteliselt, et teoreemi väide üldiselt ei kehti ja $G = (V, E)$ olgu minimaalse tippude arvuga kontranäide. Olgu $x \in V$ suvaline tipp graafis $G$ ja olgu $N(x) = \{x_1, \ldots, x_\ell\}$ tipu $x$ naabrite hulk. Selge, et $\ell \le d$. Kuna $G$ on minimaalne kontranäide, siis graaf $H = G - \{x\}$, mis on saadud graafist $G$ tipu $x$ ja temaga intsidentsete servade eemaldamise teel, on värvitav $d$ värviga. Olgu need värvid $\{1, \ldots, d\}$. Kui mõni neist värvidest $i$ ei esine hulgas $\{c(x_1), \ldots, c(x_\ell)\}$, siis võiksime võtta $c(x) := i$ ja kogu graaf oleks värvitav $d$ värviga, mis aga on välistatud eelduse tõttu. Seega peavad kõik $d$ värvi esinema hulgas $\{c(x_1), \ldots, c(x_\ell)\}$, millest järeldub $\ell = d$. Seega on minimaalne kontranäide $d$-regulaarne graaf. Samuti järeldub siit, et graafi $H$ iga värvimisviis $d$ värviga peab kasutama kõiki värve $\{1, \ldots, d\}$. Eeldame, et $c(x_i) = i$.

Olgu $H_{ij}$ graafi $H$ alamgraaf, mille indutseerivad värvid $i$ ja $j$, st $y \in H_{ij}$ parajasti siis, kui $c(y) \in \{i, j\}$. Kui $x_i$ ja $x_j$ oleksid graafi $H_{ij}$ erinevates sidususkomponentides, siis võiksime vahetada omavahel värvid $i$ ja $j$ ühe komponendi piires ilma, et värvimisviis muutuks ebakorrektseks. Peale seda protseduuri oleksid aga tipud $x_i$ ja $x_j$ sama värvi, mis on võimatu eelduse tõttu. Olgu $C_{ij}$ see sidususkomponent, kus tipud $x_i$ ja $x_j$ on.

Näitame, et sidususkomponent $C_{ij}$ on ahel tipust $x_i$ tippu $x_j$. Kui tipul $x_i$ oleksid kaks sama värvi naabrit graafis $H$, siis oleks tipul $x_i$ graafis $H$ ülimalt $d-2$ eri värvi naabrit, seega me võiksime muuta tipu $x_i$ värvi, mistõttu $x_i$ saaks olema sama värvi mis üks naabritest $\{x_1, \ldots x_{i-1}, x_i \ldots, x_d\}$ see on aga võimatu. Olgu

$$x_i = z_0 — z_1 — \ldots — y — \ldots — z_{m-1} — z_m = x_j$$

mingi tee tipust $x_i$ tippu $x_j$ ja $y$ olgu ($x_i$ poolt vaadatuna) esimene tipp, mille valents graafis $H_{ij}$ on suurem kui kaks. Tipul $y$ on graafis $H$ ülimalt $d-2$ eri värvi naabrit. Seega me saame värvida tipu $y$ mingit värvi $c' \notin \{i, j\}$, misjärel $x_i$ ja $x_j$ ei oleks enam ahelaga ühendatavad. [1] See on aga võimatu,

[1]Sellepärast tuli alustada tipust $x_i$ ja kõigepealt näidata, et tipul $x_i$ ei ole graafis $H_{ij}$ rohkem naabreid kui üks.

nagu eelnevast arutelust selgus. Seega ei leidu üheski graafi $H_{ij}$ ahelas $x_i \rightsquigarrow x_j$ tippe valentsiga $> 2$, millest järeldubki, et $C_{ij}$ on ahel.

Olgu $z \neq x_i \in C_{ij} \cap C_{ik}$. Selge, et $c(z) = i$. Mõlemad komponendid $C_{ij}$ ja $C_{ik}$ on ahelad, mis algavad tipust $x_i$ ja lõpevad vastavalt tippudes $x_j$ ja $x_k$ (mis on erinevad!). Samuti võime täheldada, et $x_k \notin C_{ij}$ ja samuti $x_j \notin C_{ik}$. Seega on $z$ mõlema ahela sisepunkt ja kuna $c(z) = i$, siis järelikult peab tipul $z$ olema parajasti kaks $j$-värvi naabrit ja kaks $k$-värvi naabrit. Jällegi peaks siis tipul $z$ olema graafis $H$ ülimalt $d-2$ eri värvi naabrit ja seega me saaksime tipu $z$ värvida mingi värviga $\notin \{i, j, k\}$, mis on vastuolu. Seega $C_{ij} \cap C_{ik} = \{x_i\}$.

Meie eeldusest $K_{d+1} \not\hookrightarrow G$ järeldub, et hulgas $N(x)$ leiduvad kaks tippu, mis pole servaga ühendatud. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et need tipud on $x_1$ ja $x_2$. Olgu $a$ tipu $x_1$ naaber, mis on värvitud värviga 2, st $(a, x_1) \in E$ ja $a \in C_{12}$. Nüüd vahetame alamgraafis $C_{13}$ omavahel värvid 1 ja 3. Uues tekkinud värvimisviisis on meil uued ahelad $C'_{ij}$. Selge, et $a \in C'_{23}$, sest tipul $x_1$ on ju uues värvimisviisis värv 3. Ahelas $C_{12}$ muutis ainult tipp $x_1$ värvi, sest $C_{12} \cap C_{13} = \{x_1\}$. Seega ka uues värvimisviisis $a \in C'_{12}$, sest ta on ühendatud ahela $C_{12}$ abil tipuga $x_2$. Kuid siis $C'_{12} \cap C'_{23} \neq \{x_2\}$, mis on vastuolu. □

## 11.2 Tasandiliste graafide värvimine

**Teoreem 11.3** *Iga tasandiline lihtgraaf on värvitav kuue värviga.*

Tõestus. Selle teoreemi tõestus on sarnane teoreemi 11.1 tõestusega. Ühetipuliste graafide jaoks on teoreemi väide õige. Olgu $G$ nüüd $n$-tipuline tasandiline lihtgraaf ja kehtigu teoreemi väide graafide jaoks, millel on ülimalt $n-1$ tippu. Olgu $v$ graafi $G$ mingi selline tipp, millel on ülimalt 5 naabertippu; selline tipp leidub vastavalt järeldusele 10.5. Graafis $G \backslash v$ on $n-1$ tippu ja vastavalt induktsiooni eeldusele on ta värvitav kuue värviga. Graafi $G$ korrektse värvimisviisi kuue värviga saame graafi $G \backslash v$ korrektsest värvimisviisist kuue värviga, kui me lisaks anname tipule $v$ värvi, mis erineb kõigi tema naabertippude värvist. □

**Teoreem 11.4** *Iga tasandiline lihtgraaf on värvitav viie värviga.*

Tõestus. Jällegi on ühetipuliste graafide jaoks teoreemi väite kehtivus ilmne. Olgu $G$ tasandiline lihtgraaf, millel on $n$ tippu, ja kehtigu teoreemi väide graafide jaoks, millel on ülimalt $n-1$ tippu. Olgu $v$ graafi $G$ selline tipp, millel on ülimalt 5 naabertippu (järeldus 10.5).

Kui tipul $v$ on ülimalt 4 naabertippu, siis vaatame graafi $G\backslash v$. Vastavalt induktsiooni eeldusele on ta 5 värviga värvitav; graafi $G$ korrektse värvimisviisi 5 värviga saame, kui värvime lisaks tipu $v$ värviga, mis erineb kõigi tema naabertippude värvidest.

Oletame nüüd, et tipul $v$ on täpselt 5 naabertippu. Nende viie tipu seas peavad leiduma tipud $v'$ ja $v''$, mis ei ole omavahel servaga ühendatud, vastasel juhul sisaldaks $G$ alamgraafina graafi $K_5$, mis aga järelduse 10.4 kohaselt pole tasandiline. Olgu $G'$ saadud graafist $G$ servade $\{v, v'\}$ ja $\{v, v''\}$ kokkutõmbamisel; olgu $w \in V(G')$ tipp, mis asendab graafis $G'$ tippe $v$, $v'$ ja $v''$. Graaf $G'$ on tasandiline graaf $n-2$ tipuga, induktsiooni eelduse kohaselt on ta värvitav viie värviga. Olgu $c$ graafi $G'$ korrektne värvimisviis viie värviga. Graafi $G$ korrektse värvimisviisi saame $c$-st, andes tippudele $v'$ ja $v''$ värvi $c(w)$ ning tipule $v$ värvi, mis erineb kõigi tema naabertippude värvidest. Selline värv leidub, kuna kaks naabertippu on värvitud sama värviga. □

## 11.3 Kromaatiline polünoom

Selle osa lõpetame uurimisega, kui mitmel viisil saab lihtgraafi $G$ korrektselt $k$ värviga värvida. Tähistagu $\mathrm{P}_G(k)$ kõigi selliste funktsioonide $V(G) \xrightarrow{c} \{1, \ldots, k\}$ arvu, kus $c$ on graafi $G$ tippude korrektne värvimisviis. Funktsiooni $\mathrm{P}_G$ nimetatakse graafi $G$ *kromaatiliseks funktsiooniks*.

Mõnede lihtsate graafide puhul on $\mathrm{P}_G$ lihtsalt leitav. Näiteks $\mathrm{P}_{O_n}(k) = k^n$. Tõepoolest, tühjas graafis võib iga tipu värvida üksteisest sõltumatult $k$ värviga. Samuti, $\mathrm{P}_{K_n}(k) = \prod_{i=0}^{n-1}(k-i)$ — esimese tipu värvimiseks on $k$ võimalust, teise värvimiseks $k-1$ võimalust, kolmanda värvimiseks $k-2$ võimalust, jne.

Kui $G$ on $n$-tipuline puu, siis $\mathrm{P}_G(k) = k \cdot (k-1)^{n-1}$. Tõepoolest, kui me puu tippe ükshaaval värvima hakkame, siis esimese tipu värvimiseks on meil $k$ erinevat võimalust ja iga järgmise (me eeldame, et järgmisena värvitav tipp on mõne juba värvitud tipu naabertipp) tipu värvimiseks $k-1$ võimalust.

**Teoreem 11.5** *Olgu $G$ silmusteta lihtgraaf ja olgu $e$ mingi serv graafis $G$. Siis* $\mathrm{P}_G(k) = \mathrm{P}_{G-e}(k) - \mathrm{P}_{G/e}(k)$.

Tõestus. Olgu $v$ ja $w$ serva $e$ otspunktid graafis $G$. Vaatame graafi $G - e$ võimalikke värvimisviise. Olgu $c$ graafi $G - e$ mingi korrektne värvimisviis $k$ värviga. On kaks varianti:

**Variant 1.** $c(v) \neq c(w)$. Sel juhul on $c$ ka graafi $G$ mingi korrektne värvimisviis. Seejuures saame me graafi $G$ kõik värvimisviisid kätte. Seega on graafi $G - e$ korrektsete $k$ värviga värvimisviiside arv, kus tippudel $v$ ja $w$ on erinev värv, võrdne suurusega $\mathrm{P}_G(k)$.

**Variant 2.** $c(v) = c(w)$. Sel juhul on $c$ ka korrektne värvimisviis graafis, kus tipud $v$ ja $w$ on samastatud, s.t. graafis $G/e$. Jällegi, me saame kõik graafi $G/e$ värvimisviisid kätte, selliste värvimisviiside arv on $\mathrm{P}_{G/e}(k)$.

Kokkuvõtteks oleme me näidanud, et $\mathrm{P}_{G-e}(k) = \mathrm{P}_G(k) + \mathrm{P}_{G/e}(k)$. □

**Järeldus 11.6** *Silmusteta lihtgraafi kromaatiline funktsioon on polünoom.*

Tõestus. Induktsioon üle servade arvu. Kui silmusteta lihtgraafil $G$ pole ühtegi serva, siis on ta mingi graafidest $O_n$ ja tema kromaatiliseks funktsiooniks on $k^n$. Kui graafis $G$ on servi, siis me eeldame, et kõigi väiksema servade arvuga graafide kromaatilised funktsioonid on polünoomid, muuhulgas on polünoomid ka $\mathrm{P}_{G-e}$ ja $\mathrm{P}_{G/e}$. Teoreemi 11.5 järgi on siis $\mathrm{P}_G$ võrdne kahe polünoomi vahega, järelikult on ta ka ise polünoom. □

Tegelikult nimetataksegi graafi kromaatilist funktsiooni tema *kromaatiliseks polünoomiks.*

## 11.4 Ülesanded

**Ülesanne 84.** Leia ülesandes 18 toodud graafide kromaatilised arvud tippude järgi.

**Ülesanne 85.** Leia malendigraafide $G_X^{n\times n}$ kromaatilised arvud tippude järgi, kui $X \in \{Kuningas, Vanker, Oda, Ratsu\}$. Näita, et $G_{Lipp}^{n\times n} \geq n$.

**Ülesanne 86.** Näita, et vahe $\Delta(G) - \chi(G)$ võib olla kuitahes suur.

**Ülesanne 87.** Tõesta, et kui graafi $G$ tipud on värvitud vähima võimaliku arvu värvidega, siis leidub iga kahe erineva värvi $i$ ja $j$ korral selline graafi $G$ serv, mille üks otstipp on värvitud värviga $i$ ja teine otstipp värviga $j$.

**Ülesanne 88.** Kas võib väita, et iga graafi $G$ korral kehib

1. $\chi(G) = \chi'(L(G))$?
2. $\chi'(G) = \chi(L(G))$?

**Ülesanne 89.** Tõesta, et kui mingi graafi servgraafi tipud on korrektselt värvitud, siis pole ükski tipp seotud rohkem kui kahe sama värvi tipuga.

**Ülesanne 90.** Tõesta, et kui graafis $G$ on $n$ tippu ja $m$ serva, siis kehtib võrratus

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

Milliste graafide korral kehtib võrdus?

**Ülesanne 91.** Leia graafide $K_n$ ja $K_{1,n}$ kromaatilised polünoomid.

**Ülesanne 92.**

1. Tõesta, et graafi $K_{2,n}$ kromaatiline polünoom on

$$k(k-1)^n + k(k-1)(k-2)^n.$$

2. Tõesta, et graafi $C_n$ kromaatiline polünoom on

$$(k-1)^n - (-1)^n(k-1).$$

**Ülesanne 93.** Tõesta, et kui $G$ on mittesidus lihtgraaf, siis on tema kromaatiline polünoom võrdne komponentide kromaatiliste polünoomide korrutisega.

**Ülesanne 94.** Tõesta, et kui $G$ on lihtgraaf $n$ tipu ja $m$ servaga, siis $G$ kromaatilise polünoomi

1. vabaliige on 0,
2. liikme $k^{n-1}$ kordaja on $-m$.

**Ülesanne 95.** Tõesta, et lihtgraaf $G$ on puu parajasti siis, kui tema kromaatiline polünoom on $k(k-1)^n$.

# Peatükk 12

# Erdős-Renyi teoreem

Senini oleme vaadanud ainult lõplikke graafe, s.t. graafe, mille tippude ja servade hulgad on lõplikud. Käesolevas osas tõestame me ühe tulemuse lõpmatute graafide kohta. Täpsemalt öeldes, me vaatleme silmusteta lihtgraafe, mille tippude arv on loenduv. Sel juhul võime me graafi tipuhulga samastada naturaalarvude hulgaga $\mathbb{N}$ ja graafi servade hulga $\mathbb{N}$-i kaheelemendiliste alamhulkade hulga mingi osahulgaga.

Tulemus, mille me siin tõestame, on järgmine:

**Teoreem 12.1** *Leidub täpselt üks (isomorfismi täpsusega) juhuslik silmusteta loenduva võimsusega tipuhulgaga lihtgraaf.*

Meil tuleks seletada, mida kujutab endast „juhuslik loenduv graaf". Me mõtleme siin, et graaf on loodud järgmise stohhastilise protsessi töö tulemusena:

1. Olgu $G$ graaf tipuhulgaga $\mathbb{N}$ ja servahulgaga $\emptyset$.
2. Iga $i, j \in \mathbb{N}$ jaoks, kus $i < j$, viska münti. Kui tulemuseks on kull, siis lisa serv $\{i, j\}$ graafi $G$.
3. Väljasta graaf $G$.

Teoreemi väide tähendab nüüd seda, et kui me jooksutame seda protsessi kaks korda ja saame seega loenduvad graafid $G_1$ ja $G_2$, siis on tõenäosus, et need graafid on isomorfsed, võrdne ühega.

Kuna meie tõenäosusteoreetiline intuitsioon pole lõpmatute hulkade korral enam nii vabalt kasutatav, siis defineerime me siinkohal, mida tõenäosus endast antud juhul üldse kujutab. Olgu $\mathcal{G}$ kõigi loenduvate silmusteta lihtgraafide hulk. $\sigma$-*algebra* hulgal $\mathcal{G}$ on mingi $\mathcal{G}$ alamhulkade hulk $\sigma$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- $\emptyset \in \sigma$;
- kui $\mathcal{H} \in \sigma$, siis ka $\mathcal{G}\backslash\mathcal{H} \in \sigma$;
- kui $\mathcal{H}_i \in \sigma$, kus $i \in \mathbb{N}$, siis ka $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i \in \sigma$.

Sellest definitsioonist järeldub muuhulgas, et ka $\mathcal{G} \in \sigma$ ning $\sigma$ on suletud ka loenduva ühisosa suhtes. $\sigma$-algebra elemente nimetatakse *sündmusteks*.

Olgu $\sigma$ mingi $\sigma$-algebra hulgal $\mathcal{G}$. Tõenäosus on mingi funktsioon $p$ hulgast $\sigma$ (s.t. $p$ argumentideks on sündmused) lõiku $[0, 1]$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- $p(\emptyset) = 0$;
- $p(\mathcal{G}\backslash\mathcal{H}) = 1 - p(\mathcal{H})$;
- kui hulgad $\mathcal{H}_i$, kus $i \in \mathbb{N}$, on omavahel paarikaupa lõikumatud, siis $p(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(\mathcal{H}_i)$.

Muuhulgas järeldub sellest definitsioonist, et kui $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$, siis $p(\mathcal{H}_1) \leq p(\mathcal{H}_2)$.

Me fikseerime nüüd ühe teatava $\sigma$-algebra, mida me edaspidi kasutame. Olgu $\mathcal{H}_{i,j}$, kus $i, j \in \mathbb{N}$ ja $i < j$, järgmine loenduvate graafide hulk:

$$\mathcal{H}_{i,j} = \{G \mid G \in \mathcal{G}, \{i, j\} \in E(G)\} \ .$$

$\sigma$ olgu $\sigma$-algebra, mille *genereerivad* hulgad $\mathcal{H}_{i,j}$. S.t. kõik hulgad $\mathcal{H}_{i,j}$ on $\sigma$ elemendid ning peale selle on $\sigma$ elementideks veel kõik need hulgad, mis tuleb talle lisada, et $\sigma$ oleks $\sigma$-algebra. Alternatiivselt võime defineerida $\sigma$ kui vähima $\sigma$-algebra, mis sisaldab hulki $\mathcal{H}_{i,j}$. See definitsioon on korrektne, kuna

- Leidub vähemalt üks $\sigma$-algebra, mis sisaldab sündmusi $\mathcal{H}_{i,j}$ — selleks on $\mathcal{G}$ kõigi osahulkade hulk.
- On kerge veenduda, et suvalise hulga $\sigma$-algebrate ühisosa on jälle $\sigma$-algebra.

Seega on $\sigma$ kõigi nende $\sigma$-algebrate ühisosa, mis sisaldavad sündmusi $\mathcal{H}_{i,j}$.

Kui me $\sigma$ niimoodi defneerime, siis sisaldab ta muuhulgas ka kõiki üheelemendilisi hulki $\{G\}$, kus $G \in \mathcal{G}$. Seega omab eelpoolkirjeldatud stohhastilise protsessi abil graafi väljavalimine mõtet — selle protsessi tulemus on sündmus. See stohhastiline protsess defineerib meile teatava tõenäosuse Prob $\sigma$-algebral $\sigma$.

Tõestus (teoreem 12.1). Vaatame omadust (12.1), mida mingi graaf $G$ võib rahuldada, aga võib ka mitte rahuldada:

> Suvaliste lõplike ühisosata tipuhulkade $U, V \subset V(G)$ jaoks leidub tipp $z \in V(G)\backslash$, mis ei kuulu hulka $U \cup V$ ning on ühendatud kõigi $U$ elementidega ja mitte ühegi $V$ elemendiga. (12.1)

Teoreem järeldub nüüd järgmisest kahest väitest:
**Väide 1.** Juhuslik loenduv graaf rahuldab omadust (12.1) tõenäosusega 1.
**Väide 2.** Kui kaks loenduvat graafi rahuldavad omadust (12.1), siis nad on isomorfsed.

*Väite 1 tõestus.* Meil tuleb näidata, et tõenäosus, et omadus (12.1) ei kehti, on null. Uurime kõigepealt, kui suur on omaduse (12.1) mittekehtimise tõenäosus, kui hulgad $U$ ja $V$ on mingil viisil fikseeritud. Tõenäosus, et mingi konkreetse tipu $z$ puhul omadus (12.1) (fikseeritud hulkadega $U$ ja $V$) ei kehtiks, on on $1 - \frac{1}{2^{|U|+|V|}}$. Kuna aga tippe on lõpmata palju, siis tõenäosus, et kõigi tippude puhul omadus (12.1) (fikseeritud hulkadega $U$ a $V$) ei kehtiks, on 0.

Erinevaid lõplike hulkade paare $(U, V)$ on loenduv arv. Seega, summeerides üle $(U, V)$ valiku eelmises lõigus saadud tõenäosused, saame ülemise tõkke omaduse (12.1) mittekehtimise tõenäosusele. See summa on 0. Seega kehtib omadus (12.1) tõenäosusega 1.

*Väite 2 tõestus.* Olgu $\Gamma$ ja $\Delta$ kaks loenduvat graafi, mis rahuldavad tingimust (12.1). Olgu $X = V(\Gamma)$ ja $Y = V(\Delta)$, me konstrueerime isomorfismi $X \xrightarrow{\theta} Y$. Me konstrueerime ta etapiviisiliselt, enne iga etapi algust on $\theta$ defineeritud hulga $X$ mingil lõplikul alamhulgal. Enne esimest etappi pole $\theta$ kuskil defineeritud.

Etapi järjekorranumbriga $n$ definitsioon sõltub sellest, kas $n$ on paaris või paaritu. Kui $n$ on paaritu, siis olgu $x_n \in X$ vähim (hulk $X$ on tegelikult naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$) selline tipp, mille korral $\theta(x_n)$ ei ole defineeritud. Olgu $U' \subset X$ kõigi selliste tippude hulk, mis on ühenduses tipuga $x_n$ ja mille jaoks $\theta$ on juba defineeritud. Olgu $V' \subset X$ kõigi selliste tippude hulk, mis ei ole ühenduses tipuga $x_n$ ja mille jaoks $\theta$ on juba defineeritud. Kuna graaf $\Delta$ rahuldab omadust (12.1), siis leidub tipp $y_n \in Y$, nii et $y_n \notin \theta(U') \cup \theta(V')$ ning $y_n$ on ühendatud kõigi hulga $\theta(U')$ elementidega ja ei ole ühendatud ühegi $\theta(V')$ elemendiga. Paneme veel tähele, et $y_n$ ei ole funktsiooni $\theta$ väärtuseks mõnel kohal, kus ta juba defineeritud on, sest $\theta$ on defineeritud ainult hulgal $U' \cup V'$. Defineerime $\theta(x_n) = y_n$.

Kui $n$ on paaritu, siis olgu $y_n \in Y$ vähim selline tipp, mis ei asu juba $\theta$ muutumispiirkonnas. Olgu $U' \subset Y$ kõigi selliste tippude hulk, mis on ühenduses tipuga $y_n$ ja mis juba asuvad $\theta$ muutumispiirkonnas. Olgu $V' \subseteq Y$ kõigi selliste tippude hulk, mis ei ole ühenduses tipuga $y_n$ ja mis juba asuvad $\theta$ muutumispiirkonnas. Kuna graaf $\Gamma$ rahuldab omadust (12.1), siis leidub tipp $x_n \in X$, nii et $x_n \notin \theta^{-1}(U') \cup \theta^{-1}(V')$ ning $x_n$ on ühendatud kõigi hulga $\theta^{-1}(U')$ elementidega ja ei ole ühendatud ühegi $\theta^{-1}(V')$ elemendiga. Samuti pole $\theta(x_n)$ veel defineeritud. Me defineerime $\theta(x_n) = y_n$.

Peale loenduvat arvu etappe oleme me defineerinud $\theta$ iga $x \in X$ jaoks ning iga $y \in Y$ kuulub $\theta$ muutumispiirkonda. Peale selle on ilmne, et $\theta$ on monomorfism. $\square$