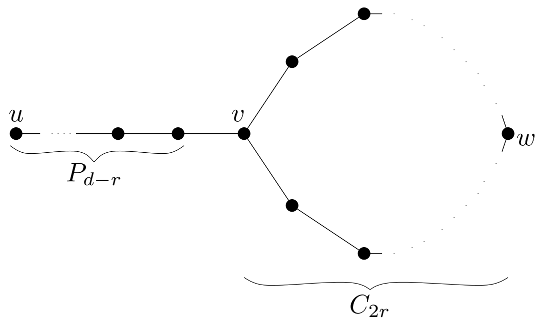
Ülesanne 1 *Antud $r, d \in \mathbb{N}$, nii et $1 \leq d/2 \leq r \leq d$. Konstrueeri graaf raadiusega r ja diameetriga d.*

Lahendus. Selliseks graafiks sobib näiteks järgmine graaf:



Siin tipu v ekstsentrilisus on r. Tõepoolest, tsüklil C_{2r} on kõik tipud temast ülimalt kaugusel r. Ahelal P_{d-r} on tipud temast ülimalt kaugusel $d-r$, mis on ülimalt r, sest $r \geq d/2$. Kõigi teiste tippude ekstsentrilisus on vähemalt r, see on nende vastasasuva tipu kaugus tsüklil. Graafi raadius on seega r.

Teineteisest kaugeimad tipud on u ja w, nendevaheline kaugus on täpselt d. See ongi graafi raadiuseks.

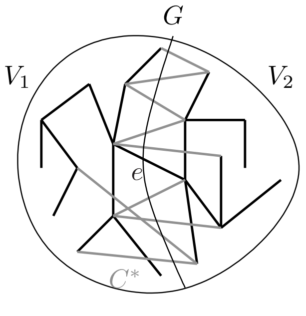
Ülesanne 2 *Sidusa graafi G* aluspuude graafiks *nimetatakse (liht)graafi $\mathcal{T}(G)$, mille tippudeks on G aluspuud ning $T_1, T_2 \in V(\mathcal{T}(G))$ on omavahel servaga ühendatud parajasti siis, kui nad erinevad täpselt ühe serva poolest, s.t. $|E(T_1) \backslash E(T_2)| = 1$.*

Olgu G paaritu arvu tippudega Euleri graaf. Näita, et $\mathcal{T}(G)$ on Euleri.

Lahendus. Meil tuleb näidata, et $\mathcal{T}(G)$ on sidus ja kõigi tema tippude aste on paarisarv.

Olgu T_1 ja T_2 graafi G kaks aluspuud, s.t. graafi $\mathcal{T}(G)$ kaks tippu. Vastavalt 5. praktikumi 9. ülesandele on võimalik puus T_1 servi ühekaupa puu T_2 servadega asendades jõuda puuni T_2. Järelikult on graafis $\mathcal{T}(G)$ tippude T_1 ja T_2 vahel ahel. Et T_1 ja T_2 olid suvaliselt valitud, siis on $\mathcal{T}(G)$ sidus.

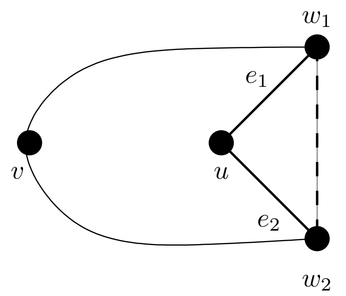
Olgu T nüüd mingi graafi G aluspuu, uurime mitu erinevat aluspuud on temast võimalik saada, asendades temas mingi serva mingi graafi G servaga, mis T-s ei esine. Olgu e puu T mingi serv. Siis graafis $T - e$ on kaks sidususkomponenti, olgu nende komponentide tipuhulgad V_1 ja V_2. Hulgad V_1 ja V_2 moodustavad graafi G tipuhulga mingi tükelduse. Nende tipuhulkade poolt indutseeritud alamgraafid graafis G on sidusad, sest nad kumbki sisaldavad ühte $T - e$ sidususkomponentidest.



Olgu C^* graafi G kõigi selliste servade hulk, mille üks otstipp on V_1-s ja teine V_2-s. Siis C^* on servade lõikav hulk (sest V_1 ja V_2 poolt indutseeritud alamgraafid olid sidusad). Graafi $T - e$ täiendamiseks aluspuuks tuleb talle lisada mõni serv hulgast C^*. Seega saab T-st, temast serva e välja jättes ja mõnda teist serva lisades moodustada $|C^*| - 1$ erinevat aluspuud. 5. praktikumi 14. ülesande kohaselt on $|C^*|$ paarisarv, seega saab serva e välja vahetades moodustada T-st paaritu arvu aluspuid. Võttes e asemel puu T mingi teise serva e', saame teised puud, sest puus T serva e väljavahetades jääb serv e' sisse, aga serva e' väljavahetades ei jää. Oleme leidnud, et mingit konkreetset serva väljavahetades saame paaritu arvu aluspuid. Kuna T servade arv on paarisarv (G tippude arv oli paaritu), siis on T-st saadavate aluspuude arv kokku paarisarv. Oleme näidanud, et T aste $\mathcal{T}(G)$-s on paaris.

Ülesanne 3 *Olgu $G = (V, E)$ vähemalt 4 tipuga 3-sidus lihtgraaf, olgu $u, v \in G$ ning olgu $e_1, e_2 \in E$ tipuga u intsidentsed. Näita, et graafis G leidub tsükkel, millele jäävad nii tipp v kui ka servad e_1 ja e_2.*

Lahendus. Olgu w_1 ja w_2 servade e_1 ja e_2 teised otstipud.



Olgu graaf G' saadud graafist G, lisades serva tippude w_1 ja w_2 vahele, kui nende vahel veel serva ei olnud. Ka graaf G' on 3-sidus, sest servade lisamise graafi sidusus ei vähene. Eemaldame nüüd graafist G' tipu u, siis jääb ta 2-sidusaks, s.t. blokiks. Vastavalt 4. loengus toodud teoreemile leidub graafis G' tsükkel, millele jääb nii tipp v kui ka serv w_1 ja w_2 vahel. Seejuures ei läbi see tsükkel tippu u, sest seda tippu graafis G' ei olegi. Sellest tsüklist saame otsitava tsükli graafis G, asendades seal serva w_1 ja w_2 vahel servadega e_1 ja e_2.

Ülesanne 4 *Lihtgraafi $G = (V, E)$* n-ndaks astmeks *nimetatakse graafi G^n, mille tipuhulgaks on V ning kus kaks tippu $u, v \in V$ on servaga ühendatud parajasti siis, kui $d_G(u, v) \leq n$.*

Olgu $m, n \in \mathbb{N}$ ja olgu G lihtgraaf. Näita, et $(G^m)^n = G^{mn}$.

Lahendus. Olgu $u, v \in V$. Näitame, et need kaks tippu on graafis $(G^m)^n$ servaga ühendatud parajasti siis, kui nad on graafis G^{mn} servaga ühendatud.

Oletame, et u ja v on servaga ühendatud graafis $(G^m)^n$, s.t. $d_{G^m}(u, v) \leq n$. Seega leiduvad graafis G^m tipud $v_0, v_1, \ldots, v_n$ nii, et $v_0 = u$, $v_n = v$ ja iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ jaoks on kas $v_{i-1} = v_i$ või on v_{i-1} ja v_i graafis G^m servaga ühendatud, s.t. $d_{G^m}(v_{i-1}, v_i) \leq 1$. Siis aga $d_G(v_{i-1}, v_i) \leq m$ ja kolmnurgavõrratuse tõttu $d_G(v_0, v_n) \leq mn$, s.t. tipud $v_0 = u$ ja $v_n = v$ on graafis G^{mn} servaga ühendatud.

Teistpidi, kui u ja v on servaga ühendatud graafis G^{mn}, siis $d_G(u, v) \leq mn$. Olgu $v_0, v_1, \ldots, v_{nm}$ sellised tipud, et $v_0 = u$, $v_{nm} = v$ ja iga $i \in \{1, \ldots, nm\}$ jaoks on kas $v_{i-1} = v_i$ või on v_{i-1} ja v_i graafis G servaga ühendatud. Vaatame tippe $v_0, v_m, v_{2m}, \ldots, v_{nm}$. Kuna $d_G(v_{(i-1)m}, v_{im}) \leq m$, siis on $v_{(i-1)m}$ ja v_{im} graafis G^m servaga ühendatud (siin $1 \leq i \leq n$). Järelikult $d_{G^m}(v_0, v_n) \leq n$, s.t. tipud $v_0 = u$ ja $v_{nm} = v$ on graafis $(G^m)^n$ servaga ühendatud.

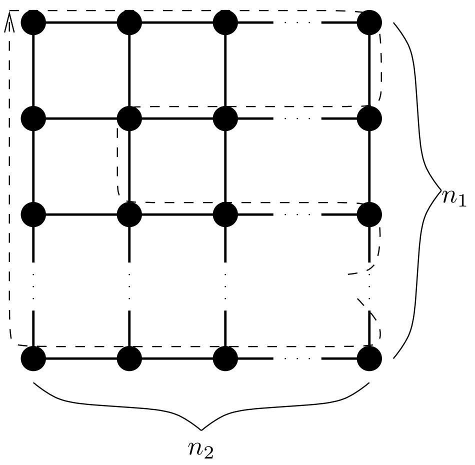
Ülesanne 5 *Lihtgraafide $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$* otsekorrutiseks *nimetatakse graafi $G_1 \times G_2$, mille tipuhulgaks on $V_1 \times V_2$ ning servahulgaks on*

$$\{((u_1, v), (u_2, v)) \,:\, u_1, u_2 \in V_1, v \in V_2, (u_1, u_2) \in E_1\} \cup \\ \{((u, v_1), (u, v_2)) \,:\, u \in V_1, v_1, v_2 \in V_2, (v_1, v_2) \in E_2\} \ .$$

Näiteks on graafid Q_n defineeritud järgmiselt: $Q_0 = \bullet$ ja $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$.

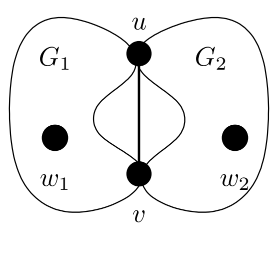
Olgu G_1 ja G_2 graafid, kus leidub Hamiltoni ahel, olgu graafis G_1 paarisarv tippe. Näita, et siis $G_1 \times G_2$ on Hamiltoni graaf.

Lahendus. Olgu $n_1 = |V_1|$ ja $n_2 = |V_2|$. See, et G_1-s ja G_2-s leidub Hamiltoni ahel, tähendab seda, et $P_{n_1} \leq G_1$ ja $P_{n_2} \leq G_2$. Ilmne on, et $P_{n_1} \times P_{n_2} \leq G_1 \times G_2$. Ülesande tingimustel ($n_1$ on paarisarv) on $P_{n_1} \times P_{n_2}$ Hamiltoni graaf, nagu näitab järgnev joonis. n_1 paarisarvulisus on oluline.



Ülesanne 6 *Olgu $G = (V, E)$ mingi sidus graaf ja $u, v \in V$ nii, et u ja v on naabertipud ja $G \backslash \{u, v\}$ (graaf G, millest on eemaldatud tipud u ja v koos nendega intsidentsete servadega) ei ole sidus. Näita, et graafis G ei leidu Hamiltoni tsükleid, mis läbiksid serva (u, v).*

Lahendus. Graaf G on siis järgneva kujuga:



(siin osad G_1 ja G_2 ei pruugi sidusad olla). Oletame vastuväiteliselt, et G-s leidub mingi Hamiltoni tsükkel C, mis läbib serva (u, v). Kuna $G \backslash \{u, v\}$ ei ole sidus, siis leidub nii G_1-s kui ka G_2-s mõni tipp (mis on erinev u-st ja v-st).

Olgu w_i tipp G_i-st, loeme, et tsükkel C algab tipust w_1. Mingi koha peal peab selles tsüklis esinema tipp w_2. Et iga tee tipust w_1 tippu w_2 viib kas läbi tipu u või tipu v, peab selles tsüklis w_1 ja w_2 vahel leiduma kas u või v. Ülesande tingimuse kohaselt peab tipule u vahetult järgnema tipp v või tipule v vahetult järgnema tipp u, seega on nii u kui ka v tsüklis C tippude w_1 ja w_2 vahel. Liikudes tsüklis C tipust w_2 edasi, peame me lõpuks tippu w_1 tagasi jõudma. Aga selleks tuleb meil taas läbida kas tipp u või tipp v, kuid nad mõlemad on juba läbitud. Vastuolu.

Ülesanne 7 *Olgu T n-tipuline puu ja G mingi lihtgraaf, mille iga tipu aste on vähemalt $n-1$. Näita, et leidub $G_T \leq G$ (s.t. G_T on G alamgraaf) nii, et $T \cong G_T$.*

Lahendus. Induktsioon üle n-i.

Baas. $n = 1$. Siis T koosneb ühest tipust ja G on suvaline graaf. Graafiks G_T võime võtta G suvalise tipu.

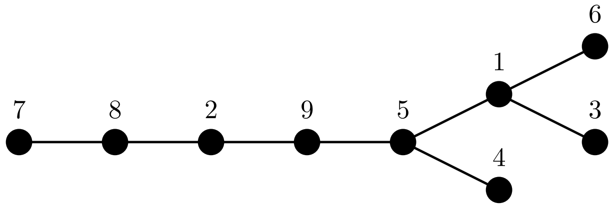
Samm. Kehtigu ülesande väide $n-1$ jaoks, näitame, et ta kehtib ka n jaoks. Olgu v puu T mõni leht ning olgu $T' = T \backslash v$. Puus T' on $n-1$ tippu. Graafis G on iga tipu aste vähemalt $n-1$, seega ka vähemalt $n-2$. Rakendame T'-le ja G-le induktsiooni eeldust. Seega leidub $G_{T'} \leq G$ nii, et $T' \cong G_{T'}$. Olgu w tipu v naabertipp puus T ja olgu w_G sellele tipule vastav tipp graafis $G_{T'}$. Kuna $\deg_G(w_G) \geq n-1$ ja graafis $G_{T'}$ on peale w_G veel $n-2$ tippu, siis leidub graafis G mingi tipu w_G naabertipp v_G, mis ei kuulu graafi $G_{T'}$. Graafi G_T konstrueerimegi, lisades graafile $G_{T'}$ tipu v_G ja serva (w_G, v_G). On ilmne, et $T \cong G_T$.

Ülesanne 8 *Leia märgendatud puu märgendite hulgaga* $\{1, \ldots, 9\}$ *ja Prüferi koodiga* $(1, 5, 1, 5, 9, 8, 2)$.

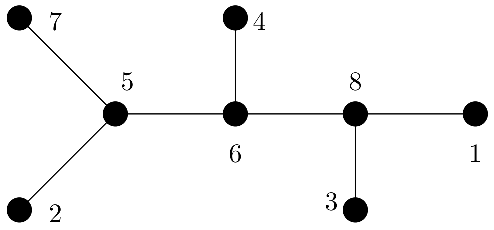
Lahendus. Leiame vähimate märgenditega lehtede märgendid:

1	5	1	5	9	8	2
3	4	6	1	5	7	8

üle jäävad märgendid 2 ja 9. Märgendatud puu on



Ülesanne 9 *Leia järgmise märgendatud puu Prüferi kood.*



Vastus. $(8, 5, 8, 6, 5, 6)$.