Graafid, 1. kontrolltöö järeltöö

25. november 2003

Töö eest saab max. 50 punkti.

1. (**10 p**) Leia servade arv graafis $L(K_n)$.

2. (**10 p**) Olgu G k-serviti sidus Euleri graaf, olgu P mingi lihtahel selles graafis pikkusega ülimalt $(k-1)$. Näita, et G-s leidub Euleri ahel, mis alamahelana sisaldab ahelat P.

3. (**15 p**) Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf ja $E_1, E_2 \subseteq E$ *tsüklivabad* servade hulgad, s.t. graafi G ükski tsükkel (kui servade hulk) pole E_1 ega E_2 alamhulgaks. Näita, et kui $|E_1| < |E_2|$, siis leidub $e \in E_2 \backslash E_1$ nii, et ka $E_1 \cup \{e\}$ on tsüklivaba.

4. (**10 p**) Olgu G selline graaf, et tema kõik tsüklid on paarituarvulise pikkusega. Näita, et graafis G ei leidu tsükleid C_1 ja C_2, millel on vähemalt üks ühine serv.

5. (**5 p**) Olgu G mingi sidus lihtgraaf, nii et ka $\overline{G}$ on sidus. Millised järgmistest olukordadest on võimalikud ja millised mitte (too näide või tõesta võimatus)?

   - G on blokk, $\overline{G}$ on blokk;
   - G on blokk, $\overline{G}$ ei ole blokk;
   - G ei ole blokk, $\overline{G}$ ei ole blokk.

6. (**10 p ($\Rightarrow$) + 5 p ($\Leftarrow$)**) Graaf $G = (V, E)$ on *k-aluseline*, kui tema tipuhulk on võimalik tükeldada k-ks mittetühjaks tükiks (aluseks) $V_1, \ldots, V_k$ nii, et mitte ühegi $e \in E$ jaoks ei kuulu tema mõlemad otstipud samasse tükki. G on *täielik k-aluseline*, kui ta on k-aluseline ja iga kahe erinevasse alusesse kuuluva tipu vahel on serv.

   Näita, et täielik k-aluseline ($k \geqslant 2$) vähemalt kolme tipuga graaf G on Hamiltoni parajasti siis, kui $|V(G)| \geqslant 2\alpha(G)$, kus $\alpha(G)$ on G suurima aluse tippude arv.

7. (**15 p**) Olgu T mingi vähemalt kolme tipuga puu ja olgu T' saadud temast kõigi tema lehtede kustutamisel. Näita, et $v \in V(T')$ on puu T' tsenter parajasti siis, kui ta on puu T tsenter.

8. (**10 p**) Leia minimaalse kaaluga aluspuu järgmises graafis.