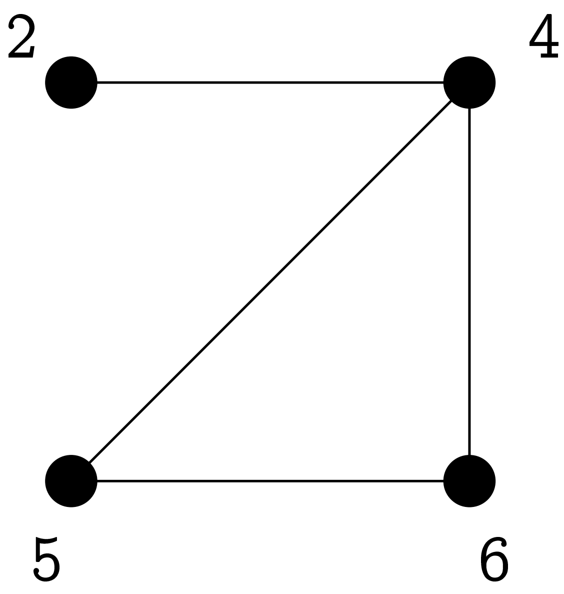
Prüferi koodid
Märgendatud puude loendamine

3. oktoober 2002

Olgu $M \subseteq \mathbb{N}$ lõplik hulk. *Märgendatud graaf* märgendite hulgaga M on kolmik $G_M = (V, E, \mu)$, kus

- $G = (V, E)$ on graaf;
- $\mu : V \longrightarrow M$ on bijektiivne kujutus.

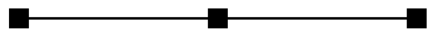


Märgendatud graaf märgendite hulgaga $\{2, 4, 5, 6\}$.

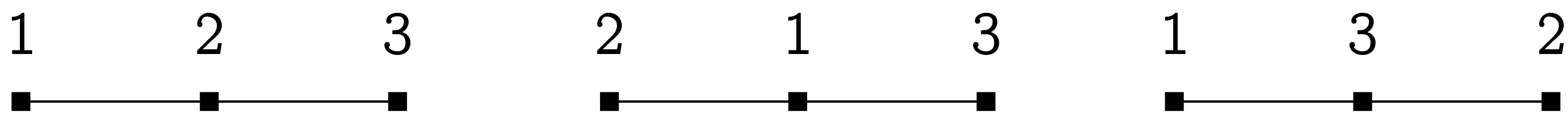
Märgendatud graafid $G_M^1 = (V_1, E_1, \mu_1)$ ja $G_M^2 = (V_2, E_2, \mu_2)$ on *isomorfsed*, kui leidub kujutus $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$, nii et

- φ on graafide (V_1, E_1) ja (V_2, E_2) isomorfism;
- iga $v \in V_1$ jaoks kehtib $\mu_1(v) = \mu_2(\varphi(v))$.

Mitteisomorfsed kolmetipulised puud:



Mitteisomorfsed kolmetipulised märgendatud puud (märgenditega $\{1, 2, 3\}$):



Kui palju on neljatipulisi puid ja märgendatud puid (märgenditega $\{1, 2, 3, 4\}$)?

Tänases loengus näitame, et mitteisomorfseid n-tipulisi (kus $n \geq 2$) märgendatud puid (fikseeritud märgendite hulgaga) on n^{n-2} tükki (Cayley teoreem).

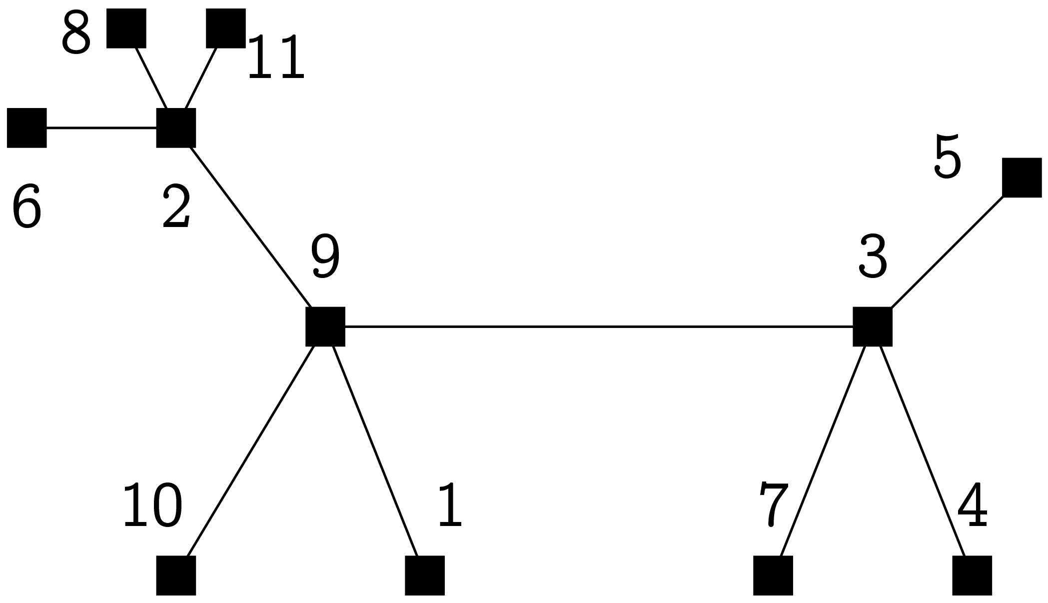
$$\boxed{\text{n-tipulised märgendatud puud märgenditega hulgast M}} \cong \boxed{\begin{array}{c} M^{n-2} \\ \text{(järjendid pikkusega $n-2$ hulga M elementidest)} \end{array}}$$

- Defineerime teatava funktsiooni (*Prüferi koodi* leidmise) esimesest hulgast teise.
- Näitame, et ta on üksühene ja peale.

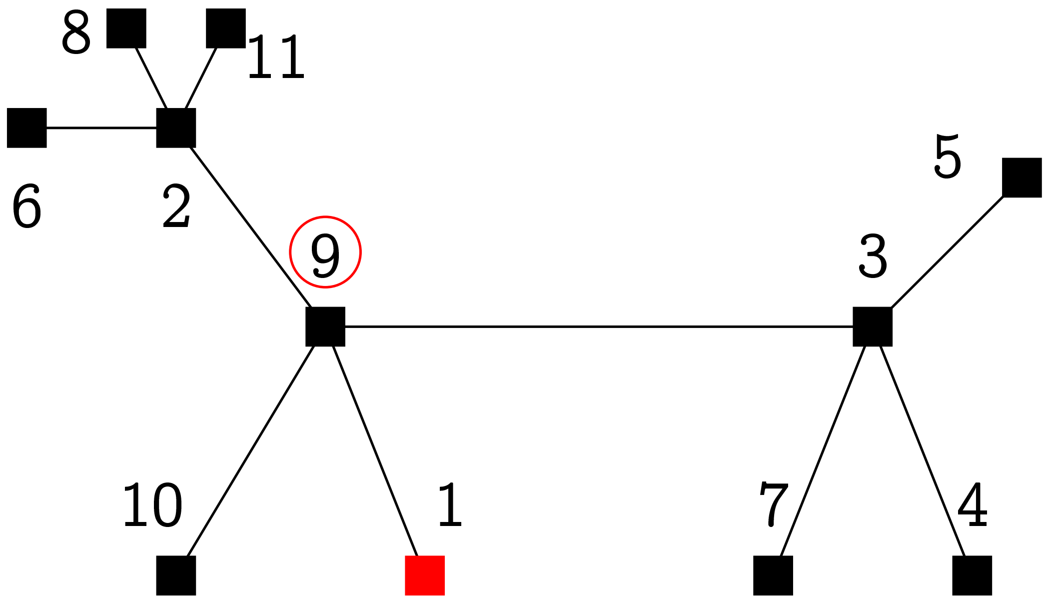
Olgu $T = (V, E, \mu)$ märgendatud puu märgendite hulgaga M. Tema *Prüferi kood* $\wp(T)$ on defineeritud järgmiselt:

- Kui $|V| = 2$, siis $\wp(T) = [\,]$ (tühi järjend).
- Muidu
  - Olgu $v \in V$ vähima märgendiga leht. Olgu w tema naabertipp.
  - Olgu $T' = (V\backslash\{v\}, E\backslash\{(v,w)\}, \mu|_{V\backslash\{v\}})$ märgendatud puu märgendite hulgaga $M\backslash\{\mu(v)\}$.

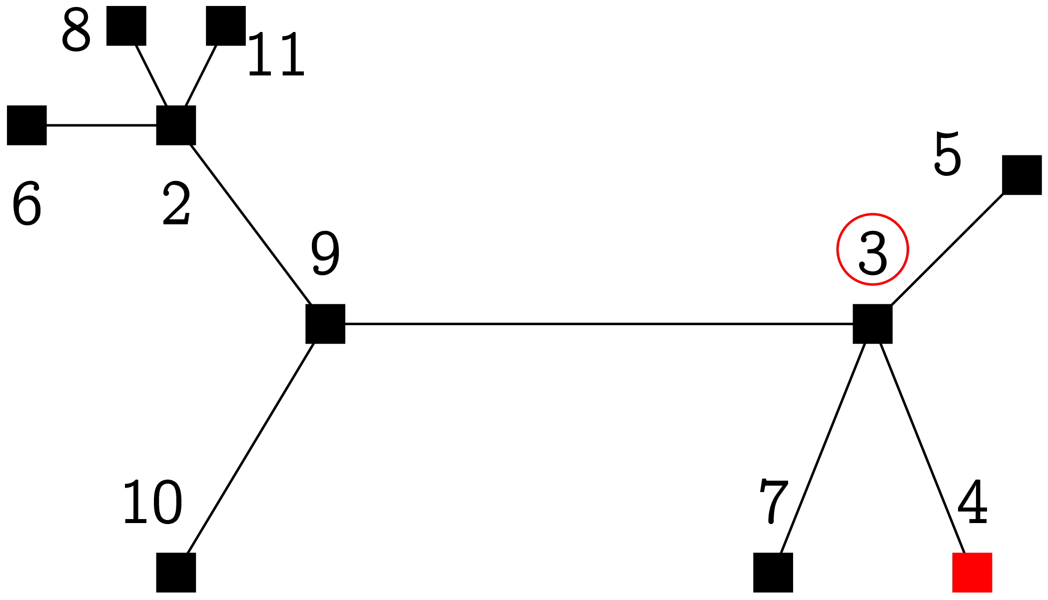
  Defineerime $\wp(T) = \mu(w) \cdot \wp(T')$.



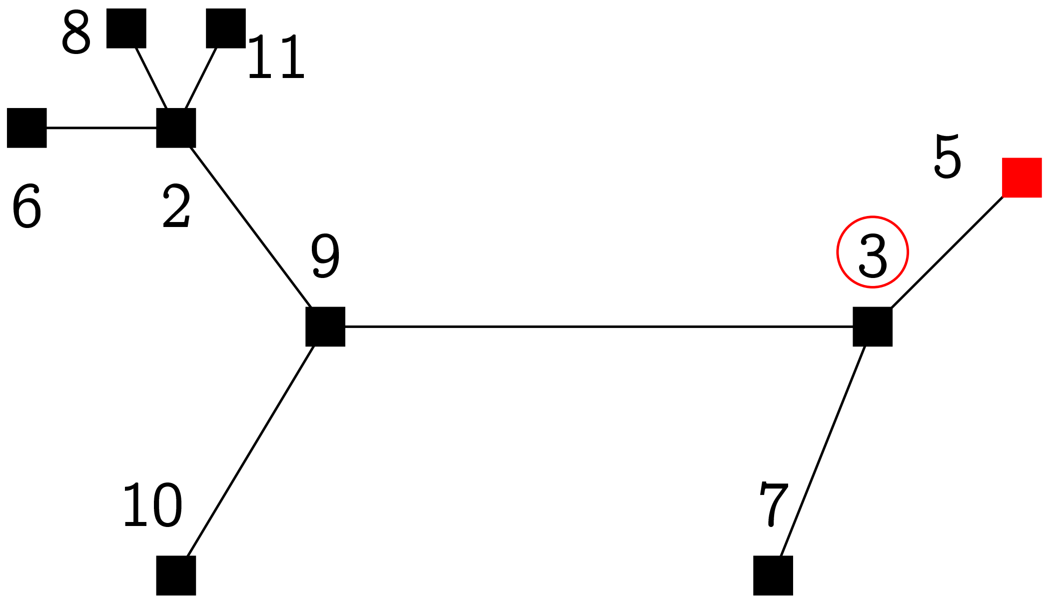
Kood:



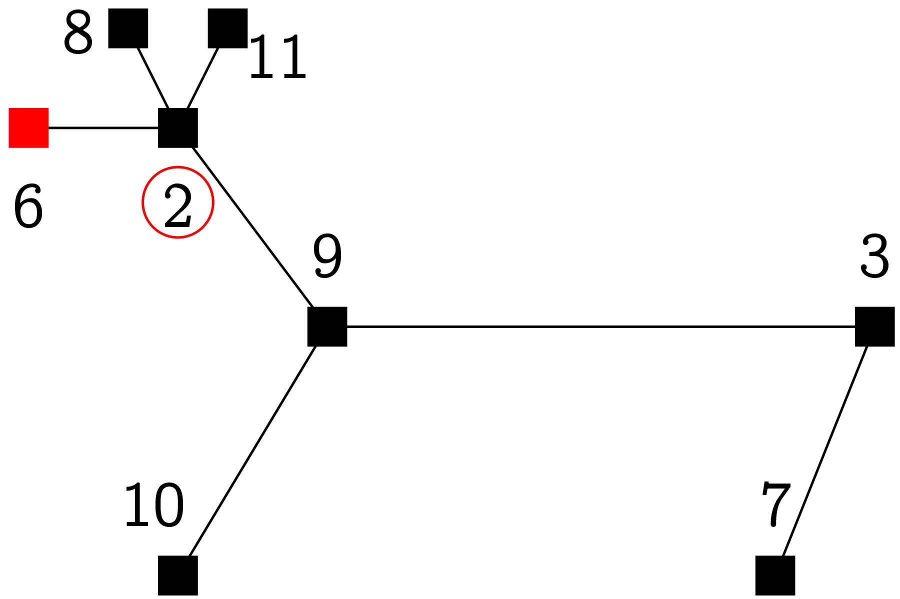
Kood:



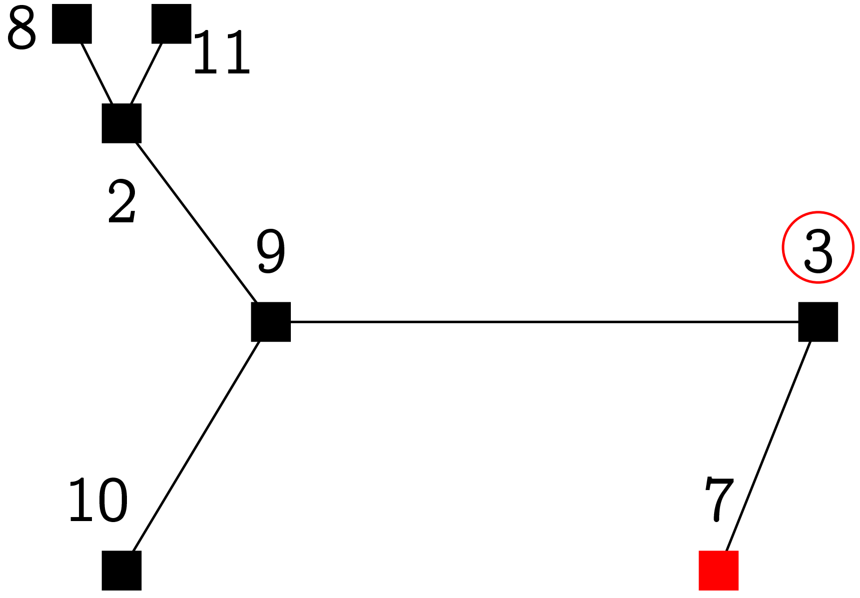
Kood: 9



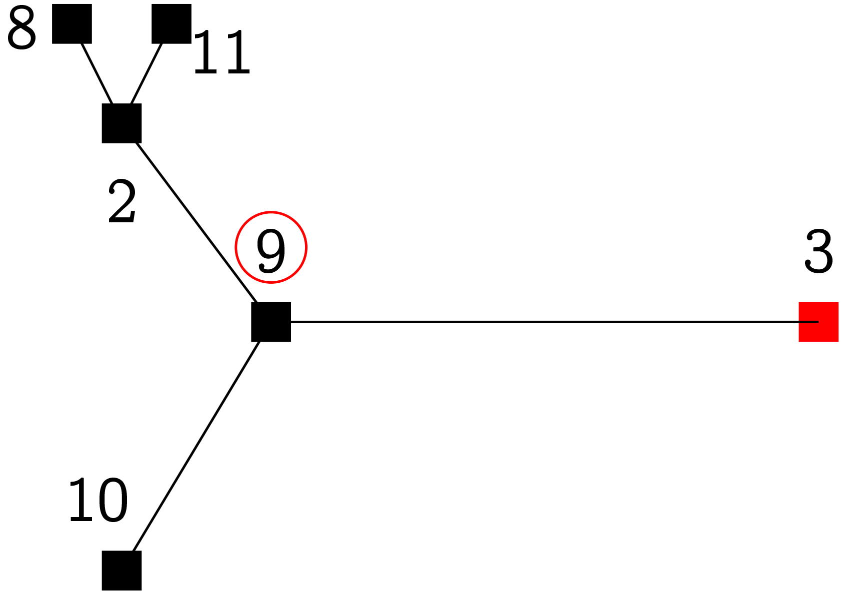
Kood: 93



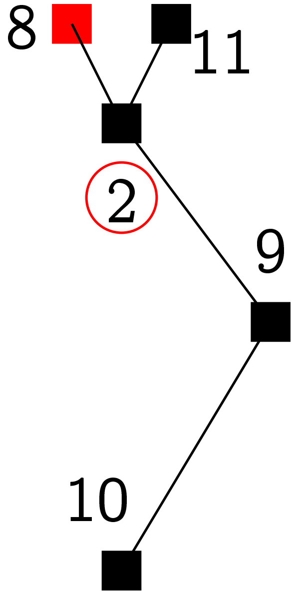
Kood: 933



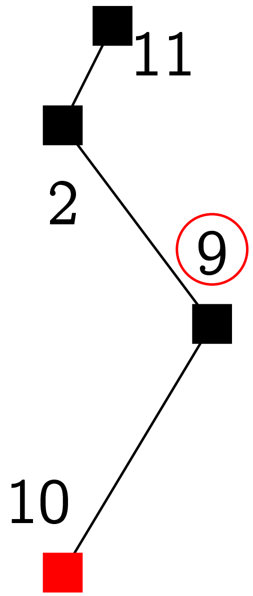
Kood: 9332



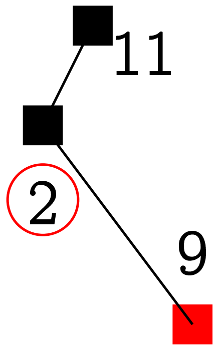
Kood: 93323



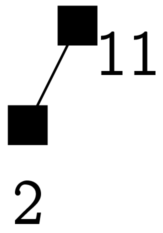
Kood: 933239



Kood: 9332392



Kood: 93323929



Kood: 933239292

Lemma. Märgendatud puu $T = (V, E, \mu)$ tipu $v \in V$ märgend $\mu(v)$ esineb koodis $\wp(T)$ täpselt $\deg(v) - 1$ korda.

Tõestus. Induktsioon üle tippude arvu.

Baas. $|V| = 2$. Siis on kummagi tipu aste 1 ning kummagi tipu märgend esineb koodis $\wp(T)$ null korda.

Samm. $|V| = n$. Olgu $\wp(T) = [m_1 m_2 \ldots m_{n-2}]$. Olgu $u \in V$ vähima märgendiga leht puus T. Olgu w tema naabertipp. Olgu T' saadud puust T, eemaldades sealt tipu u (tähistame $T' = T - u$).

T' on $(n-1)$-tipuline märgendatud puu märgendite hulgaga $M \backslash \{\mu(u)\}$. Tema Prüferi kood on $[m_2 \ldots m_{n-2}]$. Induktsiooni eelduse järgi esineb suvalise tipu $v \in V \backslash \{u\}$ märgend selles koodis $\deg_{T'}(v) - 1$ korda.

Olgu $v \in V$. Vaatame kolme varianti:

- $v = u$. Siis $\deg_T(v) = 1$. Märgend $\mu(u)$ ei esine koodis $\wp(T')$ ning $m_1 = \mu(w)$. Seega ei esine $\mu(u)$ koodis $\wp(T)$.

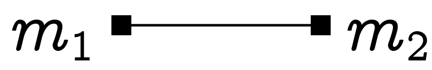
- $v = w$. Siis $\deg_T(v) = \deg_{T'}(v) + 1$. Märgend $\mu(w)$ esineb koodis $\wp(T)$ üks kord rohkem kui koodis $\wp(T')$, sest $m_1 = \mu(w)$.

- v on mingi muu tipp. Siis $\deg_T(v) = \deg_{T'}(v)$. Ka v märgendi esinemiste arv koodides $\wp(T)$ ja $\wp(T')$ on sama. $\square$

Teoreem. Olgu $T_1 = (V_1, E_1, \mu_1)$ ja $T_2 = (V_2, E_2, \mu_2)$ märgendatud puud märgendite hulgaga M. Kui $\wp(T_1) = \wp(T_2)$, siis $T_1 \cong T_2$.

Tõestus. Induktsioon üle tippude arvu.

Baas. $|V| = 2$. Leidub ainult üks kahetipuline märgendatud puu märgendite hulgaga $M = \{m_1, m_2\}$:



Samm. $|V| = n$. Olgu $\wp(T_1) = \wp(T_2) = [m_1 m_2 \ldots m_{n-2}]$.

$\wp(T)$-st saab leida puu T lehtede märgendid — need on need märgendid, mis $\wp(T)$-s ei esine ($\Leftarrow$ eelmine lemma).

Seega on puude T_1 ja T_2 lehtede märgendite hulgad võrdsed.

Olgu $m \in M$ vähim lehe märgend. Olgu $v_1 \in V_1$ ja $v_2 \in V_2$ sellised, et $\mu_1(v_1) = \mu_2(v_2) = m$.

Olgu $T_1' = T_1 - v_1$ ja $T_2' = T_2 - v_2$. Vastavalt Prüferi koodi konstruktsioonile $\wp(T_1') = \wp(T_2') = [m_2 \dots m_{n-2}]$.

Induktsiooni eelduse järgi $T_1' \cong T_2'$. Olgu $\varphi : V_1 \backslash \{v_1\} \longrightarrow V_2 \backslash \{v_2\}$ nendevaheline isomorfism.

Näitame, et kui me täiendavalt defineerime $\varphi(v_1) = v_2$, siis on φ märgendatud puude T_1 ja T_2 vaheline isomorfism.

φ jätab märgendid paika: $\mu_1(v_1) = \mu_2(v_2)$. Meil tuleb veel näidata, et φ on puude T_1 ja T_2 vaheline isomorfism.

Olgu $u, u' \in V_1$. Näitame, et u ja u' on naabrid parajasti siis, kui $\varphi(u)$ ja $\varphi(u')$ on naabrid.

Kui $u \neq v_1$ ja $u' \neq v_1$, siis järeldub see sellest, et φ oli T_1' ja T_2' vaheline isomorfism.

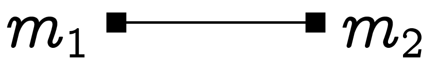
Olgu $u = v_1$. Tipud v_1 ja v_2 on lehed. Olgu $w_1 \in V_1$ ja $w_2 \in V_2$ tippude v_1 ja v_2 ainsad naabrid.

Vastavalt Prüferi koodi konstruktsioonile $\mu_1(w_1) = \mu_2(w_2) = m_1$. Kuna φ on märgendatud puude T_1' ja T_2' vaheline isomorfism, siis $\varphi(w_1) = w_2$.

Seega on u' tipu $u = v_1$ naabertipp parajasti siis, kui $\varphi(u')$ on tipu $\varphi(u) = v_2$ naabertipp. $\square$

Teoreem. Olgu $M \subset \mathbb{N}$, nii et $n = |M| \geq 2$. Olgu $\mathcal{M} = [m_1 m_2 \ldots m_{n-2}]$, kus $m_1, \ldots, m_{n-2} \in M$. Siis leidub n-tipuline märgendatud puu $T = (V, E, \mu)$ märgendite hulgaga M, nii et $\wp(T) = \mathcal{M}$.

Tõestus. Induktsioon üle n.

Baas. $n = 2$. Siis $\mathcal{M} = [\,]$. Kui $M = \{m_1, m_2\}$, siis võtame T-ks puu 

Samm. Olgu $m \in M$ vähim selline element, mis ei esine järjendis $\mathcal{M}$. Olgu $M' = M \backslash \{m\}$ ja $\mathcal{M}' = [m_2 \ldots m_{n-2}]$.

Vastavalt induktsiooni eeldusele leidub märgendatud puu $T' = (V', E', \mu')$ märgendite hulgaga M', nii et $\wp(T') = \mathcal{M}'$.

Olgu $w \in V'$ selline, et $\mu'(w) = m_1$. Olgu

$$\begin{aligned} V &= V' \uplus \{v\} \\ E &= E' \cup \{(v, w)\} \\ \mu &= \mu'[v \mapsto m] \end{aligned}$$

ja olgu $T = (V, E, \mu)$. Siis T on märgendatud puu märgendite hulgaga M.

Leiame $\wp(T)$. Meil on tarvis leida vähima märgendiga leht puus T. Puu T lehtede märgendid on täpselt need M-i elemendid, mis ei kuulu $\mathcal{M}$-i. Vastavalt m-i definitsioonile on m vähim nende seas. Seega on vastavalt μ definitsioonile v vähima märgendiga leht puus T.

Tipu v naabriks puus T on w, mille märgend on vastavalt tema definitsioonile m_1.

Eemaldades puust T tipu v saame puu T' märgenditega hulgast M'.

Seega $\wp(T) = \mu(w) \cdot \wp(T') = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}] = \mathcal{M}$. $\square$

Teoreemi tõestus oli konstruktiivne, andes meile ka algoritmi märgendatud puu leidmiseks tema Prüferi koodi järgi. Olgu antud $\mathcal{M} = [m_1 m_2 \ldots m_{n-2}]$.

1. Iga $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ jaoks leiame järjendile $[m_i \ldots m_{n-2}]$ vastava vähima märgendiga lehe märgendi. Olgu l_i hulga $M \setminus \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}$ vähim element, mis erineb elementidest $m_i, \ldots, m_{n-2}$.
2. Loome kahetipulise märgendatud puu märgenditega hulgast $M \setminus \{l_1, \ldots, l_{n-2}\}$.
3. Iga $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ jaoks (kahanevalt):
   - Lisame puule uue tipu, märgendame ta l_i-ga.
   - Ühendame selle tipu tipuga, mis on märgendatud m_i-ga.

Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4

Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1							

Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2						

Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3					

Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6				

Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8			

Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

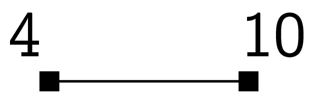
Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5		

Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	7	

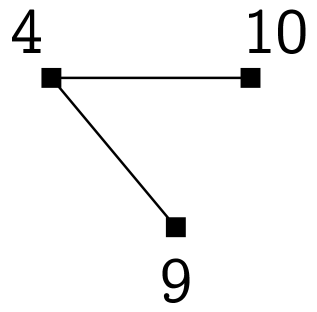
Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	7	9



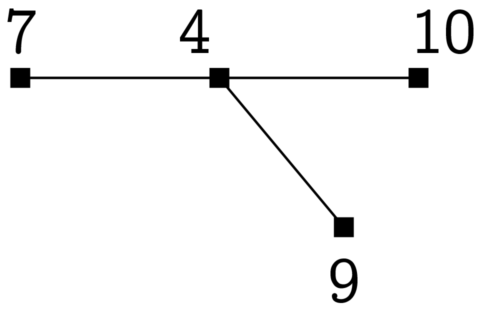
Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	7	9



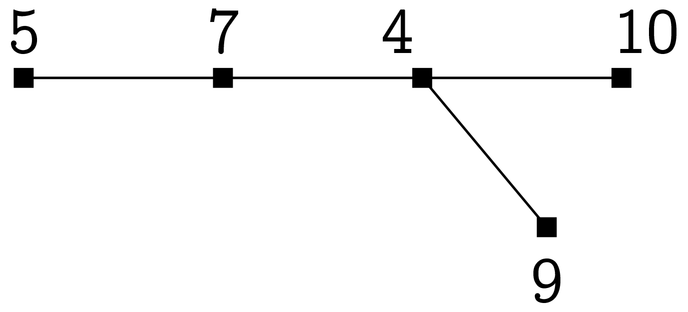
Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	$\boxed{4}$	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	$\boxed{7}$	9



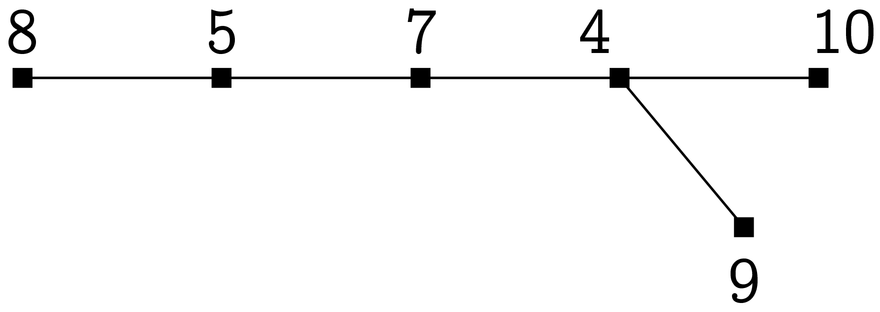
Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	7	9



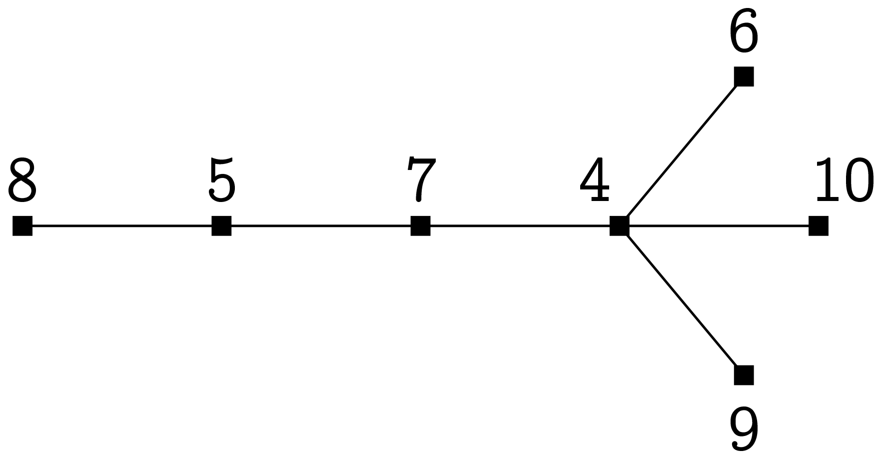
Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	7	9



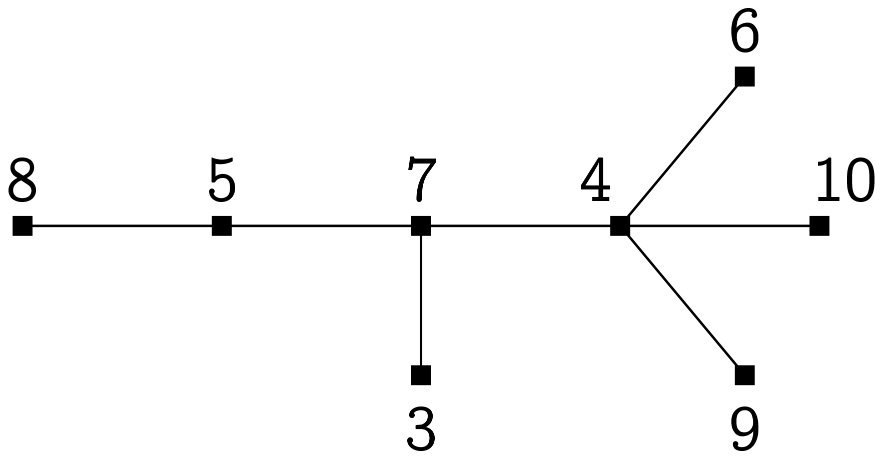
Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	7	9



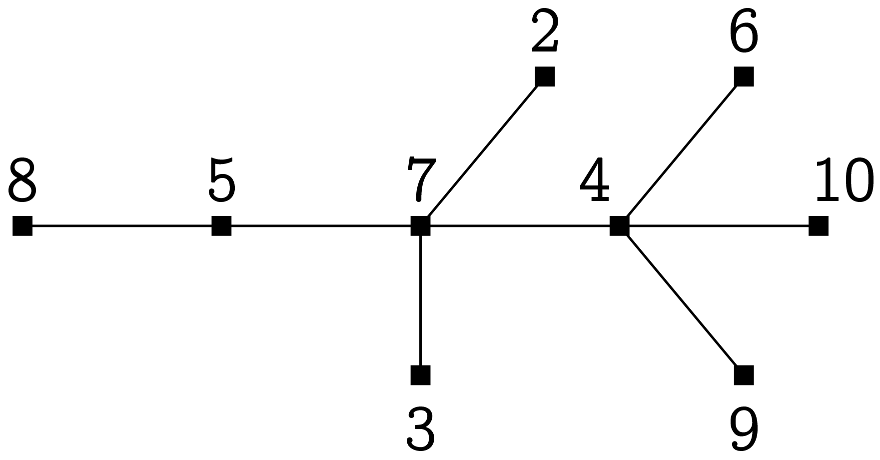
Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	$\boxed{7}$	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	$\boxed{3}$	6	8	5	7	9



Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	7	9



Näide: Olgu $M = \{1, \ldots, 10\}$.

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	7	9