Tasandilised graafid

5. detsember 2002

Graaf on *tasandiline* (*planaarne*), kui teda saab tasandile joonistada nii, et tema servad väljaspool tippe ei lõikuks.

Näide: K_4 on tasandiline, Q_3 on tasandliline, $K_{3,3}$ ei ole.

Eelpool antud definitsioon ei ole täpne, kuna „joonistamine“ ei ole täpne mõiste.

Järgnevas anname ühe täpse definitsiooni. Samas edaspidi kasutame ikkagi ebatäpset.

Kõver Eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^n$ on mingi funktsioon $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, kus $a, b \in \mathbb{R}$.

Kõver γ on *pidev*, kui iga $y \in \mathbb{R}$ jaoks $\lim_{x \to y} \gamma(x) = \gamma(y)$.

Kõvera γ *pikkus* on

$$\sup\{\sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\} \ .$$

Kõverat, millel on pikkus, nimetame *sirgestuvaks*.

Jordani kõver on pidev sirgestuv iseennast mittelõikav kõver. Olgu J_n kõigi Jordani kõverate hulk ruumis $\mathbb{R}^n$.

Graafi $G = (V, E)$ *joonis* ruumi $\mathbb{R}^n$ on kujutiste paar

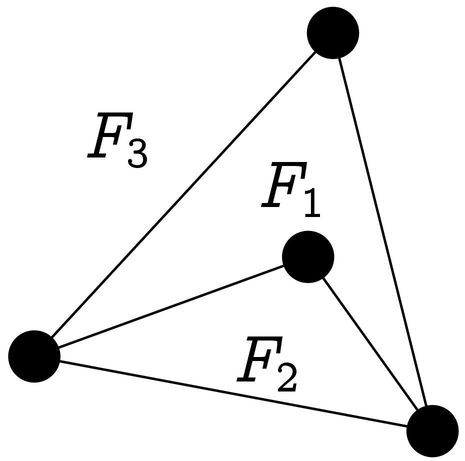
$$\iota_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\iota_E : E \longrightarrow J_n,$$

nii et

- ι_V ja ι_E on injektiivsed.
- Kui $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$, siis kõvera $\iota_E(e)$ otspunktideks on $\iota_V(u)$ ja $\iota_V(v)$.
- Kõverad $\iota_E(e_i)$ lõikavad üksteist vaid nende ühistes otspunktides.

Graaf on *tasandiline*, kui tal leidub joonis ruumis $\mathbb{R}^2$.

Graafi joonis tükeldab tasandi selle osa, mis joonise alla ei jää.



Neid tükke nimetatakse *tahkudeks*.

Tahk F_3 on *lõpmatu tahk*.

Graafi võib joonistada nii, et ükskõik milline tahk oleks lõpmatu.

$\Rightarrow$ graafi võib joonistada nii, et ükskõik milline serv oleks „välimine“.

Teoreem (Euler). Olgu G sidusa tasandiline graaf. Olgu

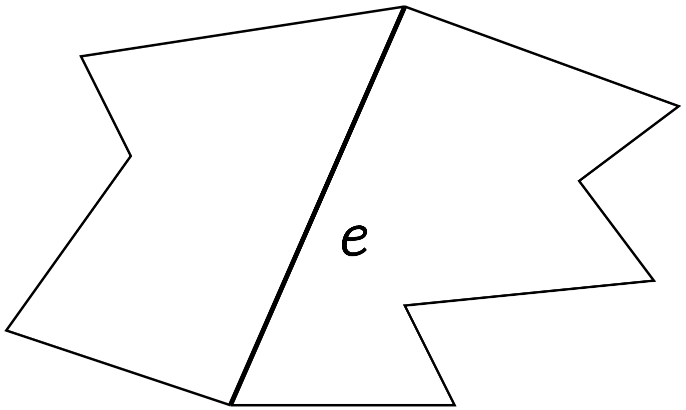
- n — graafi G tippude arv,
- m — graafi G servade arv,
- f — graafi G joonise tahkude arv.

Siis $n + f - m = 2$.

Tõestus. Induktsioon üle servade arvu.

Baas. G on puu. Siis $n = m + 1$ ja $f = 1$. Seega $n + f - m = m + 1 + 1 - m = 2$.

Samm. Olgu G graaf, millel on m serva ja mis ei ole puu. Leidub mingi serv e, mille eemaldamisel G-st jääb G sidusaks.



Graafis $G-e$ on ühe võrra vähem tahke (ja servi) kui graafis G. Vastavalt induktsiooni eeldusele $n+(f-1)-(m-1) = 2$. Siit järeldubki kohe $n + f - m = 2$. $\square$

Järeldus. Olgu G tasandilne graaf. Olgu

- n — graafi G tippude arv,
- m — graafi G servade arv,
- f — graafi G joonise tahkude arv.
- k — graafi G sidususkomponentide arv.

Siis $n + f - m = k + 1$.

Tõestus. Rakendame eelmist teoreemi graafi G igale sidususkomponendile. Seejuures loeme lõpmatut tahku ainult ühe korra. $\square$

Järeldus. Kui G on sidus tasandiline vähemalt kolme tipuga lihtgraaf, siis $m \leq 3n - 6$ (siin m — servade arv, n — tippude arv).

Tõestus. Sellise lihtgraafi joonisel on igal tahul vähemalt 3 serva (kui üks ja sama tahk asub mingi serva „mõlemal pool“, siis loeme seda serva selle tahu juures kaks korda).

Iga serv kuulub kahele tahule, seega

$$2m = \sum_{F \text{ on tahk}} \langle F\text{-i servade arv} \rangle \geq 3f \ .$$

Euleri valem annab

$$2 = n + f - m \leq n + \frac{2}{3}m - m = \frac{3n - m}{3}$$

ehk $3n - m \geq 6$. □

Järeldus. K_5 ei ole tasandiline.

Tõestus. Graafis K_5 on $n = 5$ ja $m = 10$. Kui K_5 oleks tasandiline, siis annaks eelmine järeldus $m \leq 3n - 6$ ehk $10 \leq 9$. $\square$

Järeldus. Kui G on sidus tasandiline vähemalt kolme tipuga lihtgraaf, milles pole tsükleid pikkusega 3, siis $m \leq 2n - 4$.

Tõestus. Graafi G joonisel on igal tahul vähemalt 4 serva.

Iga serv kuulub kahele tahule, seega $2m \geq 4f$. Euleri valem annab

$$2 = n + f - m \leq n + \frac{1}{2}m - m = \frac{2n - m}{2}$$

ehk $2n - m \geq 4$. $\square$

Järeldus. $K_{3,3}$ ei ole tasandiline.

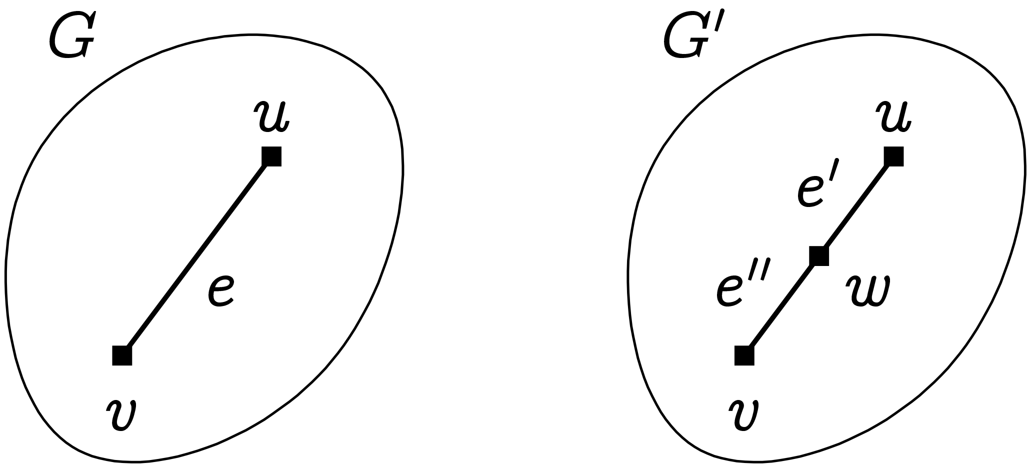
Tõestus. Graafis $K_{3,3}$ on $n = 6$ ja $m = 9$. Samuti pole $K_{3,3}$-s tsükleid pikkusega 3. Kui $K_{3,3}$ oleks tasandiline, siis annaks eelmine järeldus $m \leq 2n - 4$ ehk $9 \leq 8$. $\square$

Järeldus. Igas tasandilises lihtgraafis leidub tipp astmega ülimalt 5.

Tõestus. Olgu G vaadeldava tasandilise lihtgraafi mingi sidususkomponent. Oletame vastuväiteliselt, et G kõigi tippude astmed on ≥ 6.

Kuna iga serv on intsidentne kahe tipuga, siis $6n \leq 2m$ ehk $m \geq 3n$. Samas andis üks varasemaid järeldusi meile $m \leq 3n - 6$. Vastuolu. $\square$

Serva *poolitamise* operatsioon ($G \Longrightarrow G'$):



Serv e asendatakse tipuga w ja servadega e', e''.

Graafid G_1 ja G_2 on *homöomorfsed*, kui leidub graaf G, nii et G_1 ja G_2 on saadavad graafist G servasid poolitades.

Teoreem (Kuratowski). Graaf on tasandiline parajasti siis, kui tal ei ole alamgraafi, mis on homöomorfne K_5-ga või $K_{3,3}$-ga.

Teisisõnu, graaf G ei ole tasandiline parajasti siis, kui temas „sisaldub“ K_5 või $K_{3,3}$ järgmisel viisil:

- K_5-e või $K_{3,3}$-e tippudeks on G tipud.
- K_5-e või $K_{3,3}$-e servadeks on lihtahelad G-s.
- Need lihtahelad ei lõiku omavahel (v.a. otstippudes).

Tõestus. Vastuväiteliselt oletame, et leidub mittetasandilisi graafe, mis ei sisalda ei K_5-t ega ka $K_{3,3}$-e. Olgu G selline graaf ning olgu ta servade arv minimaalne võimalik.

G jaoks kehtivad järgmised väited:

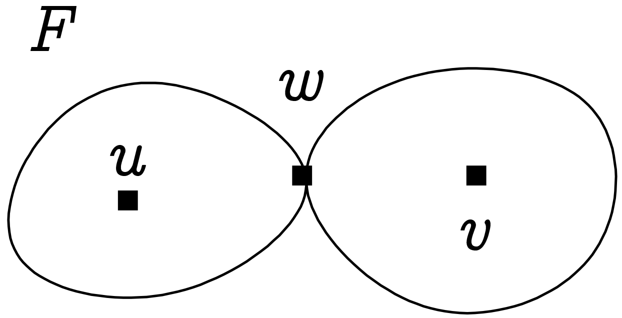
- G on lihtgraaf.
- G on sidus.
- G-s ei ole sildu.
- G-s pole *lõiketippe* — tippe v, nii et $G \backslash v$ pole sidus.

Olgu e üks graafi G servadest, olgu $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$. Olgu $F = G - \{e\}$. Siis F on tasandiline, sest ta ei sisalda K_5-t ega $K_{3,3}$-e.

Väide 1. Graafis F leidub tsükkel, mis läbib tippe u ja v.

Teisisõnu, F-s leidub kaks lihtahelat u-st v-sse, mis teineteist ei lõika.

Väide 1'. Graafis F ei leidu tippu w, nii et F on kujul



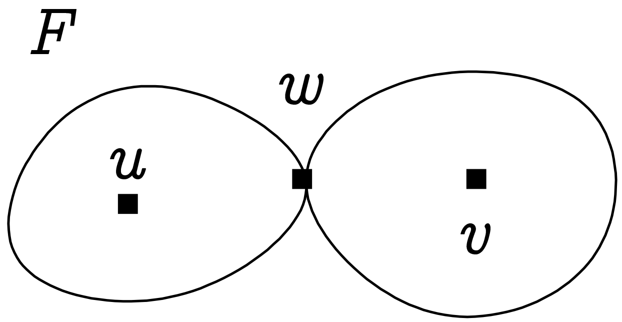
s.t. graafis $F \backslash w$ on u ja v erinevates sidususkomponentides.

Ford-Fulkersoni teoreemist järeldub **Väide 1**$\Longleftrightarrow$**Väide 1'**.

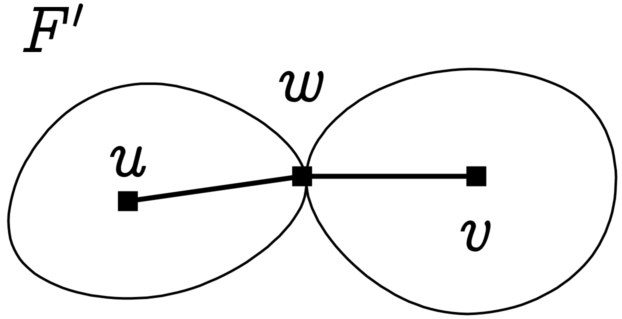
$\Rightarrow$ on ilmne, $\Leftarrow$ jääb koduseks ülesandeks (Mengeri teoreem).

Tõestame väidet 1'.

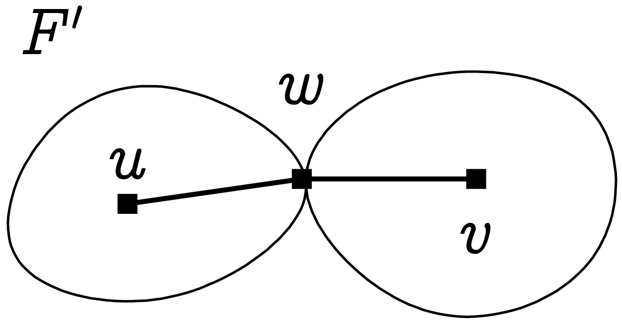
Vastuväiteliselt oletame, et F on kujul

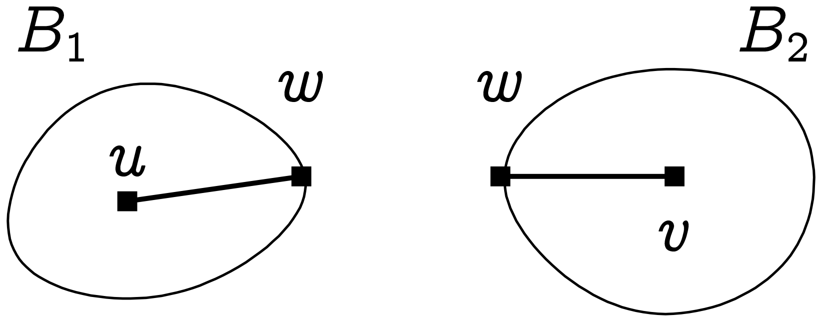


Olgu F' saadud F-st kahe serva lisamise teel:



Olgu B_1 ja B_2 järgmised graafid:





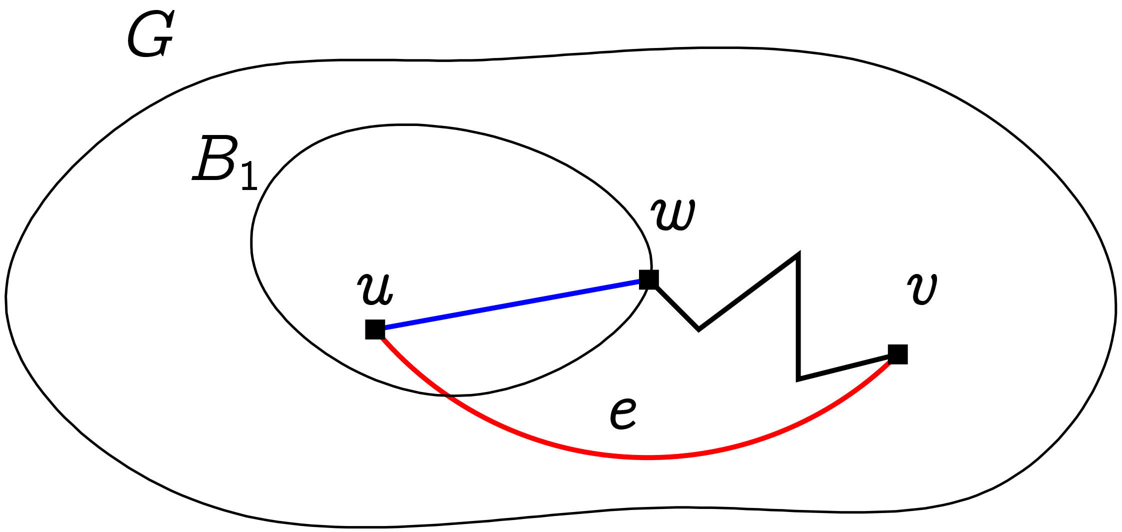
Graafides B_1 ja B_2 on vähem servi kui G-s, seega rahuldavad nad teoreemi väidet.

On kaks võimalust:

1. võimalus. B_1 (või B_2) sisaldab K_5-t või $K_{3,3}$-e.

See sisaldumine peab kasutama uut serva u ja w vahel.

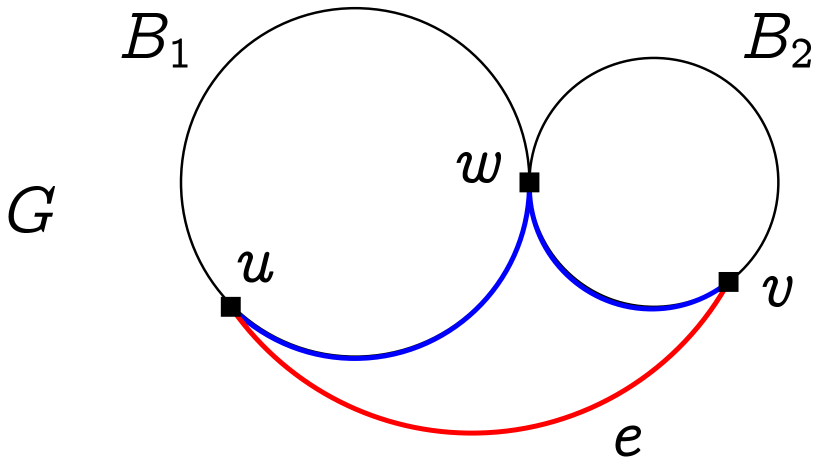
Ka G sisaldab siis K_5-t või $K_{3,3}$-e:



Uue serva saab asendada lihtahelaga, mis on väljaspool B_1-e.

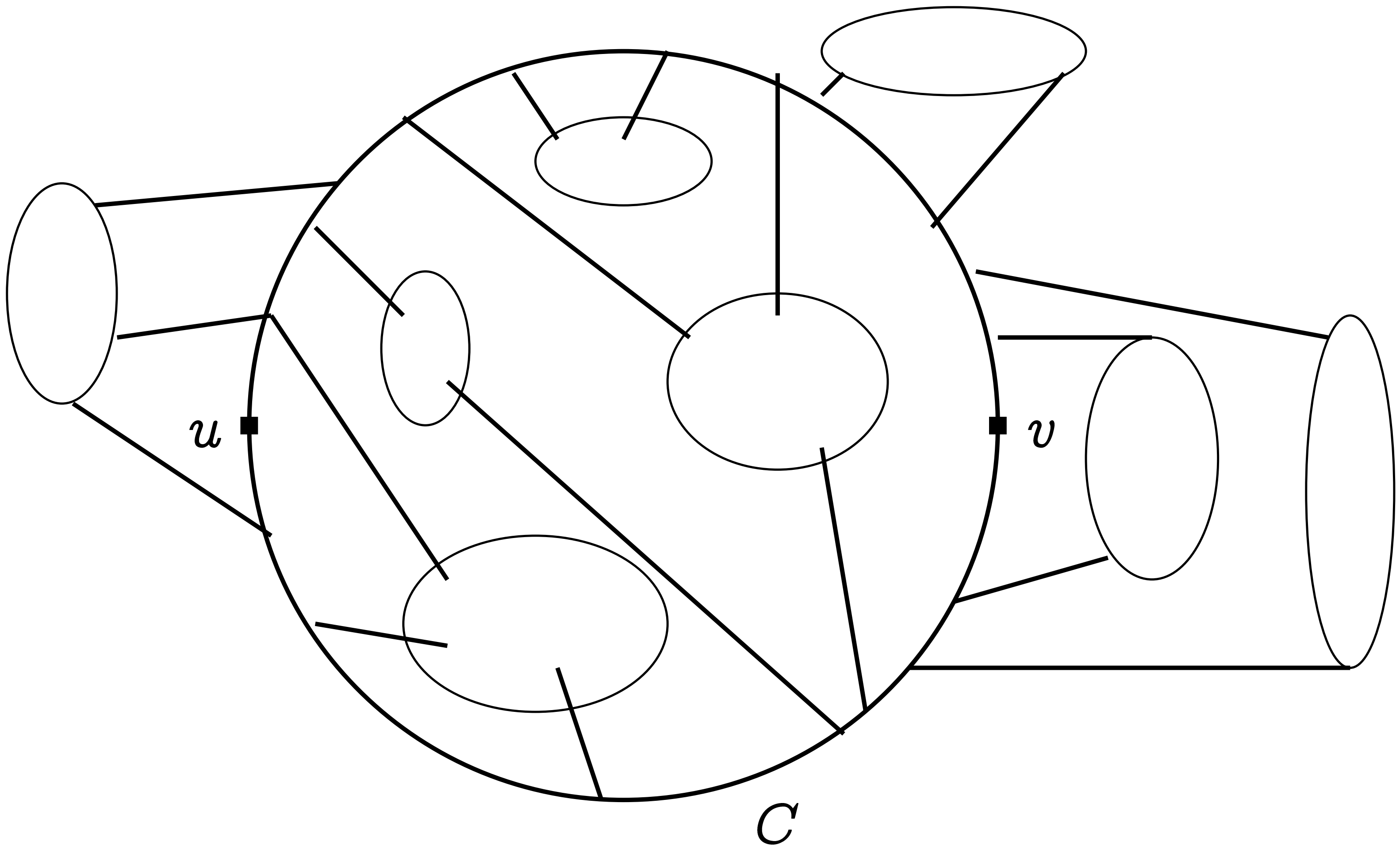
2. võimalus. B_1 ja B_2 on tasandilised.

Ka G on siis tasandiline: joonistame B_1 ja B_2 nii, et uued servad oleksid välispinnal:



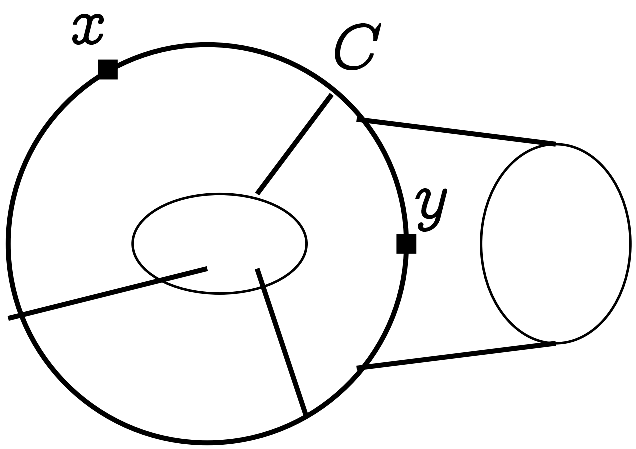
Väide 1' on tõestatud.

Olgu F joonistatud tasandile ja olgu C tsükkel, millel on tipud u ja v. Olgu F joonistatud ja C valitud niimoodi, et C sisse jääb nii palju tahke kui võimalik.

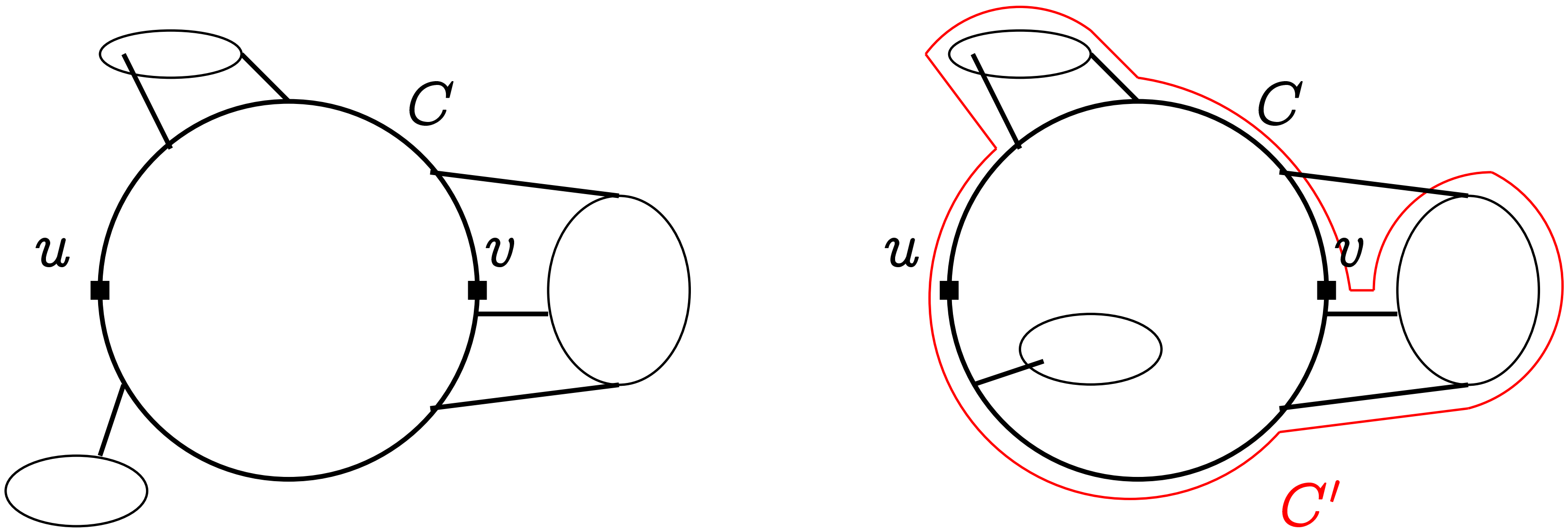


Lisaks tsüklile C on graafis F veel *komponente*. Osad neist on *sisemised*, osad *välimised*.

Olgu x ja y tipud tsüklil C. Ütleme, et mingi sisemine/välimine komponent *eraldab* x-i ja y-i, kui ta takistab joone vedamist x-i ja y-i vahel seespool/väljaspool tsüklit C.

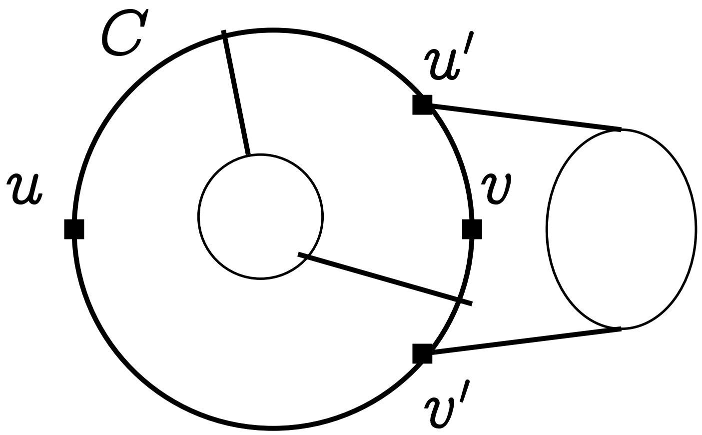


Kõik välimised komponendid eraldavad u ja v ning on C-ga ühendatud täpselt kahe servaga:

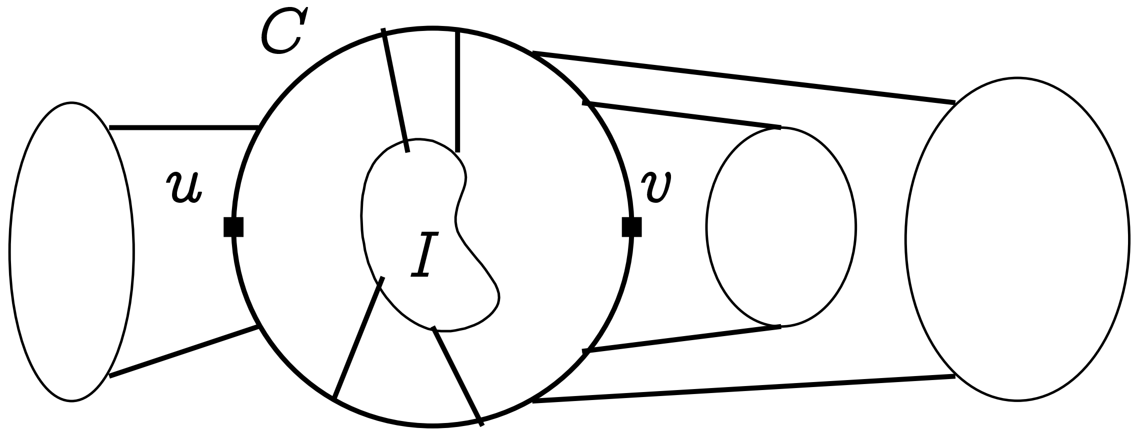


Muidu leiduks joonistamisviis / tsükkel, mille sisse jääb rohkem tahkusid.

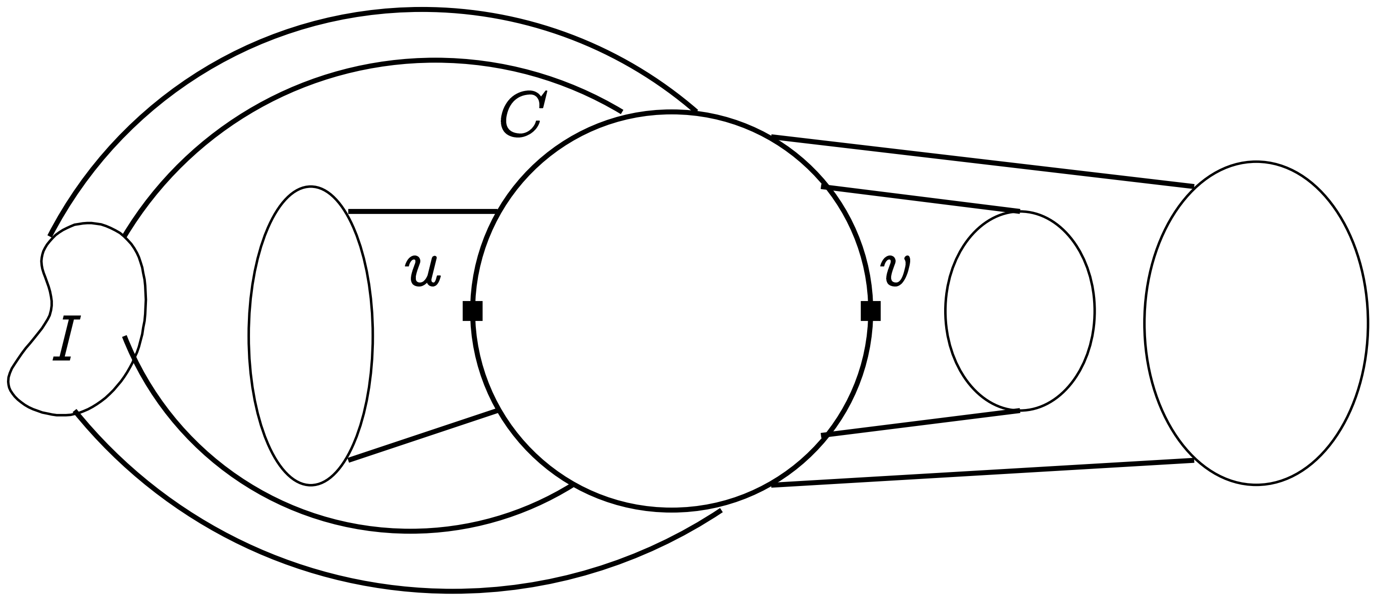
Väide 2. Leiduvad sisemine komponent ning välimine komponent (mis olgu C-ga ühendatud tippudest u' ja v'), nii et see sisemine komponent eraldab nii u ja v kui ka u'-i ja v'-i:



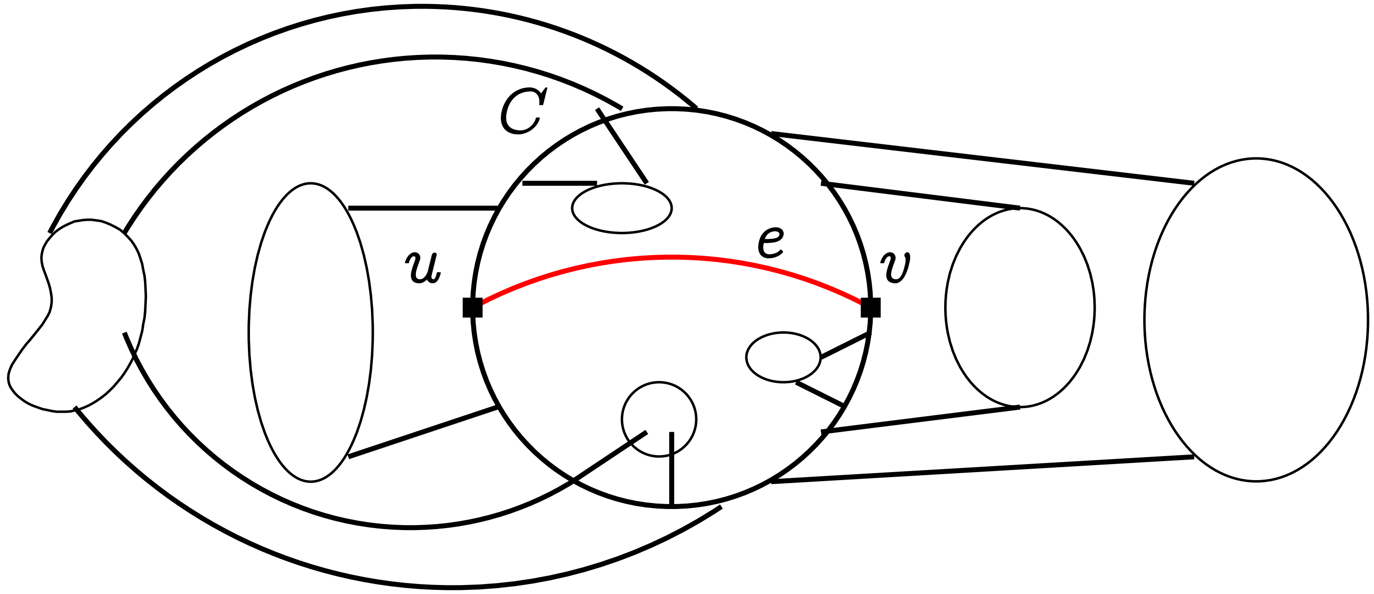
Väite tõestus: Olgu I mingi u-d ja v-d eraldav sisemine komponent, mis ei eralda ühegi välimise komponendi puutepunkte C-ga:



Me saame I välja tõsta:

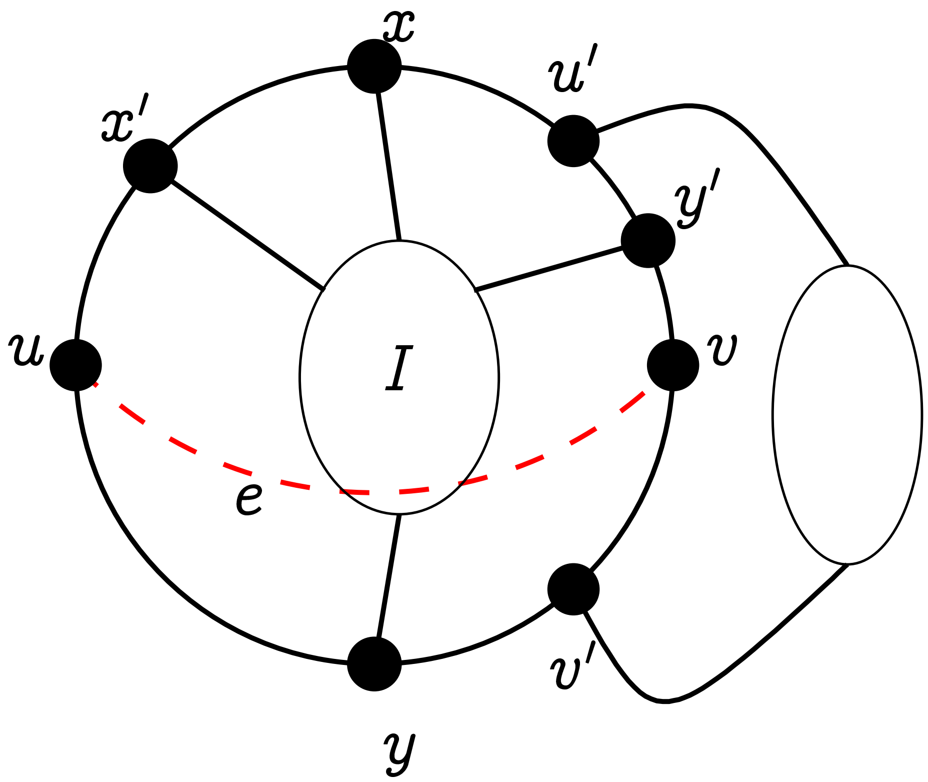


Kui väide 2 ei kehtiks, siis saaksime kõik sisemised u-d ja v-d eraldavad komponendid välja tõsta. Seejärel saame tagasi panna serva e. Seega oleks graaf G tasandiline. Järelikult väide 2 kehtib.



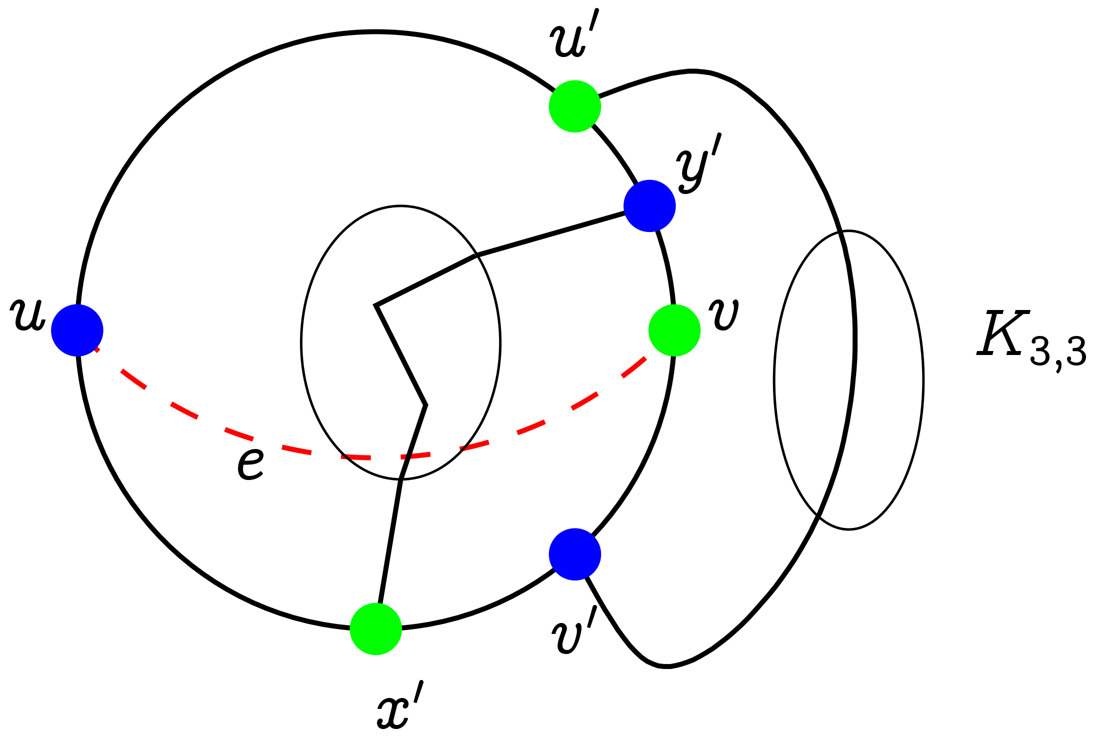
Olgu x, y tipud, tänu millele I eraldab u ja v.

Olgu x', y' tipud, tänu millele I eraldab u' ja v'.



Need võivad paikneda mitmel viisil. Vaatame kõik viisid läbi ja leiame G-st kas K_5 või $K_{3,3}$.

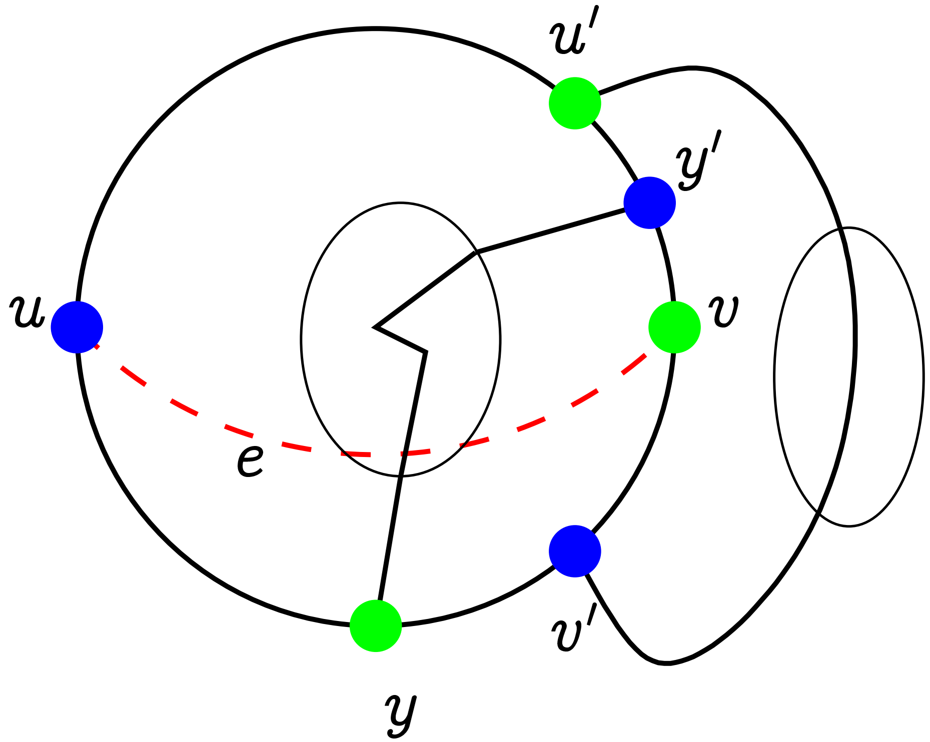
1. viis. x', y' on erinevad u-st ja v-st ning I eraldab u ja v ka tänu x', y'-le.



2. viis. x', y' on erinevad u-st ja v-st ning I ei eralda u-d ja v-d tänu x', y'-le.

Võime eeldada, et x', y' on samal pool, kui x.

1. variant. y on u ja v' vahel.

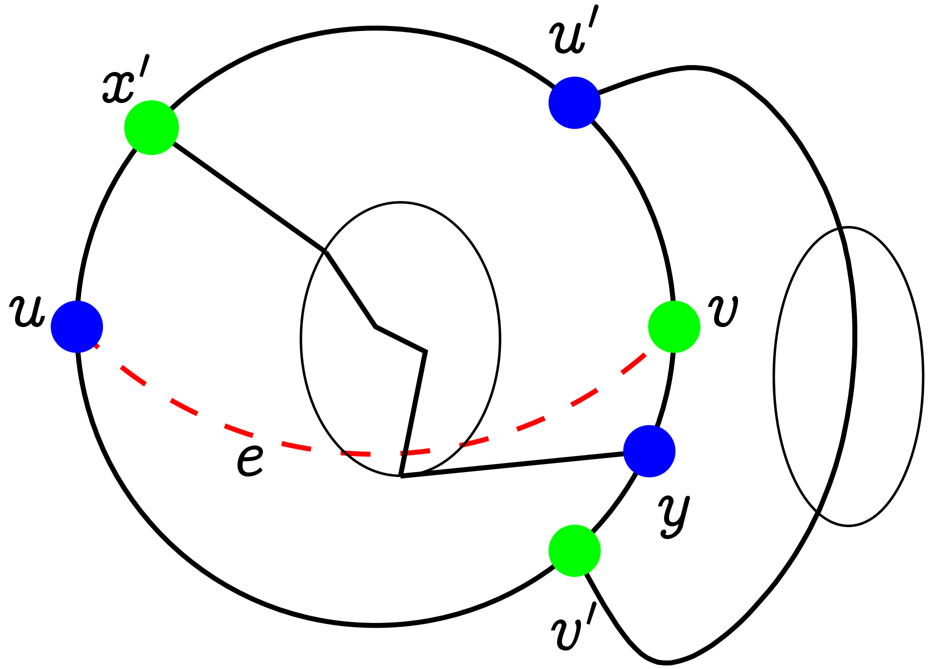


$K_{3,3}$

2. viis. x', y' on erinevad u-st ja v-st ning I ei eralda u-d ja v-d tänu x', y'-le.

Võime eeldada, et x', y' on samal pool, kui x.

2. variant. y on v' ja v vahel.

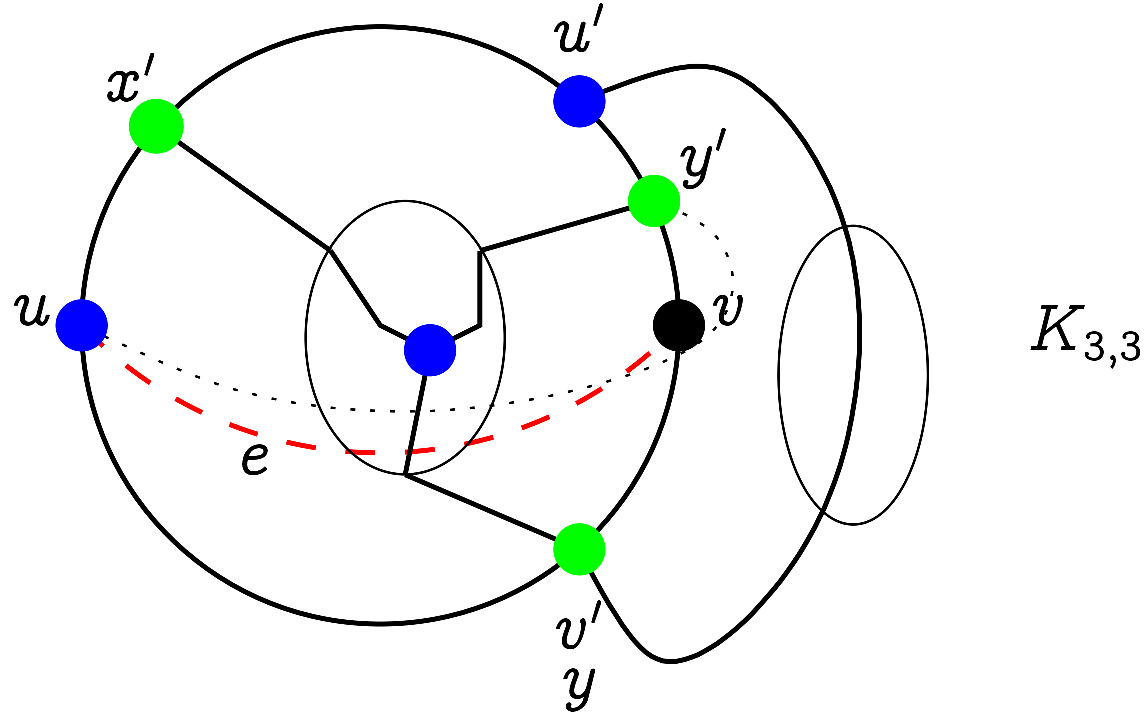


$K_{3,3}$

2. viis. x', y' on erinevad u-st ja v-st ning I ei eralda u-d ja v-d tänu x', y'-le.

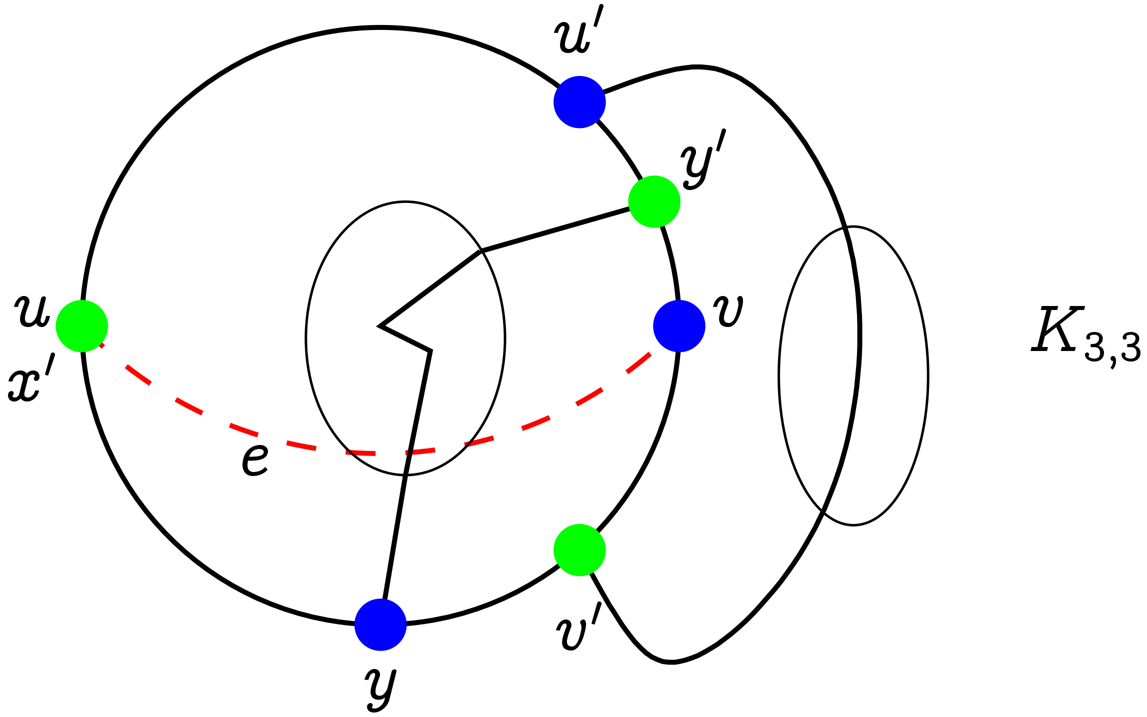
Võime eeldada, et x', y' on samal pool, kui x.

3. variant. $y = v'$.



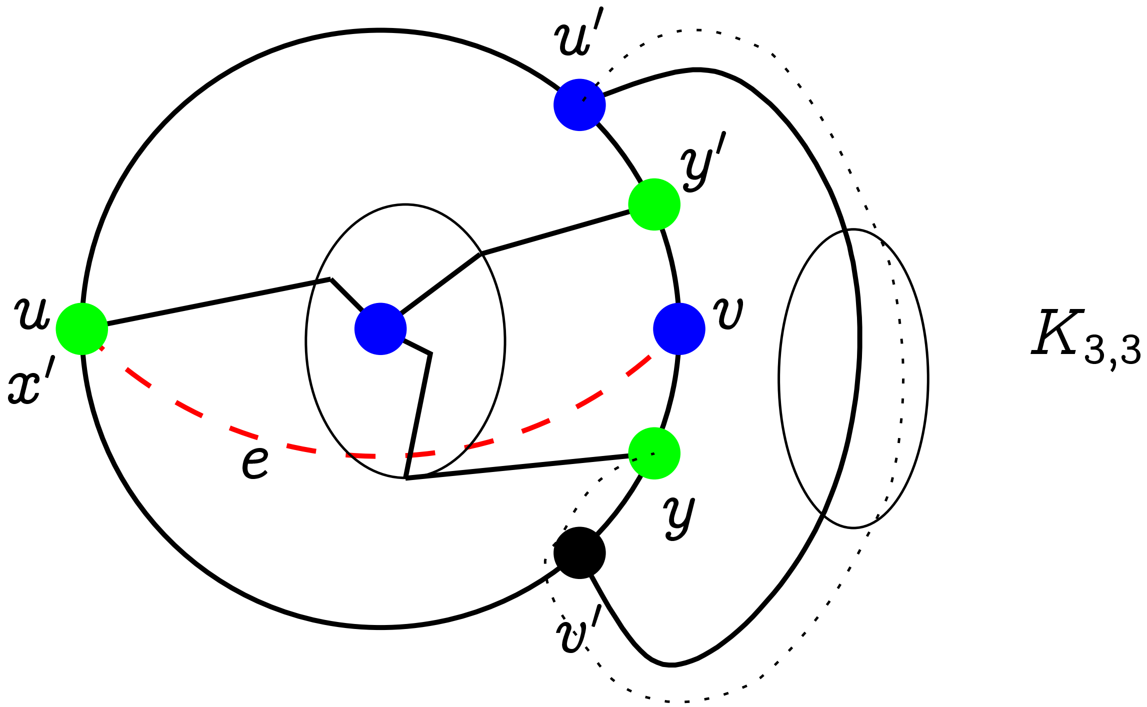
3. viis. $x' = u$ ja $y' \neq v$. Loeme, et y' on u' ja v vahel.

1. variant. y on u ja v' vahel.

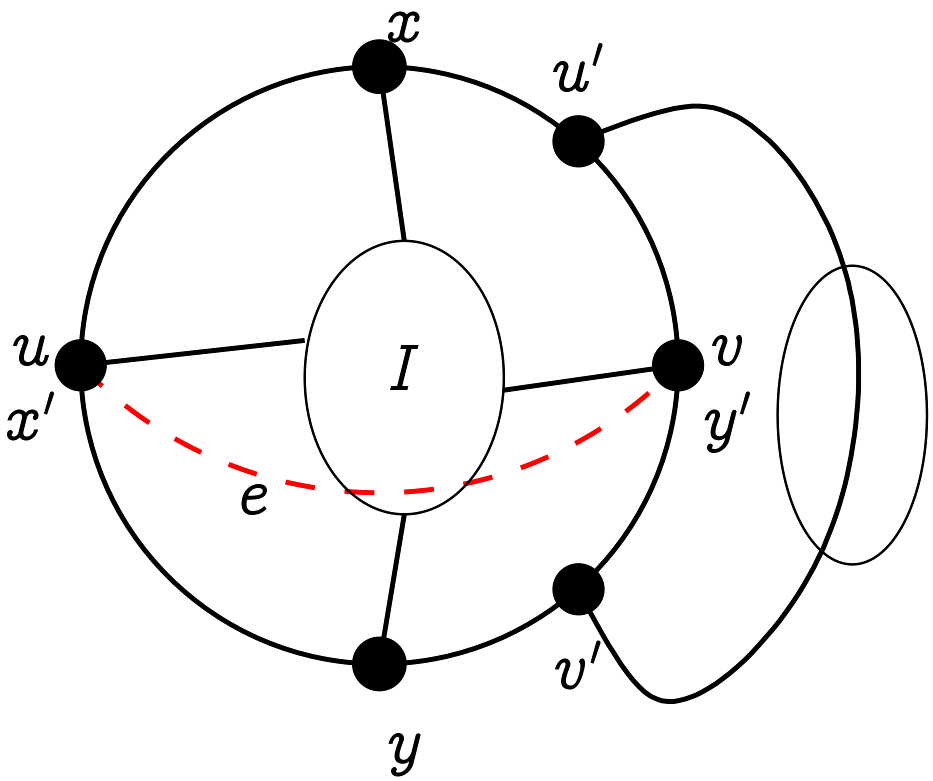


3. viis. $x' = u$ ja $y' \neq v$. Loeme, et y' on u' ja v vahel.

2. variant. y on v' ja v vahel või $y = v'$.



4. viis. $x' = u$ ja $y' = v$.

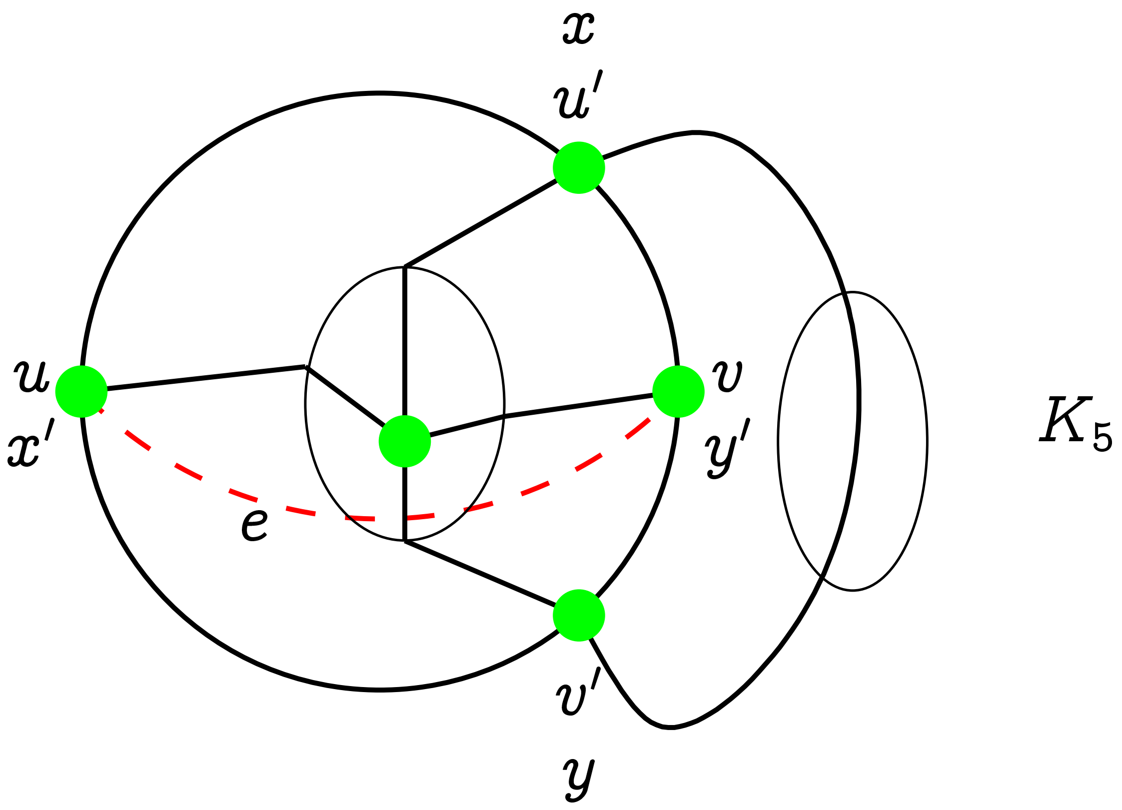


Kui x ja y ei ole u' ja v', siis vahetame tähistused ($u \leftrightarrow u'$, $v \leftrightarrow v'$, $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, $e \leftrightarrow$ tee väljaspool tsüklit C). Siis realiseerub üks vaadatud kolmest viisist.

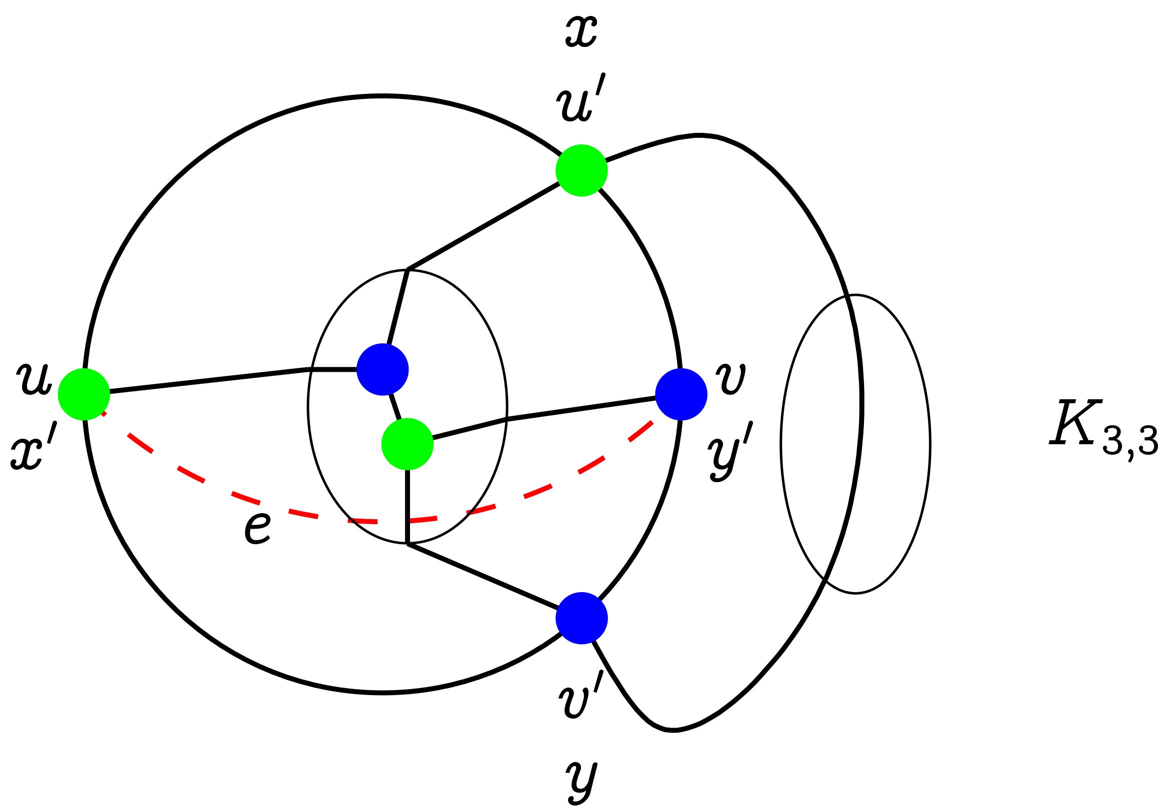
Võime eeldada, et $x' = u$, $y' = v$, $x = u'$, $y = v'$.

Sisemise komponendi tipud, mille naabriteks on u, v, u', v', on selle komponendi sees kuidagi ühendatud.

Ühenduse esimene võimalik kuju:

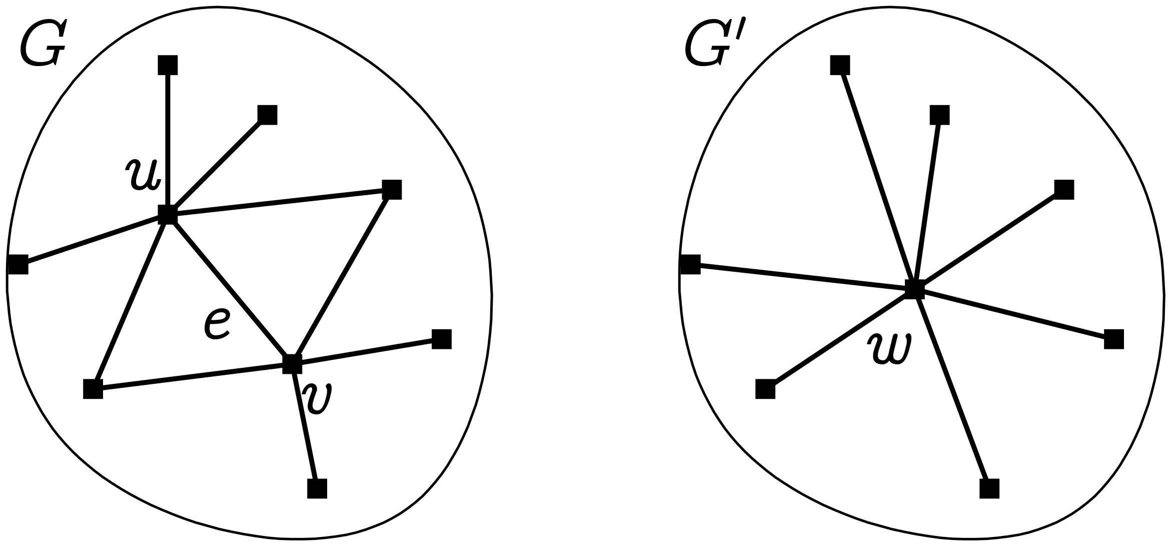


Ühenduse teine võimalik kuju:



Teoreem on tõestatud. $\square$

Serva *kokkutõmbamise* operatsioon ($G \Longrightarrow G'$):



Serva kokkutõmbamisel jääb tasandiline graaf tasandiliseks.

Teoreem (Wagner). Graaf on tasandiline parajasti siis, kui tal pole alamgraafi, mis on servi kokku tõmmates muudetav graafiks K_5 või $K_{3,3}$.

Tõestus: kodune ülesanne (kasuta Kuratowski teoreemi).