TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
ARVUTITEADUSE INSTITUUT

A. Buldas P. Laud J. Villemson

GRAAFID

Tartu 2003

Autorid avaldavad tänu Ülo Kaasikule käesoleva konspekti põhjaliku toimetamise eest.

Sisukord

1. Põhimõisted **5**

1.1. Graafi mõiste 5

1.2. Alamgraafid ja morfismid 7

1.3. Ahelad ja sidusus 8

1.4. Eritüüpi graafe 9

1.5. Tehted graafidega 12

Ülesanded 12

2. Euleri graafid **17**

Ülesanded 21

3. Hamiltoni graafid **23**

3.1. Ore teoreem 23

3.2. Ore sulund 25

Ülesanded 30

4. Puud **31**

Ülesanded 33

5. Märgendatud puud **36**

Ülesanded 40

6. Võrgud ja vood **42**

Ülesanded 50

7. Kooskõlad ja katted **52**

7.1. Berge'i teoreem 52

7.2. Halli abieluteoreem 53

7.3. Königi teoreem 55

7.4. Tutte'i teoreem 57

Ülesanded 62

8. Graafi servade värvimine **65**

Ülesanded 70

9. Klikid ja sõltumatud hulgad **71**

Ülesanded 76

10. Tasandilised graafid **77**

10.1. Tasandilisuse definitsioon 77

10.2. Euleri valem 78

10.3. Tasandilisuse kriteerium 80

Ülesanded 82

11. Graafi tippude värvimine **83**

11.1. Üldiste graafide värvimine 83

11.2. Tasandiliste graafide värvimine 85

11.3. Kromaatiline polünoom 86

Ülesanded 87

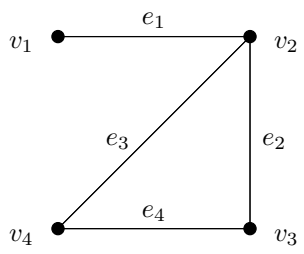
Indeks **90**

1. Põhimõisted

1.1. Graafi mõiste

Graaf (ehk *suunamata graaf*) G koosneb *tippude* hulgast V (tähistatakse vahel ka $V(G)$) ja *servade* hulgast E (tähistatakse vahel ka $E(G)$). Käesolevas kursuses loeme, et nii V kui ka E on lõplik. Graafi struktuur ehk seos V ja E vahel määratakse mingi *intsidentsusfunktsiooni* $\mathcal{E}$ etteandmisega, mis igale servale $e \in E$ seab vastavusse mingi tippude paari $\{u, v\}$, mille elemente nimetatakse serva *otstippudeks*. Öeldakse, et serv e ja tipp v on *intsidentsed*, kui $v \in \mathcal{E}(e)$. Võib juhtuda ka, et serva e otstipud langevad kokku, s.t. $\mathcal{E}(e)$ on võrdne üheelemendilise hulgaga $\{v\}$. Sellist serva nimetatakse *silmuseks*.

e	$\mathcal{E}(e)$
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_2, v_4\}$
e_4	$\{v_3, v_4\}$



Joonis 1.1. Graafi esitus funktsiooni $\mathcal{E}$ abil ja joonisena.

Tavaliselt esitatakse graaf joonisena, kus iga tipp on kujutatud punktina tasandil ning iga serv kahte tippu ühendava joonena. Graafi nimetatakse *tasandiliseks* (ehk *planaarseks*) siis, kui teda saab esitada joonisena, kus graafi servi esitavad jooned omavahel ei lõiku. Iga graaf ei pruugi olla tasandiline. Ehkki jooniseid kasutatakse matemaatikas ainult näitlikustamise vahendina, saab isegi graafi kui „joonist“ esitada matemaatiliselt rangelt topoloogia vahenditega. Käesolevas kursuses on graaf aga eelkõige kombinatoorne objekt, mille topoloogiline esitus ei ole tema omaduste tuletamisel määrav. Erandiks on ehk kursuse lõpupoole käsitletav tasandiliste graafide teema.

Servaga e intsidentsete tippude järjekord ei ole graafi definitsioonis oluline — hulk $\mathcal{E}(e)$ pole järjestatud. Mõnikord on aga vaja anda $\mathcal{E}(e)$ elementidele eelisjärjestus. See viib nn. *suunatud graafi* mõis-

teni, milles hulga E elemente nimetatakse *kaarteks* (ehk *suunatud servadeks*) ja milles intsidentsusfunktsioon $\mathcal{E}$ seab kaarele e vastavusse hulga $\{u, v\}$ asemel järjestatud paari (u, v), s.t. $\mathcal{E} : E \longrightarrow V \times V$. Kaart tipust u tippu v tähistatakse joonistel noolega varustatud joonega, nii et nool osutab tipu v suunas. Tippu u nimetatakse kaare e *algtipuks* ja tippu v *lõpptipuks*.

Graafides esineva matemaatiliselt korrektseks ja samas näitlikuks kirjapanekuks kasutatakse sageli erisümboleid —, → ja ← intsidentsusseoste esitamiseks. Kirjutis $u \overset{e}{—} v$ tähendab, et e on serv tippude u ja v vahel, s.t. $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$. Kirjutised $u \overset{e}{\rightarrow} v$ ja $v \overset{e}{\leftarrow} u$ tähistavad mõlemad fakti, et e on tipust u tippu v suunduv kaar, s.t. $\mathcal{E}(e) = (u, v)$. Kirjutis $u — v$ tähendab, et leidub mingi serv e, mille korral $u \overset{e}{—} v$, kirjutistel $u \rightarrow v$ ja $v \leftarrow u$ on analoogiline tähendus.

Kaks erinevat serva/kaart e_1 ja e_2 võivad põhimõtteliselt olla intsidentsed samade tippudega, s.t. $\mathcal{E}(e_1) = \mathcal{E}(e_2)$. Valdavalt me siiski piirdume graafidega, kus kordsed servad puuduvad, s.t. funktsiooniga $\mathcal{E}$ määratud kujutus on injektiivne. Graafi, mis kordseid kaari ega silmuseid ei sisalda, nimetatakse *lihtgraafiks*. Sel juhul on otstarbekas samastada kaarte hulk E otseruudu $V \times V$ mingi alamhulgaga, mis ei sisalda elemente kujul (v, v). Teisisõnu, E samastatakse funktsiooni $\mathcal{E}$ väärtuste hulgaga, s.t. teatava antirefleksiivse binaarse relatsiooniga tippude hulgal V (see võimaldab $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$ asemel kirjutada $e = \{u, v\}$). Graafi *servaks* tippude u ja v vahel nimetame sel juhul kahest kaarest koosnevat hulka $\{(u, v), (v, u)\}$ (mida tähistame ikka $\{u, v\}$). Seega on kasutusele võetud sümbolitel meie jaoks järgmine tähendus:

1. $u \overset{e}{\rightarrow} v$ tähendab, et $e = (u, v) \in E$;
2. $u \overset{e}{—} v$ tähendab, et $e = \{(u, v), (v, u)\} \subseteq E$.

Graafi saab sel juhul defineerida kui paari $G = (V, E)$, kus E on mingi binaarne relatsioon hulgal V. Relatsiooni E sümmeetrilisus $(u \rightarrow v \Rightarrow u \leftarrow v)$ tähendab, et tegemist on suunamata graafiga.

Lihtgraafi $G = (V, E)$ *täiendgraafiks* $\overline{G}$ loetakse graaf $(V, \overline{E})$, kus

$$\overline{E} \overset{\text{def}}{=} \{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v,\ \{u, v\} \notin E\}.$$

Lihtne on veenduda, et mistahes lihtgraaf langeb kokku oma täiendgraafi täiendgraafiga, s.t. $\overline{\overline{G}} = G$.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf tippude hulgaga $V = \{v_1, ..., v_n\}$. Siis $(n \times n)$-maatriksit $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, kus

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{kui } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

nimetatakse graafi G *naabrusmaatriksiks* (ehk *kaaslusmaatriksiks*). Tippe v_i ja v_j nimetatakse *naabriteks* siis, kui $\{v_i, v_j\} \in E$ ehk $a_{ij} = 1$ või $a_{ji} = 1$. Tipu $v \in V$ naabrite arvu nimetatakse tema *astmeks* (ehk *valentsiks* ehk *lokaalseks astmeks*) ja tähistatakse $\deg(v)$ (lühend ingliskeelsest sõnast *degree*). Vajadusel võime me selles tähistuses ka graafi või servahulga ilmutatult esitada (juhul, kui vaatleme mitut graafi üheaegselt) ning kirjutada $\deg_G(v)$ või $\deg_E(v)$. Graafi nimetatakse *regulaarseks*, kui kõikide tippude astmed on võrdsed. Kui kõikide tippude aste on k, siis nimetatakse graafi *k-regulaarseks*.

Teoreem 1.1. *Suunamata lihtgraafis on paarisarv paaritu astmega tippe.*

Tõestus. Suunamata lihtgraafi G naabrusmaatriks $\mathbf{A}$ on sümmeetriline ja selle peadiagonaalil on nullid. Loendame maatriksis $\mathbf{A}$ sisalduvaid ühtesid (s.t. graafi kaari, mida on täpselt $|E|$ tükki) kahel erineval viisil: servade kaupa ja tippude kaupa. Igale servale v_i — v_j vastab ühtede paar $a_{ij} = a_{ji} = 1$. Erinevatele servadele vastavad erinevad ühtede paarid ja seetõttu on ühtede (s.t. graafi kaarte) arv võrdne servade arvu s kahekordsega. Teisest küljest, igale tipule v_i vastab rida maatriksis $\mathbf{A}$, kusjuures ühtede arv selles reas on võrdne tipu v_i astmega $\deg(v_i)$. Seega

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = |E| = 2 \cdot s, \tag{1.1}$$

millest teoreemi väide tuleneb triviaalselt. □

1.2. Alamgraafid ja morfismid

Olgu meil kaks graafi $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$. Injektiivset kujutust $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ nimetatakse graafide *monomorfismiks* (ja

tähistatakse $G_1 \overset{\varphi}{\hookrightarrow} G_2$) siis, kui mistahes tipupaari $u, v \in V_1$ korral

$$(u, v) \in E_1 \;\Leftrightarrow\; (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2.$$

Kui leidub monomorfism $G_1 \hookrightarrow G_2$, siis öeldakse, et graaf G_1 on (isomorfselt) *sisestatav* graafi G_2. Sürjektiivset monomorfismi φ nimetatakse *isomorfismiks* ja tähistatakse $G_1 \overset{\varphi}{\cong} G_2$. Isomorfismi $G \overset{\sigma}{\cong} G$ nimetatakse graafi G *automorfismiks*. Kui graafide G_1 ja G_2 vahel leidub isomorfism $G_1 \overset{\varphi}{\cong} G_2$, siis ütleme, et G_1 ja G_2 on *isomorfsed* ning tähistame $G_1 \cong G_2$.

Ütleme, et graaf $G_1 = (V_1, E_1)$ on graafi $G_2 = (V_2, E_2)$ *alamgraaf* (tähistame $G_1 \leqslant G_2$) siis, kui $V_1 \subseteq V_2$ ja $E_1 \subseteq E_2$. Alamgraafi G_1 nimetatakse graafi G_2 *indutseeritud alamgraafiks* siis, kui samasuskujutus $\iota_{V_1} : V_1 \longrightarrow V_1 \subseteq V_2$ on graafide G_1 ja G_2 monomorfism, s.t. kui $G_1 \overset{\iota_{V_1}}{\hookrightarrow} G_2$.

1.3. Ahelad ja sidusus

Ahelaks (ehk *teeks*) P tipust u tipuni v graafis $G = (V, E)$ nimetatakse servade järjendit $(e_1, \ldots, e_k)$, mille korral leidub tippude järjend $(v_0, \ldots, v_k)$ nii, et $u = v_0$, $v = v_k$ ja iga $i \in \{1, \ldots, k\}$ jaoks $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Asjaolu, et P on ahel tipust u tipuni v tähistatakse $u \overset{P}{\rightsquigarrow} v$. Kirjapilti $u \rightsquigarrow v$ tuleb mõista kui lauset $\exists P : u \overset{P}{\rightsquigarrow} v$. Kui järjendis $(v_0, \ldots, v_k)$ on kõik tipud erinevad (v.a. esimene ja viimane tipp, mis võivad ka omavahel kokku langeda), siis nimetatakse ahelat P *lihtahelaks* (ehk *lihtteeks*). Arvu k nimetatakse ahela P *pikkuseks* ja tähistatakse sümboliga $|P|$. Ahelat kujul $u \overset{P}{\rightsquigarrow} u$ nimetatakse *kinniseks*. Kinnist lihtahelat nimetatakse *tsükliks*.

Ahelat $P = (e_1, \ldots, e_k)$ koos vastava tipujärjendiga $(v_0, \ldots, v_k)$ võime üles kirjutada ka järgmisel viisil:

$$P : v_0 \overset{e_1}{—} v_1 \overset{e_2}{—} v_2 \overset{e_3}{—} \cdots \overset{e_{k-1}}{—} v_{k-1} \overset{e_k}{—} v_k,$$

sellest üleskirjutusest võib omakorda servade nimed ära jätta. Kui G on lihtgraaf, siis võime ahelat vaadelda ka kui tippude järjendit, sest kordsete servade puudumise tõttu määrab järjend $(v_0, \ldots, v_k)$ üheselt servad $e_1, \ldots, e_k$.

Teoreem 1.2. *Graaf G, mille iga tipu aste on vähemalt kaks, sisaldab tsüklit.*

Tõestus. Kui G sisaldab silmuseid või kordseid servi, siis on teoreemi väide triviaalselt täidetud. Seetõttu eeldame edaspidi, et G on lihtgraaf. Oletame väitevastaselt, et G ei sisalda ühtegi tsüklit. Olgu $v_1 \in V$ mingi tipp. Vastavalt eeldusele $\deg(v_1) \geqslant 2$ leidub vähemalt üks tipp $v_2 \neq v_1$ nii, et $v_1 \text{ — } v_2$. Et ka $\deg(v_2) \geqslant 2$, siis tsüklite puudumise tõttu leidub vähemalt üks tipp $v_3 \notin \{v_1, v_2\}$, nii et $v_1 \text{ — } v_2 \text{ — } v_3$. Analoogiliselt jätkates näeme, et kui leidub lihtahel $v_1 \text{ — } v_2 \text{ — } \ldots \text{ — } v_k$ pikkusega $k-1$, siis $\deg(v_k) \geqslant 2$ tõttu leidub tipp $v_{k+1} \notin \{v_1, ..., v_k\}$ nii, et $v_k \text{ — } v_{k+1}$, sest kui $v_k \text{ — } v_i$ mingi $i < k-1$ korral, siis moodustaksid tipud $(v_i, v_{i+1}, ..., v_k)$ tsükli. Seega leidub graafis G lihtahel

$$v_1 \text{ — } v_2 \text{ — } \ldots \text{ — } v_k \text{ — } v_{k+1}$$

pikkusega k. Induktsiooni abil oleks nüüd võimalik näidata, et graafis G leidub kuitahes pikki lihtahelaid, mis on vastuolus sellega, et graafi G tippude hulk V on lõplik. □

Graafi G nimetatakse *sidusaks*, kui lause $\forall u \forall v[u \rightsquigarrow v]$ on selles graafis tõene (või nagu loogikud tähistavad $G \models \forall u \forall v[u \rightsquigarrow v]$). On lihtne veenduda, et seos $\rightsquigarrow$ on *ekvivalents*. Vastavaid ekvivalentsiklasse nimetame graafi *sidusateks komponentideks*.

Olgu u ja v sidusa suunamata graafi $G = (V, E)$ kaks tippu. *Kauguseks* $d(u, v)$ tippude u ja v vahel nimetatakse neid tippe ühendava lühima lihtahela pikkust. On lihtne veenduda, et paar (V, d) rahuldab meetrilise ruumi aksioome, s.t.

1) $d(u, v) = 0$ parajasti siis, kui $u = v$;

2) $d(u, v) = d(v, u)$ mistahes tippude $u, v \in V$ korral;

3) $d(u, v) + d(v, w) \geqslant d(u, w)$ mistahes tippude $u, v, w \in V$ korral.

1.4. Eritüüpi graafe

Nullgraaf. Graafi, milles ei ole ühtegi serva, nimetame nullgraafiks. Nullgraafi, milles on n tippu, tähistame sümboliga O_n.

Täisgraaf. Graafi, milles iga kahe erineva tipu vahel on üks serv, nimetame *täisgraafiks*. Täisgraafi, milles on n tippu, tähistame sümboliga K_n. Graafis K_n on ilmselt $\frac{n(n-1)}{2}$ serva.

Kahealuseline graaf. Graaf $G = (V, E)$ on *kahealuseline* (ehk *bikromaatiline*) siis, kui tema tippude hulk V on tükeldatav kaheks hulgaks V_1 ja V_2 (s.t. $V_1 \cup V_2 = V$ ja $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) nii, et iga serva $e \in E$ jaoks on e üks otstipp hulgas V_1 ja teine hulgas V_2. Hulkasid V_1 ja V_2 nimetame graafi G *alusteks*.

Kahealuselist graafi nimetame *täielikuks kahealuseliseks graafiks* siis, kui tema kahe tipu vahel on serv *parajasti siis*, kui need kaks tippu kuuluvad erinevatesse alustesse. Täielikku kahealuselist graafi, mille ühes aluses on m tippu ja teises aluses n tippu, tähistame sümboliga $K_{m,n}$. Graafis $K_{m,n}$ on ilmselt $m + n$ tippu ja mn serva. Samuti on ilmne, et mingi graaf on kahealuseline parajasti siis, kui iga tema sidus komponent osutub kahealuseliseks.

Analoogiliselt kahealuseliste graafidega võime defineerida ka k-aluselised graafid, kus $k \in \mathbb{N}$. Graaf $G = (V, E)$ on *k-aluseline*, kui tema tippude hulk on tükeldatav k-ks hulgaks (aluseks) $V_1, \ldots, V_k$ nii, et ei leidu servi, mille mõlemad otstipud kuuluksid samasse alusesse. *Täielik k-aluseline* graaf on selline k-aluseline graaf, mille kahe tipu vahel leidub serv parajasti siis, kui need tipud kuuluvad erinevatesse alustesse. Täielikku k-aluselist graafi, mille alustes on vastavalt $n_1, \ldots, n_k$ tippu, tähistame sümboliga $K_{n_1,\ldots,n_k}$.

Teoreem 1.3. *Graaf on kahealuseline parajasti siis, kui kõigi temas leiduvate tsüklite pikkused on paarisarvud.*

Tõestus. Tarvilikkuse ($\Rightarrow$) näitamiseks eeldame, et V_1 ja V_2 on kahealuselise graafi G alused ning C on mingi tsükkel selles graafis. Tsüklis C esinevad tipud alusest V_1 vaheldumisi tippudega alusest V_2, järelikult peab C sisaldama alustest V_1 ja V_2 ühepalju tippe ning C tippude koguarv on seega paarisarv.

Piisavuse ($\Leftarrow$) näitamiseks eeldame, et graafi G kõik tsüklid on paarisarvulise pikkusega. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et G on sidus.

Olgu u ja v graafi G kaks tippu ning P_1 ja P_2 kaks lihtahelat tipust u tippu v. Ahelate P_1 ja P_2 pikkustel on sama paarsus. Tõepoolest, kui ahelatel P_1 ja P_2 pole teisi ühiseid tippe peale u ja v, siis:

- kinnine ahel, mille moodustavad P_1 ning tagurpidi pööratud P_2, on tsükkel;
- selle tsükli pikkus on võrdne arvuga $|P_1| + |P_2|$;
- teoreemi eelduse kohaselt on $|P_1| + |P_2|$ paarisarv, seega peavad $|P_1|$ ja $|P_2|$ sama paarsusega olema.

Kui ahelatel P_1 ja P_2 on teisi ühiseid tippe peale u ja v, siis tõestame oma väite $|P_1|$ ja $|P_2|$ paarsuse kohta induktsiooniga pikkuste $|P_1|$ ja $|P_2|$ järgi. Olgu w tipp, mis esineb nii ahelas P_1 kui ka ahelas P_2. Olgu P_1' ahela P_1 osa tipust u tipuni w ning P_1'' ahela P_1 osa tipust w tipuni v. Samamoodi, olgu P_2' ahela P_2 osa tipust u tipuni w ja P_2'' ahela P_2 osa tipust w tipuni v. Ahelad P_1' ja P_1'' on lühemad kui P_1 ning ahelad P_2' ja P_2'' on lühemad kui P_2. Induktsiooni eelduse järgi on siis $|P_1'|$ ja $|P_2'|$ sama paarsusega ning $|P_1''|$ ja $|P_2''|$ sama paarsusega. Seega on ka $|P_1| = |P_1'| + |P_1''|$ ja $|P_2| = |P_2'| + |P_2''|$ sama paarsusega.

Ahelate P_1 ja P_2 pikkustel on sama paarsus ka siis, kui me ei nõua, et nad oleksid tingimata *liht*ahelad. Tõepoolest, me võime ahelaist P_1 ja P_2 eemaldada tsükleid seni, kuni nad muutuvad lihtahelateks. Tsüklite eemaldamine ei muuda ahela pikkuse paarsust, kuna kõik tsüklid on paarisarvulise pikkusega.

Olgu nüüd u graafi G mingi fikseeritud tipp. Defineerime G tipuhulgal järgmise tükelduse $V = V_1 \cup V_2$, kus

$$V_1 = \{v \mid v \in V, \text{ iga } u \overset{P}{\rightsquigarrow} v \text{ korral on } |P| \text{ paarisarv}\},$$
$$V_2 = \{v \mid v \in V, \text{ iga } u \overset{P}{\rightsquigarrow} v \text{ korral on } |P| \text{ paaritu arv}\} \ .$$

Eelnev arutelu näitab, et graafi G iga tipp tõepoolest kuulub ühte neist kahest hulgast.

Olgu $v, v' \in V_1$. Sel juhul ei saa nende tippude vahel serva olla. Tõepoolest, oletame, et $e = \{v, v'\}$ on graafi G serv. Olgu P mingi ahel tipust u tippu v, selle ahela pikkus on muidugi paarisarv. Siis $u \overset{P}{\rightsquigarrow} v - v'$ on paarituarvulise pikkusega ahel tipust u tippu v', mis on vastuolus eeldusega $v' \in V_1$. Analoogiliselt saab näidata, et kahe hulka V_2 kuuluva tipu vahel ei ole serva.

Seega on tipuhulga V tükeldus hulkadeks V_1 ja V_2 kahealuselise graafi definitsioonis nõutud omadustega. □

1.5. Tehted graafidega

Edaspidi on meil tihti tarvis mõnest olemasolevast graafist kindlal viisil uusi graafe konstrueerida. Defineerime siinkohal mõned tähistused, mida meil edaspidi tarvis läheb.

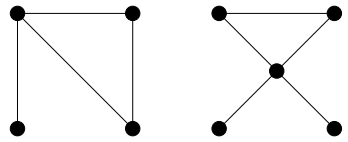
Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf. Kui $e \in E$, siis $G - e$ tähistab graafi tipuhulgaga V ja servahulgaga $E \backslash \{e\}$. Analoogiliselt, kui e on mingi suurus, mille korral on defineeritud $\mathcal{E}(e)$, mis on hulga V kaheelemendiline alamhulk, siis $G + e$ tähistab graafi tipuhulgaga V ja servahulgaga $E \cup \{e\}$.

Kui $v \in V$, siis $G \backslash v$ tähistab graafi G, millest on eemaldatud tipp v ning kõik selle tipuga intsidentsed servad. Teisisõnu, $G \backslash v = (V', E')$, kus $V' = V \backslash \{v\}$ ja $E' = \{e \mid e \in E, v \notin \mathcal{E}(e)\}$. Kui $U \subseteq V$, kus hulga U elementideks on $v_1, \ldots, v_n$, siis $G \backslash U$ tähistab graafi $(\cdots((G \backslash v_1) \backslash v_2) \cdots) \backslash v_n$. Teisisõnu, graaf $G \backslash U$ on G indutseeritud alamgraaf tipuhulgaga $V \backslash U$.

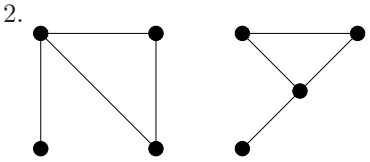
Ülesanded

Ülesanne 1. Selgita, kas järgmistes paarides esitatud graafid on isomorfsed? Miks?

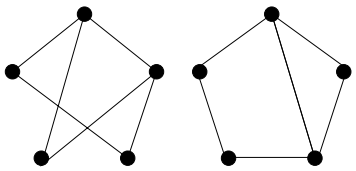
1.



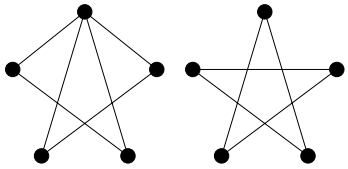
2.



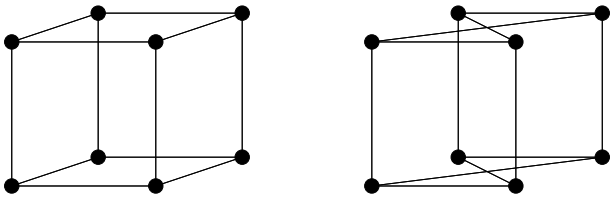
3.



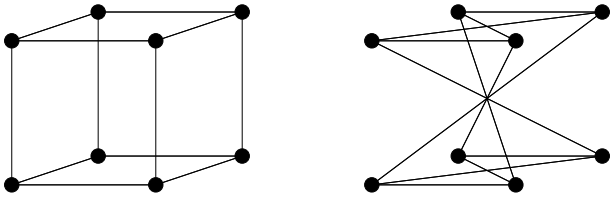
4.



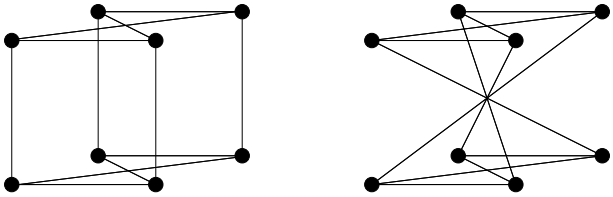
5.



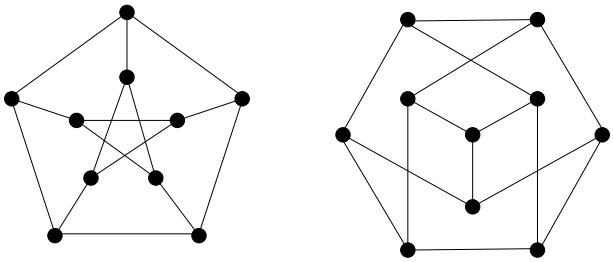
6.



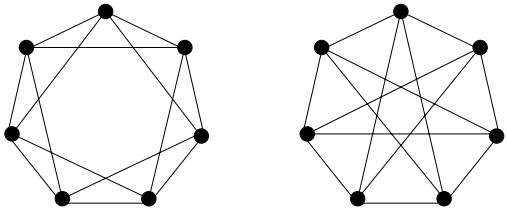
7.



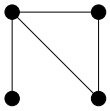
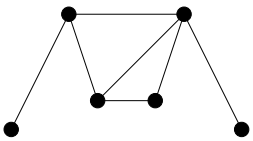
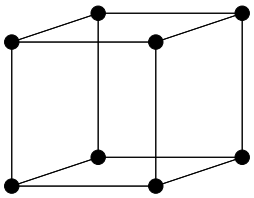
8.



9.



Ülesanne 2. Graafi G kõigi automorfismide hulka tähistame $\mathrm{Aut}(G)$. Leia $|\mathrm{Aut}(G)|$, kui graaf G on

1. 
2. 
3. K_n
4. O_n
5. P_n (n-tipuline lihtahel)
6. C_n (n-tipuline tsükkel)
7. 
8. Pet (*Peterseni graaf*, see on graaf 8 ülesandest 1).

Ülesanne 3. Tõesta, et $\mathrm{Aut}(G)$ on rühm teisenduste kompositsiooni suhtes. Leia graaf, mille automorfismirühm on isomorfne jäägiklassiringi $\mathbb{Z}_n$ aditiivse rühmaga.

Ülesanne 4. Joonista graafe, mis on isomorfsed oma täiendgraafiga ja omavad 4 (5, 8) tippu. Tõesta, et kui graaf on isomorfne oma täiendgraafiga, siis jagub ta tippude arv neljaga või annab neljaga jagades jäägi 1.

Ülesanne 5. Tõesta, et $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}(\overline{G})$.

Ülesanne 6. Tõesta, et kui $|V(G)| > 1$, siis leidub lihtgraafis G kaks võrdse astmega tippu.

Ülesanne 7. Tõesta, et mittesidusa graafi täiendgraaf on sidus.

Ülesanne 8. Olgu $V' \subseteq V(G)$. Tõesta, et hulga V' poolt graafis G indutseeritud alamgraafi täiendgraaf võrdub graafis $\overline{G}$ hulga V' poolt indutseeritud alamgraafiga.

Ülesanne 9. Graafi G *servgraafiks* $L(G)$ loeme graafi tipuhulgaga

$$V(L(G)) = E(G)$$

ja servahulgaga

$$E(L(G)) = \{(e_1, e_2) \mid \exists\, u, v, w \in V(G),\ v \neq w,\ e_1 = (u, v),\ e_2 = (u, w)\}.$$

Tõesta, et $\overline{L(K_5)} \cong \text{Pet}$.

Ülesanne 10. Tipu v *ekstsentrilisuseks* nimetatakse suurust

$$\mathsf{e}(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v).$$

Graafi *raadius* $\mathsf{r}(G)$ ja *diameeter* $\mathsf{d}(G)$ defineeritakse kui

$$\mathsf{r}(G) = \min_{v \in V(G)} \mathsf{e}(v) \quad \text{ja} \quad \mathsf{d}(G) = \max_{v \in V(G)} \mathsf{e}(v).$$

Tippu v nimetatakse graafi G *tsentriks*, kui $\mathsf{e}(v) = \mathsf{r}(G)$. Tõesta, et suvalise graafi G korral

$$\mathsf{d}(G) \leqslant 2 \cdot \mathsf{r}(G).$$

Ülesanne 11. Kas võib juhtuda, et $\mathsf{r}(G) = \mathsf{d}(G)$? Kui jah, siis milliseid väärtusi võib see suurus omandada?

Ülesanne 12. Joonista graaf, millel on täpselt 3 tsentrit, kuid rohkem kui 3 tippu. Milliste n väärtuste korral leidub sidus graaf, millel on täpselt n tsentrit?

Ülesanne 13. Mistahes naturaalarvu $k > 1$ jaoks defineeritakse *paaritu graaf* Odd_k järgmiselt. Olgu S mingi $(2k-1)$-elemendiline hulk. Graafi Odd_k tipuhulk on

$$V(\text{Odd}_k) = \mathcal{P}_{k-1}(S),$$

kus $\mathcal{P}_n(X)$ tähistab hulga X kõigi n-elemendiliste alamhulkade hulka, ja servahulk

$$E(\mathrm{Odd}_k) = \{(A, B) \mid A, B \in V(\mathrm{Odd}_k), A \cap B = \emptyset\}.$$

Tõesta, et $\mathrm{Odd}_3 \cong \mathrm{Pet}$.

Ülesanne 14. Olgu graafid G ja H antud vastavate tipu- ja servahulkadega:

$$V(G) = \mathcal{P}(\{x, y, z\}); \qquad E(G) = \{(A, B) \mid A \subseteq B,\ A \neq B\};$$
$$V(H) = \{d \mid d \in \mathbb{N},\ d \mid 30\}; \quad E(H) = \{(a, b) \mid a \mid b,\ a \neq b\}.$$

Tõesta, et $G \cong H$.

Ülesanne 15. *Kolmnurgaks* graafis G nimetame sellist kolmeelemendilist hulka $\Delta = \{u, v, w\} \subseteq V(G)$, et (u, v), (v, w), $(u, w) \in E(G)$. Graafi G *kolmnurkade graafiks* $T(G)$ nimetame graafi tipuhulgaga

$$V(T(G)) = \{\Delta \mid \Delta \text{ on graafi } G \text{ kolmnurk}\}$$

ja servahulgaga

$$E(T(G)) = \{(\Delta_1, \Delta_2) \mid |\Delta_1 \cap \Delta_2| = 2\}.$$

Tõesta, et

1. $T(K_4) \cong K_4$,
2. $T(K_5) \ncong \mathrm{Pet}$.

Ülesanne 16. Defineerime graafid G_n tipuhulgaga

$$V(G_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$$

ja servahulgaga

$$E(G_n) = \{(a, b) \mid a \neq b,\ \gcd(a, b) = 1\}.$$

1. Selgita, kas graafid G_n on sidusad.
2. Tõesta, et $m < n$ jaoks on graaf G_m graafi G_n indutseeritud alamgraaf.

Ülesanne 17. Tõesta, et graaf Q_3 (see on graaf 7 ülesandest 2) on iseenda täiendgraafi alamgraaf.

2. Euleri graafid

Sidusat suunamata graafi nimetetakse *Euleri graafiks* siis, kui selles graafis leidub kinnine ahel, mis sisaldab iga serva parajasti üks kord. Vastavat ahelat nimetatakse *Euleri ahelaks*. Mitte-Euleri graafi nimetatakse *pool-Euleri graafiks* siis, kui selles graafis leidub ahel, mis sisaldab iga serva parajasti üks kord.

Teoreem 2.1 (Euler, 1736). *Sidus graaf G on Euleri graaf parajasti siis, kui kõigil tema tippudel on paarisarvuline aste.*

Tõestus. Tarvilikkuse ($\Rightarrow$) näitamiseks eeldame, et P on graafi G mingi Euleri ahel. Vaatame graafi G mingit tippu v. Esinegu ta n korda ahelas P (seejuures loeme ahela alguseks ja lõpuks olemise kokku üheks esinemiseks). Tipu v iga esinemise juures peab ahel P tippu v sisenema ja sealt jälle väljuma; tippu saab siseneda ja sealt väljuda mõne temaga intsidentse serva kaudu. Seega esineb ahelas P tipuga v intsidentseid servi $2n$ korral. Ahelas P esinevad graafi G kõik servad täpselt üks kord, seega esinevad seal ka kõik tipuga v intsidentsed servad täpselt üks kord. Seetõttu $\deg(v) = 2n$.

Piisavuse ($\Leftarrow$) näitamiseks eeldame, et G on sidus graaf, mille kõigi tippude astmed on paarisarvud. Tõestus käib induktsiooniga graafi G servade arvu järgi.

Induktsiooni baasina vaatleme juhtu $|E(G)| = 0$, mil tühi ahel (s.t. ahel, mis ei sisalda ühtegi serva) on graafi G Euleri ahelaks.

Induktsiooni sammu korral on $|E(G)| > 0$. Sel juhul on graafi G kõigi tippude aste suurem kui 0, sest muidu ei oleks G sidus. Vastavalt eeldusele on G iga tipu aste seega vähemalt 2 ning teoreemi 1.2 kohaselt leidub graafis G mingi tsükkel C. Kui C sisaldab graafi G kõiki servi, siis on teoreem tõestatud.

Vastasel korral moodustame graafist G uue graafi G', kustutades graafis G kõik tsüklisse C kuuluvad servad. Graafis G' on vähem servi kui graafis G ning ka graafi G' kõigi tippude astmed on paarisarvulised. Tõepoolest, kustutades kõik mingisse tsüklisse kuuluvad servad, vähendasime me iga tipu astet kas nulli või kahe võrra. Me ei saa induktsiooni eeldust siiski otse graafi G' jaoks kasutada, kuna ta ei pruugi olla sidus. Küll aga võime me seda kasutada graafi G' iga sidusa komponendi jaoks — vastavalt induktsiooni eeldusele on graafi G' igal sidusal komponendil Euleri ahel.

Graafi G Euleri ahela konstrueerime nüüd liikudes mööda tsükli C servi, kuni jõuame mõne sellise tipuni v, mille aste graafis G' ei ole null, ning mis kuulub graafi G' sellisesse sidusasse komponenti, mida me veel graafi G Euleri ahelat konstrueerides läbinud ei ole. Järgmise sammuna läbime me graafi G' tippu v sisaldava Euleri ahela ja jõuame pärast selle läbimist tippu v tagasi. Seejärel jätkame tsükli C servade läbimist poolelijäänud kohast, kuni jõuame graafi G' järgmise veel töötlemata sidusa komponendini. Protsess lõpeb siis, kui oleme tsükli C tervenisti läbinud. □

Järeldus 2.2. *Sidus graaf G on Euleri graaf parajasti siis, kui tema servade hulk E esitub paarikaupa lõikumatute tsüklite ühendina.*

Tõestus. Järeldub otseselt teoreemi 2.1 tõestusest. Tõepoolest, selle teoreemi tõestuses me tükeldasime graafi G servade hulga (paarikaupa lõikumatuteks) tsükliteks. □

Järeldus 2.3. *Sidus graaf G on pool-Euleri graaf parajasti siis, kui selles graafis on täpselt kaks sellist tippu, mille aste on paarituarvuline.*

Tõestus. Tarvilikkuse ($\Rightarrow$) näitamiseks eeldame, et G on pool-Euleri graaf ning P ahel, mis läbib selle graafi iga serva täpselt üks kord. Olgu u ja v vastavalt ahela P alg- ja lõpptipp ning G' graaf, mis on saadud graafile G täiendava serva $e = \{u, v\}$ lisamisel. Ahel $u \overset{P}{\rightsquigarrow} v \overset{e}{—} u$ on graafi G' Euleri ahel, seega on graafis G' kõigi tippude aste paarisarv. Graafis G on tippude u ja v aste paaritu arv (ühe võrra väiksem kui graafis G') ning ülejäänud tippude aste paarisarv (sama palju kui graafis G').

Piisavuse ($\Leftarrow$) näitamiseks eeldame, et G on graaf, milles täpselt kahe tipu aste on paaritu arv. Olgu need tipud u ja v ning G' graaf, mis on saadud graafile G täiendava serva $e = \{u, v\}$ lisamisel. Graafi G' kõik tipud on nüüd paarisarvulise astmega ja seega on G' Euleri graaf. Olgu C graafi G' Euleri ahel. Kui me eemaldame ahelast C serva e, siis saame me ahela, mis läbib graafi G kõiki servi täpselt ühel korral. Seega G on pool-Euleri graaf. □

Algoritm 2.1 annab ühe lihtsa viisi Euleri graafis Euleri ahela leidmiseks. Algoritmi kirjelduses leiduv mõiste *sild* on meil varem defineerimata: sidusa graafi $G = (V, E)$ serva $e \in E$ nimetatakse *sillaks*, kui selle serva eemaldamisel graafist G muutub graaf mittesidusaks.

Olgu $G = (V, E)$ Euleri graaf. Konstrueeri ahel järgmisel viisil.
Alusta graafi G mingist (suvalisest) tipust u ning liigu sammhaaval mööda graafi servi.

1. Olles teinud sammu mööda serva $e \in E$, kustuta see serv servade hulgast E; kui serva e algtipu aste muutus selle kustutamisega nulliks, siis kustuta ka see tipp hulgast V.
2. Järgmise sammu jaoks serva valides kasuta graafi (V, E) silda ainult muude võimaluste puudumisel.

Jätka, kuni hulgast E on kõik servad kustutatud.

Algoritm 2.1. Fleury' algoritm

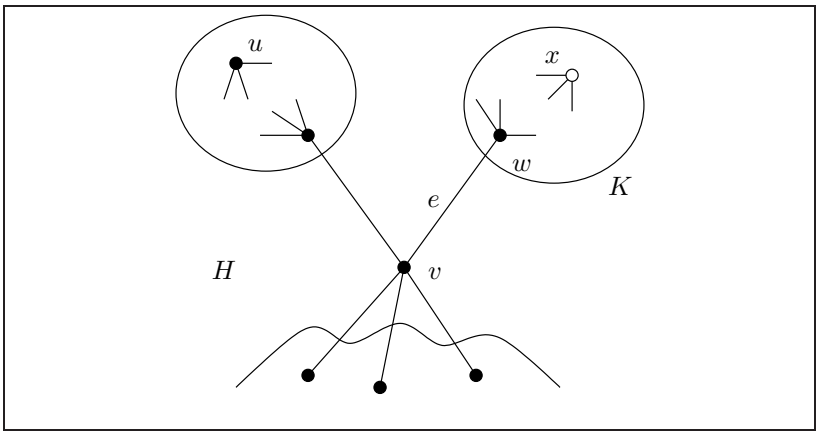
Teoreem 2.4. *Algoritm 2.1 leiab Euleri ahela graafis* $G = (V, E)$.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et kirjeldatud viisil tõepoolest jõutakse seisuni, kus kõik servad on hulgast E kustutatud, s.t. ei teki olukorda, kus hulk E ei ole veel tühi, aga ei ole enam ühtegi serva, et väljuda tipust v, kuhu me algoritmi järgides parasjagu jõudnud oleme. Olgu H graaf, mis graafist G veel järel on. Me näitame, et graaf H on sidus ning u (tipp, kust me graafi läbimist alustasime) on graafi H tipp. Peale selle näitame, et kui $v = u$, siis on graafi H kõigil tippudel paarisarvuline aste, kui aga $v \neq u$, siis on tippudel u ja v paarituarvuline, graafi H kõigil teistel tippudel aga paarisarvuline aste.

On ilmne, et see olukord kehtib algoritmi täitma asudes (siis $v = u$ ja $H = G$). Oletame nüüd, et selline olukord kehtib enne mingi sammu tegemist ning näitame, et ta kehtib ka pärast järjekordset sammu. Viibigu me tipus v ning olgu veel allesolev graafi osa H. Meil on vaja leida tipu v naabertipp v' graafis H nii, et pärast v ja v' vahelise serva kustutamist tekkivas graafis H' säiliks kirjeldatud olukord. Ilmne on, et ükskõik, kuidas me ka tippu v' ei valiks, rahuldab graaf H' olukorra seda osa, mis räägib tippude astmete paarsusest.

Meil tuleb veel näidata, et graaf H' on sidus. Vaatame kõigepealt juhtu $v \neq u$. Piisab, kui me näitame, et graafis H leidub ülimalt üks sild, mis on intsidentne tipuga v. Tõepoolest, kui järgmisel sammul ei kasutata silda, siis on graaf H' sidus. Kui tipuga v on intsidentne ainult üks sild ning seda silda kasutatakse järgmisel sammul, siis oli see sild ainus tipuga v intsidentne serv graafis H ning järgmisel sammul kustutatakse lisaks sellele servale ka tipp v ise (tegelikult polekski tipu kustutamine algoritmis 2.1 vajalik, kuid see teeb käesoleva tõestuse lihtsamaks).

Oletame väitevastaselt, et graafis H on tipuga v intsidentne enam kui üks sild. Sel juhul leidub selline tipp w, et graafi H serv $e = \{v, w\}$ on sild, ning graafi $H - e$ sidus komponent K, mis sisaldab tippu w, ei sisalda tippu u (vaata joonist 2.1). Tipu w aste graafis H on paaris, seega on ta aste graafis K paaritu. Teoreemi 1.1 järgi leidub graafis K veel mingi tipp x, mille aste on paaritu. Aga siis on tipu x aste ka graafis H paaritu ning $x \neq u$ ja $x \neq v$. Saime vastuolu graafis H kehtiva olukorraga.



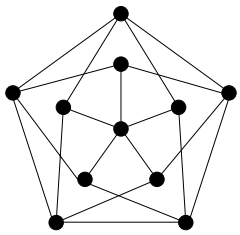
Joonis 2.1. Tipuga v intsidentsed sillad graafis H.

Kui $v = u$ ja u ei ole graafi ainus tipp, siis leiame me samasuguse arutelu tulemusena, et u pole intsidentne ühegi sillaga. Seega on ka sel juhul graaf H' sidus. Samuti jääb tipp u pärast sammu kustutamata, sest temaga on pärast sammu intsidentsed paaritu arv (s.t. rohkem kui null) serva. □

Ülesanded

Ülesanne 18. Selgita, millised järgmistest graafidest ja millistel tingimustel on Euleri või pool-Euleri graafid.

1. K_n;
2. O_n;
3. C_n;
4. P_n;
5. Q_n (n-mõõtmelise ühikkuubi karkass);
6. Pet;
7. $K_{m,n}$;
8. $K_{2,2,2}$;
9. Grötzschi graaf



Ülesanne 19. Vaatleme malendite hulka

$$M = \{Kuningas, Lipp, Vanker, Oda, Ratsu\}.$$

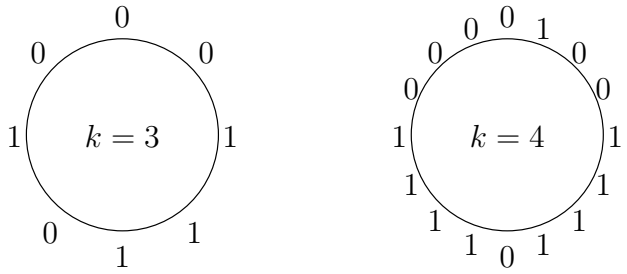
Malendi $X \in M$ graafiks $n \times n$ malelaual nimetame graafi $G_X^{n\times n}$, mille tippude hulgaks on $n \times n$ ruudustiku ruutude hulk ja serv kahe tipu vahele on tõmmatud parajasti siis, kui malendi X ühe käiguga saab ühele tipule vastavalt ruudult liikuda teisele tipule vastavale ruudule. Millise malendi X ja millise arvu n väärtuse korral on graaf $G_X^{n\times n}$ Euleri graaf?

Ülesanne 20. Tõesta, et Euleri graafi servgraaf (vt. ülesanne 9) on samuti Euleri graaf.

Ülesanne 21. Leia, millist tarvilikku ja piisavat tingimust peavad rahuldama graafi G tippude astmed selleks, et $L(G)$ oleks Euleri graaf.

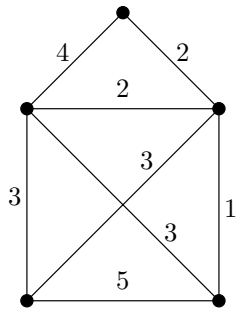
Ülesanne 22. Olgu G Euleri graaf ja $v_1, v_2, v_3 \in V$ ning $e_1, e_2, e_3 \in E$ sellised, et $\mathcal{E}(e_1) = \mathcal{E}(e_2) = \{v_1, v_2\}$ ja $\mathcal{E}(e_3) = \{v_2, v_3\}$ (loeme, et $v_1 \neq v_2 \neq v_3 \neq v_1$ ja $e_1 \neq e_2 \neq e_3 \neq e_1$). Näita, et graafis G leidub selline Euleri ahel, kus servale e_1 järgneb vahetult e_3.

Ülesanne 23. Tõesta, et ringiratast on võimalik paigutada 2^k arvu, igaüks neist kas 0 või 1, nii et iga bitijada $x \in \{0,1\}^k$ esineks ringi kellaosuti liikumise suunas läbides täpselt ühel korral.



Ülesanne 24. Tõesta, et igas sidusas graafis on võimalik leida kinnine ahel, mis läbib iga serva vähemalt üks ja mitte rohkem kui kaks korda.

Ülesanne 25. Leia järgmises graafis minimaalse pikkusega kinnine ahel, mis läbib selle graafi iga serva vähemalt üks kord (Arvud servadel tähistavad nende pikkusi).



3. Hamiltoni graafid

Sidusat suunamata graafi nimetatakse *Hamiltoni graafiks* siis, kui selles graafis leidub kõiki tippe läbiv tsükkel (nn. *Hamiltoni tsükkel*). Mitte-Hamiltoni graafi nimetatakse *pool-Hamiltoni graafiks* siis, kui selles graafis leidub kõiki tippe läbiv lihtahel (nn. *Hamiltoni ahel*).

3.1. Ore teoreem

Lemma 3.1. *Kui U ja W on arvuhulga $M = \{1, ..., n-2\}$ kaks sellist alamhulka, et $1 \in U$, $n-2 \in W$ ja $|U| + |W| \geqslant n \geqslant 4$, siis leidub $i < n-2$, nii et $i \in W$ ja $i+1 \in U$.*

Tõestus. Olgu $W^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{i+1 \mid i \in W \backslash \{n-2\}\}$. Oletame väitevastaselt, et teoreemi eeldused on täidetud, kuid väide mitte, s.t. kui $i \in W$, siis $i+1 \notin U$. See aga tähendab, et $U \cap W^+ = \emptyset$ ja järelikult kehtib valem

$$|U \cup W^+| = |U| + |W^+|.$$

Ühelt poolt $U \cup W^+ \subseteq M$ ja seega $|U \cup W^+| \leqslant n-2$. Teiselt poolt aga kujutuse $^+ \colon i \mapsto i+1$ injektiivsuse tõttu $|W^+| = |W| - 1$ ning

$$|U| + |W^+| = |U| + |W| - 1 \geqslant n-1,$$

mis viib vastuolule. Lemma on tõestatud. □

Teoreem 3.2 (Ore, 1960). *Kui $G = (V, E)$ on $n \geqslant 3$ tipuga lihtgraaf, kus suvalise paari $\{u, w\} \notin E$ korral kehtib seos*

$$\deg(u) + \deg(w) \geqslant n, \tag{3.1}$$

siis graafis G leidub Hamiltoni tsükkel.

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et leiduvad n-tipulised mitte-Hamiltoni graafid, milles (3.1) on tõene iga $\{u, w\} \notin E$ jaoks. Olgu kõikide selliste n-tipuliste graafide klass $\mathcal{G}_n$. Märgime esmalt, et kui $n = 3$, siis ainus tingimust (3.1) rahuldav graaf on täisgraaf K_3, milles loomulikult leidub ka Hamiltoni tsükkel. Olgu $n \geqslant 4$ ja $G = (V, E)$ selline graaf klassist $\mathcal{G}_n$, kus on maksimaalselt palju servi, s.t. ükskõik

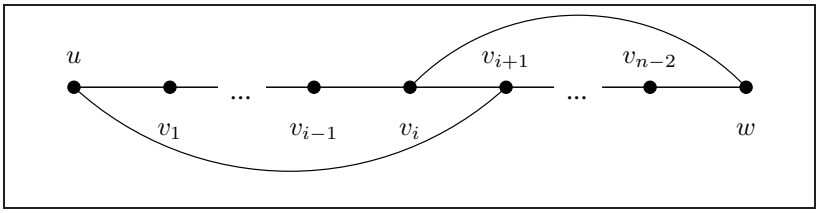
millise serva edasine lisamine muudab graafi Hamiltoni graafiks, sest tingimus (3.1) jääb servade lisamisel alati kehtima. Lisamegi graafile G ühe serva e juurde ja oletame, et selle tegevuse tulemusena tekib Hamiltoni tsükkel:

$$u = v_0 — v_1 — v_2 — \ldots — v_{n-2} — v_{n-1} = w \overset{e}{—} u.$$

Seega peab juba esialgses graafis G leiduma Hamiltoni ahel, mis algab tipust u ja lõpeb tipus w, kusjuures $\{u, w\} \notin E$. Tipupaari $\{u, w\}$ jaoks kehtib võrratus (3.1). Olgu $U = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n-2,\ \{u, v_i\} \in E\}$ ja $W = \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant n-1,\ \{v_j, w\} \in E\}$. On selge, et U ja W on hulga $M = \{1, ..., n-2\}$ alamhulgad ning $|U| = \deg(u)$ ja $|W| = \deg(w)$. Vastavalt võrratusele (3.1) saame, et $|U| + |W| \geqslant n$. Seega kehtivad lemma 3.1 eeldused ja lemmast tulenevalt leidub i nii, et $i \in W$ ja $i+1 \in U$, s.t. leidub tipp v_i nii, et $\{v_i, w\} \in E$ ja $\{u, v_{i+1}\} \in E$ (vaata joonist 3.1). Siit aga järeldub, et graafis G peab leiduma Hamiltoni tsükkel

$$u — v_{i+1} — ... — v_{n-2} — w — v_i — v_{i-1} — ... — v_1 — u,$$

mis on aga vastuolus eeldusega. □



Joonis 3.1. Hamiltoni ahel ⇒ Hamiltoni tsükkel.

Ore teoreemi tõestades oleme me muuhulgas tegelikult andnud tõestuse ka järgmisele tulemusele:

Lause 3.3. *Kui $G = (V, E)$ on lihtgraaf ning $u, w \in V$ on sellised, et $\{u, w\} \notin E$ ja $\deg(u) + \deg(w) \geqslant |V|$, siis leidub graafis G Hamiltoni tsükkel parajasti sel juhul, kui graafis $G' = G + \{u, w\}$ leidub Hamiltoni tsükkel.*

Tõestus. Tarvilikkus ($\Rightarrow$) on ilmne, sest kui G on Hamiltoni graaf, siis ka G' on Hamiltoni graaf — servi juurde lisades ei saa Hamiltoni tsükkel ära kaduda.

Piisavuse ($\Leftarrow$) näitamiseks eeldame, et C on mingi Hamiltoni tsükkel graafis G'. Kui ta ei sisalda serva $\{u, w\}$, siis on ta ka Hamiltoni tsükkel graafis G. Kui ta aga sisaldab serva $\{u, w\}$, siis on meil (analoogiliselt Ore teoreemi tõestusega) graafis G Hamiltoni ahel tipust u tippu w. Jällegi õnnestub meil leida selles ahelas kaks naabertippu v_i ja v_{i+1} (me loeme, et indeksid kasvavad tipu w poole minnes) nii, et $\{u, v_{i+1}\} \in E$ ja $\{v_i, w\} \in E$ (vaata joonist 3.1). See annabki meile Hamiltoni tsükli graafis G. □

3.2. Ore sulund

Olgu $G = (V, E)$ mingi n-tipuline lihtgraaf. Graafi G *ülemgraafiks* nimetatakse suvalist graafi (V, E_1), nii et $E \subseteq E_1$. Tipu v astmeks ülemgraafis (V, E_1) nimetatakse naturaalarvu

$$\deg_{E_1}(v) \stackrel{\text{def}}{=} |\{w \mid \{v, w\} \in E_1\}|.$$

On lihtne veenduda, et tipu aste ülemgraafis on vähemalt niisama suur kui graafis endas, s.t. kui $E \subseteq E_1$, siis mistahes tipu $v \in V$ korral $\deg_E(v) \leqslant \deg_{E_1}(v)$.

Olgu $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ mingi graafide pere, kusjuures $G_\iota = (V, E_\iota)$. Pere $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ *lõikeks* nimetatakse graafi

$$\bigcap_{\iota \in I} G_\iota = (V, \bigcap_{\iota \in I} E_\iota).$$

Graafi $G = (V, E)$ nimetatakse *Ore-kinniseks* siis, kui selle mistahes tipupaari $u \neq v$ korral osutub tõeseks implikatsioon

$$\deg_E(u) + \deg_E(v) \geqslant |V| \implies \{u, v\} \in E. \tag{3.2}$$

Lemma 3.4. *Kui $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ on Ore-kinniste graafide mittetühi pere, siis selle pere lõige G on samuti Ore-kinnine.*

Tõestus. Olgu $G_\iota = (V, E_\iota)$, $G = (V, E)$ ning $u, v \in V$ mingi erinevate tippude paar, mille puhul

$$\deg_E(u) + \deg_E(v) \geqslant n = |V|.$$

Et iga $\iota \in I$ korral $E \subseteq E_\iota$, siis järelikult iga $\iota \in I$ korral

$$\deg_{E_\iota}(u) + \deg_{E_\iota}(v) \geqslant \deg_E(u) + \deg_E(v) \geqslant n,$$

millest graafide G_ι Ore-kinnisuse tõttu järeldub $\forall \iota : \{u, v\} \in E_\iota$, ehk $\{u, v\} \in E$. Järelikult on G ise ka Ore-kinnine. □

Graafi G *Ore sulundiks* $\mathcal{O}(G)$ nimetatakse graafi G kõikide Ore-kinniste ülemgraafide lõiget. Selle määratluse korrektsus tuleneb faktist, et n-tipulisel graafil G leidub alati vähemalt üks Ore-kinnine ülemgraaf, milleks on täisgraaf K_n.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, kusjuures $|V| = n$.

1. Leia $u, v \in V$ nii, et $\{u, v\} \notin E$ ja $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$. Kui selliseid tippe u ja v ei leidu, siis väljasta graaf G ja lõpeta töö.
2. Lisa hulka E uus serv $\{u, v\}$ ja mine punkti 1.

Algoritm 3.1. Ore sulundi leidmise algoritm

Algoritm 3.1 leiab, nagu selgub, graafi $G = (V, E)$ Ore sulundi. Uurime seda algoritmi lähemalt. Nagu me näeme, on algoritm 3.1 mittedeterministlik — esimesel sammul võib ta valida ükskõik millise tipupaari, mis teatavat tingimust rahuldab. Graafi Ore sulund on seevastu üheselt määratud. Näitamegi kõigepealt, et algoritmi 3.1 töö tulemus (graaf, mille ta lõpuks väljastab) ei sõltu tema mittedeterministlikest valikutest.

Lemma 3.5. *Algoritmi 3.1 väljund ei sõltu tippude u, v valikust tema esimeses punktis.*

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et leidub selline graaf $G = (V, E)$, mida algoritmi 3.1 sisendiks andes võime väljundiks saada mitu erinevat graafi. Olgu $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$ kaks erinevat võimalikku väljundit, s.t. $E_1 \neq E_2$.

Olgu $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \ldots, \{u_k, v_k\}$ servad, mis algoritm lisab (seejuures lisamine toimub toodud järjekorras) graafile G, saamaks graafi G_1. Samuti, olgu $\{u'_1, v'_1\}, \ldots, \{u'_l, v'_l\}$ servad, mis algoritm lisab graafile G, saamaks graafi G_2. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et

$E_1 \setminus E_2 \neq \emptyset$ (vastasel juhul vahetame ära graafid G_1 ja G_2). Sel juhul leidub servade $\{u_1, v_1\}, \ldots, \{u_k, v_k\}$ seas mõni, mis pole ükski servadest $\{u'_1, v'_1\}, \ldots, \{u'_l, v'_l\}$. Olgu $i \in \{1, \ldots, k\}$ vähim selline indeks, et $\{u_i, v_i\}$ pole ükski servadest $\{u'_1, v'_1\}, \ldots, \{u'_l, v'_l\}$.

Graaf $G' = (V, E')$, kus $E' = E \cup \big\{\{u_1, v_1\}, \ldots, \{u_{i-1}, v_{i-1}\}\big\}$, on siis graafi G_2 alamgraaf, sest kõik tema servad leiduvad ka graafis G_2. Algoritmist 3.1 saame $\deg_{E'}(u_i) + \deg_{E'}(v_i) \geqslant |V|$, sest see algoritm lisas graafile G' serva $\{u_i, v_i\}$. Ülemgraafiks olemise tõttu siis ka $\deg_{E_2}(u_i) + \deg_{E_2}(v_i) \geqslant |V|$. Peale selle on tipud u_i ja v_i graafis G_2 servaga ühendamata, sest ükski lisatud servadest (tegemaks graafist G graafi G_2) pole $\{u_i, v_i\}$. Seega pole algoritm 3.1, olles jõudnud graafini G_2, oma tööd veel lõpetanud — punktis 1 on tal veel võimalik valida tipupaar (mille moodustavad u_i ja v_i), mis rahuldab antud tingimusi. □

Osutub et algoritm 3.1 on monotoonne järgmise lemma mõttes.

Lemma 3.6. *Kui $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$ on kaks sellist lihtgraafi, et $E_1 \subseteq E_2$, ning $G'_1 = (V, E'_1)$ ja $G'_2 = (V, E'_2)$ algoritmi 3.1 väljundid, mis vastavad sisenditele G_1 ja G_2, siis $E'_1 \subseteq E'_2$.*

Tõestus. Olgu $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \ldots, \{u_k, v_k\}$ servad, mis algoritm lisab (seejuures lisamine toimub toodud järjekorras) graafile G_1, saamaks graafi G'_1. Oletame väitevastaselt, et mõni neist servadest ei esine graafis G'_2. Olgu $i \in \{1, \ldots, k\}$ vähim indeks, nii et serv $\{u_i, v_i\}$ ei esine graafis G'_2.

Tähistame $E' = E_1 \cup \big\{\{u_1, v_1\}, \ldots, \{u_{i-1}, v_{i-1}\}\big\}$ ning vaatleme graafi $G' = (V, E')$. Siis G' on graafi G'_2 alamgraaf. Jällegi osutub tõeseks $\deg_{E'}(u_i) + \deg_{E'}(v_i) \geqslant |V|$, seega ka $\deg_{E'_2}(u_i) + \deg_{E'_2}(v_i) \geqslant |V|$, kuid samal ajal $\{u_i, v_i\} \notin E'_2$. Seega pole algoritm 3.1, jõudnuna graafini G_2, veel oma tööd lõpetanud. □

Lause 3.7. *Algoritm 3.1 leiab graafi Ore sulundi.*

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf ja $G' = (V, E')$ algoritmi 3.1 väljund sisendi G korral. Algoritmi punktist 1 järeldub, et kõigi $u, v \in V$ jaoks, kus $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(v) \geqslant |V|$, kehtib $\{u, v\} \in E'$, seega on G' Ore-kinnine.

Samuti tuleneb algoritmi punktist 1, et kui algoritmi sisendiks on mingi Ore-kinnine graaf, siis lõpetab algoritm kohe töö ning väljastab sellesama graafi. Muuhulgas, kui algoritmi sisendiks on $\mathcal{O}(G)$, siis ka tema väljundiks on $\mathcal{O}(G)$.

Et $\mathcal{O}(G)$ on G ülemgraaf, siis vastavalt lemmale 3.6 peab $\mathcal{O}(G)$ olema ka G' ülemgraaf. Samas on $\mathcal{O}(G)$ graafi G vähim Ore-kinnine ülemgraaf (järeldub otseselt Ore sulundi definitsioonist). Graafi G' Ore-kinnisus annabki meile nüüd, et $G' = \mathcal{O}(G)$. □

Algoritmi 3.1 tõime me sisse selleks, et tõestada järgmine tulemus.

Lause 3.8. *Graaf osutub Hamiltoni graafiks parajasti siis, kui tema Ore sulund on Hamiltoni graaf.*

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ning $\{u_1, v_1\}, \ldots, \{u_k, v_k\}$ need servad, mis Ore sulundi leidmise algoritm lisab (antud järjekorras) graafile G. Defineerime graafid $G_0, \ldots, G_k$ järgmiselt:

$$G_0 \stackrel{\text{def}}{=} G,$$
$$G_i \stackrel{\text{def}}{=} G_{i-1} + \{u_i, v_i\} \ .$$

Vastavalt Ore sulundi leidmise algoritmi konstruktsioonile ning lausele 3.3 on G_{i-1} Hamiltoni graaf parajasti siis, kui G_i on Hamiltoni graaf. Samas aga $G_0 = G$ ja $G_k = \mathcal{O}(G)$. □

Järeldus 3.9. *Kui n-tipulise graafi G Ore sulund $\mathcal{O}(G)$ on K_n, siis G on Hamiltoni graaf.*

Tõestus järeldub sellest, et K_n on Hamiltoni graaf. □

Teoreem 3.10. *Igas n-tipulises mitte-Hamiltoni graafis leidub mingi $k < n/2$ korral k tippu v astmega* $\deg(v) \leqslant k$ *ja $n - k$ tippu w astmega* $\deg(w) < n - k$.

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ mingi n-tipuline mitte-Hamiltoni graaf. Vastavalt järeldusele 3.9 teame, et $\mathcal{O}(G) = (V, E') \neq K_n$, s.t. leiduvad tipud $u, w \in V$ nii, et $\{u, w\} \notin E'$. Valime tipud u ja w nii, et summa $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w)$ oleks maksimaalne. Sealjuures muidugi

$$\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w) \leqslant n - 1, \tag{3.3}$$

sest muidu oleks Ore sulundi definitsiooni kohaselt $\{u, w\} \in E'$. Defineerime nüüd kaks hulka:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{u' \mid u' \neq u,\ \{u', u\} \notin E'\}, \quad W \stackrel{\text{def}}{=} \{w' \mid w' \neq w,\ \{w', w\} \notin E'\}.$$

Et summa (3.3) on u ja w valiku kohaselt maksimaalne, siis järelikult mistahes $u' \in U$ ja $w' \in W$ korral kehtivad võrratused

$$\deg_{E'}(w') \leqslant \deg_{E'}(u), \qquad \deg_{E'}(u') \leqslant \deg_{E'}(w). \tag{3.4}$$

Hulkade U ja W võimsused avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned} |U| &= |V| - |\{u\}| - |\{v \mid (u, v) \in E'\}| = n - 1 - \deg_{E'}(u) \\ |W| &= |V| - |\{w\}| - |\{v \mid (w, v) \in E'\}| = n - 1 - \deg_{E'}(w). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Üldisust kitsendamata võib eeldada, et $\deg_{E'}(u) \leqslant \deg_{E'}(w)$. Olgu $k \stackrel{\text{def}}{=} \deg_{E'}(u)$. Võrratusest (3.3) tuleneb, et $2k \leqslant n - 1$ ja seega $k < n/2$. Jällegi võrratusest (3.3) saame, et

$$|W| = n - 1 - \deg_{E'}(w) \geqslant \deg_{E'}(u) = k,$$

s.t. hulgas W on vähemalt k tippu. Võrratustest (3.4) järeldub, et

$$\deg_E(w') \leqslant \deg_{E'}(w') \leqslant \deg_{E'}(u) = k$$

mistahes tipu $w' \in W$ korral. Seega oleme tõepoolest leidnud (vähemalt) k tippu, mille astmed ei ületa arvu k. Jääb veel üle näidata, et leidub $n - k$ tippu astmetega alla $n - k$. Võrdustest (3.5) tuleneb otseselt, et $|U| = n - k - 1$ ja samuti

$$\deg_E(u') \leqslant \deg_{E'}(u') \leqslant \deg_{E'}(w) \leqslant n-1-\deg_{E'}(u) = n-1-k < n-k$$

iga tipu $u' \in U$ korral. Seega on meil õnnestunud leida $n-k-1$ tippu, mille aste on väiksem kui $n - k$. Teoreemi lõplikuks tõestamiseks tuleks veel kusagilt leida üks tipp väljaspool hulka U, mille aste on väiksem kui $n - k$. Lihtne on aga veenduda, et selleks tipuks sobib u ise. Tõepoolest,

$$\deg_E(u) \leqslant \deg_{E'}(u) \leqslant \deg_{E'}(w) < n - k,$$

millega teoreemi väide on täielikult tõestatud. □

Ülesanded

Ülesanne 26. Selgita, millised ülesandes 18 toodud graafidest ja millistel tingimustel on

1. Hamiltoni graafid;
2. Pool-Hamiltoni graafid.

Ülesanne 27. Tõesta, et kui $n \geqslant 3$, siis $\overline{Q_n}$ on Hamiltoni graaf.

Ülesanne 28. Tõesta, et kui G on paaritu arvu tippudega kahealuseline graaf, siis G pole Hamiltoni graaf.

Ülesanne 29. Selgita, millise malendi X ja millise arvu n väärtuse korral on graaf $G_X^{n \times n}$ Hamiltoni graaf?

Ülesanne 30. Näita, et kui graafis $G = (V, E)$ leidub selline tipuhulk $V' \subseteq V$, et graafil $G \backslash V'$ on rohkem sidusaid komponente kui hulgas V' elemente, siis pole G Hamiltoni graaf.

Ülesanne 31. *Turniir* on suunatud graaf, kus iga kahe tipu vahel on täpselt üks kaar (mingit pidi orienteeritud). Näita, et igas turniiris leidub suunatud Hamiltoni ahel.

Ülesanne 32. Tõesta, et Euleri graafi servgraaf on Hamiltoni graaf.

Ülesanne 33. Tõesta, et Hamiltoni graafi servgraaf on samuti Hamiltoni graaf.

Ülesanne 34. Graafi nimetame *Hamiltoni-sidusaks*, kui tema iga kahe tipu jaoks leidub Hamiltoni ahel, mille otstippudeks need tipud osutuvad. Kas graaf Q_3 on Hamiltoni-sidus?

Ülesanne 35.

1. Leia graafis K_9 neli ühiste servadeta Hamiltoni tsüklit.
2. Tõesta, et graafis K_{2k+1} ei saa leiduda üle k ühiste servadeta Hamiltoni tsükli.
3. Tõesta, et graafis K_{2k+1} leidub täpselt k ühiste servadeta Hamiltoni tsüklit.

4. Puud

Mets on lihtgraaf, milles puuduvad tsüklid. *Puu* on sidus mets. See on kõigest üks viis puid defineerida, järgmine teoreem annab mitu alternatiivset versiooni.

Teoreem 4.1. *Olgu T lihtgraaf, millel on n tippu. Järgmised väited on kõik üksteisega samaväärsed.*

(i) T on puu (s.t. sidus ja tsükliteta).

(ii) T on tsükliteta graaf, millel on $n-1$ serva.

(iii) T on sidus graaf, millel on $n-1$ serva.

(iv) T on sidus ning iga tema serv on sild.

(v) T suvalise kahe tipu vahel on täpselt üks lihtahel.

(vi) T on tsükliteta, aga mistahes uue serva lisamisel tekib tsükkel.

Tõestus. **(i)⇒(ii).** Kerge on veenduda, et igas n-tipulises puus on täpselt $n-1$ serva. Tõepoolest, kui $n=1$, on asi selge. Oletame, et esitatud väide kehtib $n-1$ korral (s.t. igas $(n-1)$-tipulises puus on $n-2$ serva) ja $T=(V,E)$ on mingi n-tipuline puu. Vastavalt teoreemile 1.2 leidub graafis T vähemalt üks tipp v astmega 1 (nullise astmega tippe ei leidu sidususe tõttu). Olgu $w \in V$ selline tipp, et $\{v,w\} \in E$. Indutseeritud $(n-1)$-tipuline alamgraaf T' tippude hulgaga $V \backslash \{v\}$ on samuti sidus ja tsükliteta, s.t. puu, milles tehtud oletuse kohaselt on $n-2$ serva. Järelikult on graafis T servi täpselt $n-1$.

(ii)⇒(iii). Graafi T kõik sidusad komponendid on tsükliteta, s.t. nad on puud. Vastavalt järeldusele (i)⇒(ii) on neis kõigis servi ühe võrra vähem kui tippe. Seega on graafis T servi tippudest vähem sidusate komponentide arvu võrra. Vastavalt eeldusele on servi ühe võrra vähem kui tippe, seega on sidusate komponentide arv 1.

(iii)⇒(iv). Sarnaselt tõestuse (i)⇒(ii) arutlusele saame näidata, et igas sidusas n-tipulises graafis on vähemalt $n-1$ serva. Kui meil on nüüd antud sidus graaf T, millel on n tippu ja $n-1$ serva, siis mingi serva eemaldamisel, saame $n-2$ servaga graafi, mis peab olema mittesidus. Seega pidi eemaldatud serv olema sild.

(iv)⇒(i). Kui graafis T leiduks mõni tsükkel, siis mõne sellesse tsüklisse kuuluva serva eemaldamisel jääks graaf endiselt sidusaks. Seega tsüklisse kuuluvad servad ei ole sillad.

(i)⇒(v). Et T on sidus, siis on tema iga kahe tipu vahel vähemalt üks lihtahel. Kui mingite tippude u ja v vahel leidub enam kui üks lihtahel, siis moodustavad need kaks lihtahelat või nende osad tsükli.

(v)⇒(vi). Kui graafis T leiduks tsükkel, siis oleks kahe sellel tsüklil asuva tipu vahel vähemalt kaks erinevat lihtahelat. Kui me lisame graafile T uue serva e tippude u ja v vahele, siis on $u \overset{P}{\rightsquigarrow} v \overset{e}{—} u$ graafi $T + e$ tsükkel, kus P on vastavalt eeldustele leiduv ahel tippude u ja v vahel.

(vi)⇒(i). Oletame, et T on mittesidus. Lisades talle serva, mis ühendab kaht erinevatesse sidusatesse komponentidesse kuuluvat tippu, ei teki tsüklit. □

Järeldus 4.2. *Kui puus leidub lihtahel $u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$, siis*
$$d(u, w) = d(u, v) + d(v, w).$$

Tõestus. Järeldub teoreemi 4.1 väitest (v). Tippude u ja w kaugus on nende kahe tipu vahel oleva ainsa lihtahela pikkus, see lihtahel läbib tippu v. □

Sidusa graafi G *aluspuuks* (ehk *toeseks*, ehk *skeletiks*) nimetatakse tema alamgraafi T, mis on puu ja mis sisaldab graafi G kõiki tippe. Graafi aluspuu kujutab endast mingis mõttes lihtsaimat viisi graafi kõigi tippude kokkuühendamiseks.

Kui meil on defineeritud graafi G servade *kaalud* (s.t. antud mingi funktsioon $\omega : E(G) \longrightarrow \mathbb{R}$) ning on antud G mingi aluspuu T, siis me võime defineerida ka T kaalu $\omega(T)$ kui T kõigi servade kaalude summa. Erinevate aluspuude kaalud võivad üldiselt erinevad olla, kuid meid huvitab graafi G minimaalse kaaluga aluspuu leidmine.

Teoreem 4.3. *Algoritm 4.1 leiab sidusa graafi G minimaalse kaaluga aluspuu T.*

Tõestus. See, et T on graafi G aluspuu, järeldub teoreemist 4.1. Vastavalt konstruktsioonile on T graaf, milles on n tippu, $n-1$ serva ja puuduvad tsüklid, s.t. T rahuldab teoreemi 4.1 väidet (ii). Meil tuleb veel näidata, et T on minimaalse kaaluga.

Olgu $G = (V, E)$ sidus graaf, milles on n tippu. Konstrueeri puu T kui graafi G alamgraaf, mille tipuhulk on V ja servad valitakse järgmiselt.

1. Vali servaks e_1 graafi G minimaalse kaaluga serv.
2. Vali iga $j \in \{2, \ldots, n-1\}$ korral servaks e_j minimaalse kaaluga serv, nii et e_j on erinev servadest $e_1, \ldots, e_{j-1}$ ja ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{j-1}$ tsüklit.
3. Väljasta $T = (V, \{e_1, \ldots, e_{n-1}\})$.

Algoritm 4.1. Minimaalse kaaluga aluspuu leidmise algoritm (Kruskali algoritm).

Olgu T' graafi G selline aluspuu, mis on minimaalse kaaluga ja omab minimaalse kaaluga aluspuude seas puuga T maksimaalse arvu ühiseid servi. Oletame väitevastaselt, et $\omega(T') < \omega(T)$, sel juhul $T' \neq T$. Olgu $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ vähim selline arv, et algoritmis 4.1 valitud serv e_k ei kuulu puusse T'. Olgu S graafi G alamgraaf, mis saadakse serva e_k lisamisel puule T'. Graaf S sisaldab tsükleid, olgu C selle graafi üks tsükkel. See tsükkel peab sisaldama serva e_k, kuid ta peab sisaldama ka mingit serva e, mis ei kuulu puusse T. Kui me kustutame graafist S serva e, siis me saame mingi graafi T'', mis on jälle G aluspuu — graaf T'' on sidus ja tal on $n-1$ serva.

Servad $e_1, \ldots, e_{k-1}$ kuuluvad ka puusse T'. Vastavalt meie konstruktsioonile on e_k minimaalse kaaluga graafi G selliste servade hulgas, mis pole võrdsed servadega $e_1, \ldots, e_{k-1}$ ning ei moodusta koos nende servadega tsüklit graafis G. Ka serv e on üks graafi G sellistest servadest, mis pole võrdsed servadega $e_1, \ldots, e_{k-1}$ ning ei moodusta koos nende servadega tsüklit graafis G. Seetõttu $\omega(e_k) \leqslant \omega(e)$. Järelikult $\omega(T'') \leqslant \omega(T')$ ning puul T'' on puuga T rohkem ühiseid servi kui puul T', mis annab vastuolu T' valikuga. □

Ülesanded

Ülesanne 36. Näita, et sidus graaf on puu parajasti siis, kui ta on kahealuseline ja iga kahe tipu jaoks on nendevaheline lühim ahel

unikaalne.

Ülesanne 37. Leia puu kõigi tippude astmete summa.

Ülesanne 38. Tõesta, et kui puus on vähemalt kaks tippu, leidub seal ka vähemalt kaks *lehte* (ehk *rippuvat tippu*) — tippu astmega 1.

Ülesanne 39. Tõesta, et puul T on kas üks tsenter või kaks omavahel servaga ühendatud tsentrit (vt. ülesanne 10) ning et esimene juht esineb parajasti siis, kui $\mathsf{d}(T)$ on paaris.

Ülesanne 40. Tõesta, et kui T on puu, siis

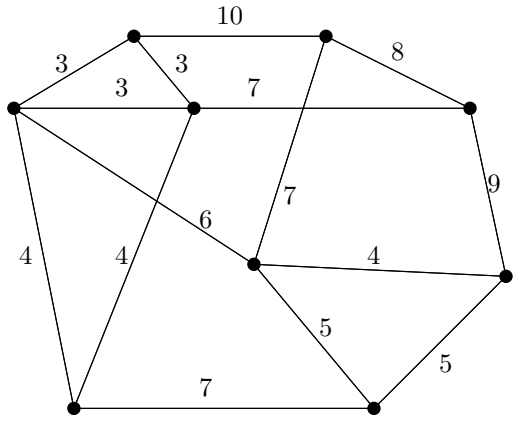
$$\mathsf{r}(T) = \left\lceil \frac{\mathsf{d}(T)}{2} \right\rceil,$$

siin $\lceil x \rceil$ tähistab reaalarvu x ülemist täisosa.

Ülesanne 41. Olgu T puu. Tõesta, et kehtib üks kahest väitest:

1. $\exists v \in V(T) : \forall \phi \in \mathrm{Aut}(T) : \phi(v) = v$ või
2. $\exists \{u, v\} \in E(T) : \forall \phi \in \mathrm{Aut}(T) : \phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$.

Ülesanne 42. Leia järgmise graafi minimaalse kaaluga aluspuu.



Ülesanne 43. Kas võib väita, et iga sidusa graafi kahel suvalisel aluspuul on vähemalt üks ühine serv?

Ülesanne 44. Kui mitu paarikaupa mitteisomorfset aluspuud on graafil $K_{2,n}$?

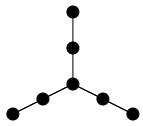
Ülesanne 45. Selgita, kas on tõene väide, et sidusa graafi G korral

1. $\forall e \in E(G) : \exists$ aluspuu $T : e \in E(T)$;
2. $\forall e_1 \neq e_2 \in E(G) : \exists$ aluspuu $T : e_1, e_2 \in E(T)$;
3. $\forall e_1 \neq e_2 \neq e_3 \neq e_1 \in E(G) : \exists$ aluspuu $T : e_1, e_2, e_3 \in E(T)$.

Ülesanne 46. Kas võib väita, et kui graafi diameeter on k, siis leidub selles graafis aluspuu diameetriga k?

Ülesanne 47. Näita, et graafi Q_n suvalise aluspuu diameeter on vähemalt $2n - 1$. Konstrueeri Q_n aluspuu diameetriga $2n - 1$.

Ülesanne 48. Puu on *tõuk*, kui temast kõigi tema lehtede kustutamisel alles jääv graaf on ahel. Näita, et puu on tõuk parajasti siis, kui kõrvalolev graaf ei sisaldu temas alamgraafina.



5. Märgendatud puud

Märgendatud graafiks märgendite hulgaga $M \subset \mathbb{N}$ nimetatakse kolmikut $G_M = (V, E, \mu)$, kus $G = (V, E)$ on graaf ja $\mu : V \longrightarrow M$ bijektiivne kujutus.

Märgendatud graafe $G_M^1 = (V_1, E_1, \mu_1)$ ja $G_M^2 = (V_2, E_2, \mu_2)$ nimetatakse isomorfseteks (tähistatakse $G_M^1 \cong G_M^2$), kui leidub kujutus $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$, mis on graafide $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ isomorfism ja $\mu_1(v) = \mu_2(\varphi(v))$ iga $v \in V_1$ korral, s.t. järgmine diagramm on kommutatiivne:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ {\scriptstyle \mu_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_2} \\ M & = & M \end{array} \tag{5.1}$$

Paneme tähele, et märgendatud graafid saavad isomorfsed olla ainult siis, kui nende märgendite hulgad on võrdsed. Kui $G = (V, E)$ on puu, siis graafi $G_M = (V, E, \mu)$ nimetatakse *märgendatud puuks*. Käesolevas peatükis on meie eesmärgiks leida, kui palju on n-tipulisi paarikaupa mitteisomorfseid märgendatud puid.

Algoritm 5.1 seab igale n-tipulisele ($n \geqslant 2$) märgendatud puule $G_M = (V, E, \mu)$ märgendite hulgaga M vastavusse teatud $(n-2)$-elemendilise (hulka M kuuluvate) märgendite järjendi, mida nimetatakse märgendatud puu *Prüferi koodiks* ja tähistatakse $\wp(G_M)$.

1. Võta $\wp(G) = [\,]$, s.t. lähtekood on tühi.
2. Kui $|V| = 2$, siis tagasta senikonstrueeritud $\wp(G)$.
3. Leia vähima märgendiga leht v. Olgu w tema naabertipp.
4. Lisa senikoostatud koodi lõppu märgend $\mu(w)$.
5. Eemalda graafist G tipp v ja serv $\{v, w\}$ ning mine punkti 2.

Algoritm 5.1. Prüferi koodi leidmine

Olgu $T_M = (V, E, \mu)$ märgendatud puu ja $v \in V$ mingi leht. Tähistame edaspidi sümboliga $T \backslash v$ märgendatud puud märgendite hulgaga $M \backslash \{\mu(v)\}$, mis on saadud puust T lehe v eemaldamisel koos

teda ühendava servaga, kusjuures kõikide muude tippude märgendid jäävad samaks. Sel juhul saab koodi $\wp(T)$ leidmise algoritmi formaalselt kirja panna järgmisel viisil:

$$\wp(T) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} [\,], & \text{kui } |T| = 2; \\ [\mu(w)\wp(T\backslash v)]\,, & \text{kui } |T| > 2, \end{cases} \tag{5.2}$$

kus $\mu(v) = \min\limits_{\deg(u)=1} \mu(u)$ ja $\{v, w\} \in E$.

Lemma 5.1. *Kui $\wp(T) = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}]$, ja v on minimaalse märgendiga tipp, siis $\wp(T\backslash v) = [m_2 \dots m_{n-2}]$.*

Tõestus tuleneb otseselt algoritmi 5.1 kirjeldusest. □

Lemma 5.2. *Märgendi $\mu(v)$ esinemiste arv koodis $\wp(T_M)$ on täpselt* $\deg_T(v) - 1$.

Tõestus. Kasutame induktsiooni tippude arvu järgi. Väide kehtib $|V| = 2$ korral, sest siis on puus parajasti kaks tippu, mille astmed on mõlemal ühed ning Prüferi kood on tühi, s.t. mõlemad märgendid esinevad koodis täpselt 0 korda.

Oletame, et väide kehtib kõigi $(n-1)$-tipuliste märgendatud puude korral (märgendite mistahes $(n-1)$-elemendiliste hulkadega). Olgu $T = (V, E, \mu)$ mingi n-tipuline märgendatud puu märgendite hulgaga M ja Prüferi koodiga $[m_1 m_2 \dots m_{n-2}]$.

Olgu $v \in V$ minimaalse märgendiga leht selles puus ja $\{v, w\} \in E$. Vastavalt algoritmile 5.1 on $\mu(w) = m_1$. Seega $T' = T\backslash v$ on $(n-1)$-tipuline märgendatud puu märgendite hulgaga $M\backslash\{m_1\}$ ja vastavalt Lemmale 5.1 kehtib $\wp(T') = [m_2 \dots m_{n-2}]$. Kui $u \in V$ on puu T suvaline tipp, siis leidub kolm võimalust.

- Kui $u = v$, siis on selge, et $\deg(u) = 1$ ja $\mu(u)$ ei esine kordagi Prüferi koodis $\wp(T)$, sest v eemaldatakse juba esimesel sammul.
- Kui $u = w \in T'$, siis $\deg_{T'}(u) = \deg_T(u) - 1$ ja $\mu(u) = m_1$ esineb koodis $\wp(T') = [m_2 \dots m_{n-2}]$ ühe korra vähem kui koodis $\wp(T) = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}]$. Et vastavalt induktsiooni eeldusele

$\mu(u) = m_1$ esineb koodis $\wp(T')$ täpselt $\deg_{T'}(u) - 1$ korda, siis järelikult esineb ta koodis $\wp(T)$ ühe korra rohkem, s.t.

$$(\deg_{T'}(u) - 1) + 1 = \deg_{T'}(u) = \deg_T(u) - 1$$

korda.

- Kui $u \in V \backslash \{v, w\}$, siis järelikult $\{v, u\} \notin E$ (sest $\deg_T(v) = 1$ ja $\{u, w\} \in E$), mistõttu $\deg_T(u) = \deg_{T'}(u)$. Kujutuse μ injektiivsuse tõttu $\mu(u) \neq m_1 = \mu(w)$ ja seega esineb $\mu(u)$ koodis $\wp(T)$ täpselt sama arv kordi nagu koodis $\wp(T')$, s.t. vastavalt induktsiooni oletusele

$$\deg_{T'}(u) - 1 = \deg_T(u) - 1$$

korda. Lemma on tõestatud. □

Teoreem 5.3. *Kui $T^1_M = (V_1, E_1, \mu_1)$ ja $T^2_M = (V_2, E_2, \mu_2)$ on märgendatud puud ühise märgendite hulgaga M ning $\wp(T^1_M) = \wp(T^2_M)$, siis $T^1_M \cong T^2_M$.*

Tõestus. Kasutame ka siin induktsiooni tippude arvu järgi. See on võimalik, sest puu tippude arv on Prüferi koodi pikkusega üheselt määratud, mistõttu kaks võrdsete koodidega puud on võrdse tippude arvuga.

Näitame, et teoreemi väide kehtib siis, kui T^1_M ja T^2_M on kahetipulised. Olgu $M = \{m_1, m_2\}$, kus $m_1 < m_2$. Et puud on kahetipulised, siis $\wp(T^1_M) = [\,] = \wp(T^2_M)$. On selge, et kahetipuliste graafide korral on iga diagrammi (5.1) kommutatiivseks tegev bijektsioon φ ühtlasi ka märgendatud graafide T^1_M ja T^2_M isomorfism. Samuti on selge, et parajasti üks selline bijektsioon leidub.

Oletame, et teoreemi väide kehtib kõigi $(n-1)$-tipuliste märgendatud puude korral. Olgu T^1_M ja T^2_M mingid n-tipulised märgendatud puud, nii et

$$\wp(T^1_M) = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}] = \wp(T^2_M).$$

Paneme tähele, et Prüferi koodist saab leida lehtede märgendite hulga, milleks on kõik need märgendid hulgast M, mis ei esine kordagi

Prüferi koodis. Seega on mõlema puu lehtede märgendite hulgad võrdsed. Seega on ka minimaalse märgendiga lehtede $v_1 \in V_1$ ja $v_2 \in V_2$ märgendid võrdsed, s.t. $\mu_1(v_1) = m = \mu_2(v_2)$ mingi $m \in M$ korral, mistõttu $T^1_M \backslash v_1$ ja $T^2_M \backslash v_2$ on märgendatud puud ühise märgendite hulgaga $M \backslash \{m\}$, kusjuures

$$\wp(T^1_M \backslash v_1) = [m_2 \dots m_{n-2}] = \wp(T^2_M \backslash v_2).$$

Vastavalt induktsiooni oletusele $T^1_M \backslash v_1 \cong T^2_M \backslash v_2$, s.t. leidub isomorfism $\varphi : V_1 \backslash \{v_1\} \longrightarrow V_2 \backslash \{v_2\}$. Olgu $\{v_1, w_1\} \in E_1$ ja $\{v_2, w_2\} \in E_2$. Vastavalt Prüferi koodi definitsioonile $\mu_1(w_1) = m_1 = \mu_2(w_2)$ ja seega diagrammi (5.1) kommutatiivsuse tõttu

$$\mu_2(w_2) = \mu_1(w_1) = \mu_2(\varphi(w_1)),$$

millest funktsiooni μ_2 injektiivsuse tõttu saame, et $\varphi(w_1) = w_2$. Viimasest seosest järeldub, et isomorfismi φ saab jätkata isomorfismini $\bar{\varphi} : T^1_M \longrightarrow T^2_M$ defineerides iga $v \in V_1$ korral

$$\bar{\varphi}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi(v), & \text{kui } v \in V_1 \backslash \{v_1\} \\ v_2, & \text{kui } v = v_1. \end{cases}$$

Lihtne on veenduda, et $\bar{\varphi}$ on tõepoolest märgendatud graafide isomorfism ja seega $T^1_M \cong T^2_M$. □

Teoreem 5.4. *Kui $M \subset \mathbb{N}$, $|M| = n \geqslant 2$ ja $\mathcal{M} = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}]$ on selline $(n-2)$-elemendiline järjend, et iga $i \in \{1, \dots, n-2\}$ korral $m_i \in M$, siis leidub n-tipuline märgendatud puu $T_M = (V, E, \mu)$ nii, et $\wp(T_M) = \mathcal{M}$.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni hulga M võimsuse järgi. Kui M on kaheelemendiline, siis $\mathcal{M} = [\,]$ ja T on kahetipuline puu, märgendatud suvalises järjekorras.

Oletame, et väide kehtib $(n-1)$-elemendiliste märgendihulkade korral. Olgu $|M| = n$ ja $\mathcal{M} = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}]$ mingi $(n-2)$-elemendiline järjend, nii et iga $i \in \{1 \dots n-2\}$ korral $m_i \in M$. On selge, et hulgas M leidub elemente, mis ei kuulu järjendisse $\mathcal{M}$, sest järjendi $\mathcal{M}$ pikkus on väiksem kui hulga M võimsus. Olgu m_0 vähim

selline element ja $M' \stackrel{\text{def}}{=} M\backslash\{m_0\}$. Vastavalt induktsiooni oletusele leidub siis märgendatud puu $T'_{M'} = (V', E', \mu')$ märgendite hulgaga M' nii, et $\wp(T'_{M'}) = \mathcal{M}' \stackrel{\text{def}}{=} [m_2 \dots m_{n-2}]$.

Olgu $w \in V'$ selline tipp, et $\mu'(w) = m_1$ (see tipp leidub, sest $\mu' : V' \longrightarrow M'$ on bijektiivne). Moodustame uue puu T_M lisades puusse $T'_{M'}$ uue tipu v ja uue serva $\{v, w\}$, nii et v on puu T_M leht. Olgu $V = V' \cup \{v\}$ ja $E = E' \cup \{\{v, w\}\}$. Laiendame funktsiooni $\mu' : V' \longrightarrow M'$ funktsioonini $\mu : V \longrightarrow M$ defineerides $\mu(v) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_0$.

Tipp v on puu T_M minimaalse märgendiga leht, sest kui leiduks leht $v' \in V$ nii, et $\mu(v') < \mu(v) = m_0$, siis $v' \in V'$ ja seega on v' leht ka puus $T'_{M'}$, millest $\wp(T'_{M'}) = \mathcal{M}'$ ja lemma 5.2 tõttu saame, et $\mu(v')$ ei kuulu järjendisse $\mathcal{M}$, mis on vastuolus m_0 valikuga. Seega vastavalt algoritmile (5.2)

$$\wp(T_M) = [m_1 \wp(T_M\backslash v)] = [m_1 \wp(T'_{M'})] = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}],$$

mis tõestabki teoreemi väite. □

Siit aga järeldub kohe Cayley teoreem.

Teoreem 5.5 (Cayley). *Iga $n \geqslant 2$ korral leidub täpselt n^{n-2} mitteisomorfset märgendatud puud märgendite hulgaga M ($|M| = n$).*

Tõestus. Eelmised kaks teoreemi tõestavad, et saab korraldada üksühese vastavuse n-tipuliste märgendatud puude ja $(n-2)$-elemendiliste arvujadade $[\mu_1 \dots \mu_{n-2}]$ vahel, kus $\mu_i \in M$. Neid jadasid on n^{n-2} ja seega on sama palju ka märgendatud puid. □

Ülesanded

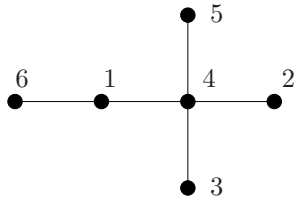
Ülesanne 49. Leia Prüferi koodidele

1.	$(1, 2, 3, 4)$;	2.	$(4, 3, 2, 1)$;
3.	$(3, 3, 3, 3)$;	4.	$(4, 3, 4, 5, 4, 7, 7)$;
5.	$(2, 3, 3, 3, 6, 6, 6)$;	6.	$(2, 4, 2, 1, 9, 1, 8)$

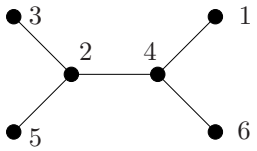
vastavad märgendatud puud.

Ülesanne 50. Leia järgmiste märgendatud puude Prüferi koodid:

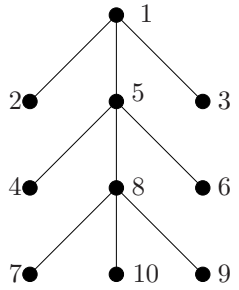
1.



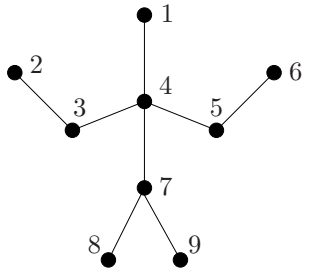
2.



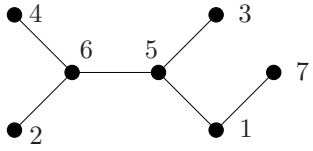
3.



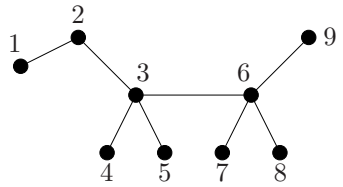
4.



5.



6.



Ülesanne 51. Tõesta, et iga naturaalarvu $n \geqslant 2$ korral kehtib

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2} \ .$$

Vihje: n-tipulise märgendatud puu saame k-tipulise märgendatud puu ja $(n-k)$-tipulise märgendatud puu mingil viisil servaga ühendamisel.

Ülesanne 52. Olgu $\tau(G)$ graafi G aluspuude arv. Näita, et graafi G iga serva e korral $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e)$, kus G/e tähistab serva e *kokkutõmbamist* (joonis 10.3), s.t. tema otstippude samastamist.

6. Võrgud ja vood

Võrk on suunatud graaf G, mille igal kaarel e on defineeritud positiivne kaal, nn. *läbilaskevõime* $\psi(e)$, kus $\psi : E(G) \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Suunatud graafi tippu v nimetatakse *lähteks* (ehk *sisendiks*), kui see tipp pole ühegi kaare lõpptipp. Suunatud graafi tippu v nimetatakse *suudmeks* (ehk *väljundiks*), kui see tipp pole ühegi kaare algtipp. Käesolevas osas me vaatame ainult selliseid võrkusid, millel on täpselt üks lähe ja täpselt üks suue. Siintoodavaid tulemusi saab üldistada ka juhule, kus graafil on mingi muu arv lähteid või suudmeid.

Kui G on suunatud graaf ja ω selle graafi kaari kaaludega varustav funktsioon, s.t. $\omega : E(G) \longrightarrow \mathbb{R}$, siis graafi G tipu v *ω-sisendaste* $\overrightarrow{\deg_\omega}(v)$ ja *ω-väljundaste* $\overleftarrow{\deg_\omega}(v)$ defineeritakse järgmiselt:

$$\overrightarrow{\deg_\omega}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{e\in E(G)\\ \exists w: e=(w,v)}} \omega(e) \quad \text{ja} \quad \overleftarrow{\deg_\omega}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{e\in E(G)\\ \exists w: e=(v,w)}} \omega(e) \ .$$

Lause 6.1. *Kui G on suunatud graaf ja ω selle graafi kaari kaaludega varustav funktsioon, siis G kõigi tippude ω-väljundastmete summa võrdub G kõigi tippude ω-sisendastmete summaga.*

Tõestus on täiesti vahetu:

$$\sum_{v\in V(G)} \overleftarrow{\deg_\omega}(v) = \sum_{v\in V(G)} \sum_{\substack{e\in E(G)\\ \exists w: e=(w,v)}} \omega(e) = \sum_{e\in E(G)} \omega(e) =$$

$$= \sum_{v\in V(G)} \sum_{\substack{e\in E(G)\\ \exists w: e=(v,w)}} \omega(e) = \sum_{v\in V(G)} \overrightarrow{\deg_\omega}(v) \ . \quad \square$$

Olgu (G, ψ) võrk ja olgu tipud s ja t selle võrgu lähe ja suue. *Vooks* $\varphi : E(G) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ võrgul G nimetatakse graafi G kaarte varustamist mittenegatiivsete reaalarvudega nii, et

- G iga kaare e jaoks kehtib $\varphi(e) \leqslant \psi(e)$;
- G iga tipu v jaoks, v.a. tipud s ja t, kehtib $\overrightarrow{\deg_\varphi}(v) = \overleftarrow{\deg_\varphi}(v)$.

Olgu (G, ψ) võrk ja φ mingi tema voog. Lausest 6.1 järeldub, et G lähte φ-väljundaste võrdub G suudme φ-sisendastmega; seda arvu nimetatakse voo φ *väärtuseks* ja tähistatakse $|\varphi|$. Meid huvitab, kui suur võib (G, ψ) voo väärtus olla. Neid voogusid, millel on see suurim võimalik väärtus, nimetame *maksimaalseteks voogudeks*.

Voo väärtust ei pea tingimata „mõõtma" võrgu lähte või suudme juures. Me võime võrgu tipud suvalisel viisil kahte ossa jagada, nii et lähe kuuluks ühte ossa ja suue teise ossa, voo φ väärtuse võib siis leida suuruste $\varphi(e)$ kaudu, kus e on kaar kahe osa vahel.

Lemma 6.2. *Olgu (G, ψ) mingi võrk ning φ mingi voog sellel võrgul. Kui G tipuhulk $V(G)$ on tükeldatud hulkadeks V_s ja V_t (s.t. $V_s \cup V_t = V(G)$ ja $V_s \cap V_t = \emptyset$) nii, et $s \in V_s$ ja $t \in V_t$, siis φ väärtus on võrdne suurusega*

$$\Phi(V_s, V_t) \stackrel{def}{=} \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V_s \times V_t}} \varphi(e) - \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V_t \times V_s}} \varphi(e) \ . \tag{6.1}$$

Tõestus. Paneme kõigepealt tähele, et kui $e \in E(G)$ on silmus ning φ varustab $E(G)$ elemendid mittenegatiivsete reaalarvudega, siis ei sõltu ei φ vooks olemine või mitteolemine ega ka φ väärtus (kui ta on voog) $\varphi(e)$ väärtusest. Seetõttu võime me üldisust kitsendamata eeldada, et iga silmuse $e \in E(G)$ korral $\varphi(e) = 0$.

Lemma tõestame induktsiooniga hulga V_s võimsuse järgi. Baasiks on juht $|V_s| = 1$, s.t. $V_s = \{s\}$. Sel juhul on vahe (6.1) vähendatav võrdne φ väärtusega (vastavalt voo väärtuse definitsioonile) ning vähendaja võrdne nulliga (sest ei leidu servi, mille lõpptipp oleks s).

Kehtigu lemma väide nüüd mingite hulkade V_s ja V_t jaoks. Meil tuleb näidata, et kui $V_t \neq \{t\}$, siis kehtib see väide ka hulkade $V_s' = V_s \cup \{x\}$ ja $V_t' = V_t \backslash \{x\}$ jaoks, kus $x \in V_t \backslash \{t\}$. Piisab, kui näitame, et $\Phi(V_s', V_t') = \Phi(V_s, V_t)$, mis aga tuleneb täiesti vahetult:

$$\begin{aligned}\Phi(V_s, V_t) - \Phi(V_s', V_t') = &\sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V_s \times \{x\}}} \varphi(e) - \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in \{x\} \times V_t'}} \varphi(e) - \\ &- \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in \{x\} \times V_s}} \varphi(e) + \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V_t' \times \{x\}}} \varphi(e) = \overrightarrow{\deg_\varphi}(x) - \overleftarrow{\deg_\varphi}(x) = 0 \ .\end{aligned}$$

Esimest võrdust selgitab joonis 6.1. Joonisel toodud tabelid näitavad, millise märgiga tuleb antud väärtust arvutades summasse võtta $\varphi(e)$ sõltuvalt sellest, millistesse hulkadest V_s, $\{x\}$ ja V_t' (need hulgad moodustavad kõigi tippude hulga $V(G)$ tükelduse) kuuluvad kaare e algtipp ja lõpptipp. Tähistus „$+\varphi$“ tähendab, et $\varphi(e)$ tuleb võtta plussmärgiga, „$-\varphi$“ tähendab, et $\varphi(e)$ tuleb võtta miinusmärgiga, tühi lahter tähendab, et $\varphi(e)$ ei kuulu üldse summasse. Ülemised kaks tabelit on saadud $\Phi(V_s, V_t)$ definitsioonist (6.1), alumine tabel on saadud kahe ülemise tabeli „lahtrikaupa vahena“. □

$\Phi(V_s, V_t) =$

$\times$	V_s	$\{x\}$	V_t'
V_s		$+\varphi$	$+\varphi$
$\{x\}$	$-\varphi$		
V_t'	$-\varphi$		

$\Phi(V_s', V_t') =$

$\times$	V_s	$\{x\}$	V_t'
V_s			$+\varphi$
$\{x\}$			$+\varphi$
V_t'	$-\varphi$	$-\varphi$	

$\Phi(V_s, V_t) - \Phi(V_s', V_t') =$

$\times$	V_s	$\{x\}$	V_t'
V_s		$+\varphi$	
$\{x\}$	$-\varphi$		$-\varphi$
V_t'		$+\varphi$	

Joonis 6.1. $\Phi(V_s, V_t)$, $\Phi(V_s', V_t')$ ja nende vahe arvutamine.

Vooga mingis mõttes duaalne mõiste on lõige. Võrgu (G, ψ) *lõikeks* nimetatakse graafi G kaarte sellist hulka $L \subseteq E(G)$, millesse kuuluvate kaarte eemaldamisel ei sisaldaks G enam ühtegi (suunatud) ahelat lähtest suudmesse. Lõike L *läbilaskevõimeks* nimetatakse tema kaarte läbilaskevõimete summat. Minimaalse võimaliku läbilaskevõimega lõikeid nimetatakse *minimaalseteks lõigeteks*.

Teoreem 6.3 (Ford ja Fulkerson, 1955). *Võrgu maksimaalsete voogude väärtused on võrdsed selle võrgu minimaalsete lõigete läbilaskevõimetega.*

Tõestus. Olgu (G, ψ) mingi võrk, s tema lähe ja t suue. Näitame

kõigepealt, et võrgu ükskõik millise voo väärtus ei saa olla suurem kui tema ükskõik millise lõike läbilaskevõime. Olgu L võrgu G mingi lõige ja olgu G' graaf, mis saadakse graafist G jättes temast välja lõikesse L kuuluvad kaared. Olgu V_s graafi G (ja G') selliste tippude hulk, millesse graafis G' leidub tipust s algav suunatud ahel. Olgu V_t graafi G kõigi ülejäänud tippude hulk. Siis $s \in V_s$ ja $t \in V_t$. Vastavalt lemmale 6.2 on φ väärtus võrdne vahega (6.1). Kõik kaared, üle mille summeeritakse selle vahe vähendatavas, kuuluvad lõikesse L. Seega pole see vähendatav, seda enam terve vahe, suurem kui lõike L läbilaskevõime.

Me oleme näidanud, et võrgu maksimaalsete voogude väärtus pole suurem kui selle võrgu minimaalsete lõigete läbilaskevõime. Olgu φ nüüd võrgu (G, ψ) mingi maksimaalne voog. Teoreemi tõestamiseks tuleb meil veel näidata, et leidub selline lõige, mille läbilaskevõime on võrdne φ väärtusega.

Selleks defineerime graafi G tipuhulga $V(G)$ tükelduse $V_s \dot\cup V_t$ nii, et tippu $v \in V(G)$ loeme kuuluvaks hulka V_s parajasti siis, kui graafis G leidub selline suunamata ahel $s = v_0 \overset{e_1}{—} v_1 \overset{e_2}{—} \cdots \overset{e_m}{—} v_m = v$, et iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ jaoks:

(i) kui $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, siis $\varphi(e_i) < \psi(e_i)$;

(ii) kui $e_i = (v_i, v_{i-1})$, siis $\varphi(e_i) > 0$.

Sellist ahelat nimetame *suurendavaks ahelaks* (tippu v). Kui mingi tipupaari (v_{i-1}, v_i) (siin v_{i-1} ja v_i on suvalised tipud hulgast V) jaoks leidub serv e_i, mis rahuldab tingimusi (i) ja (ii), siis ütleme, et voog on tippude v_{i-1} ja v_i vahel *küllastamata*.

Tipp v kuulub hulka V_t parajasti siis, kui ta ei kuulu hulka V_s.

Vastavalt definitsioonile kuulub lähe s hulka V_s. Tuleb välja, et suue t kuulub hulka V_t. Tõepoolest, oletame, et t kuulub hulka V_s, sel juhul leidub suurendav ahel $s = v_0 \overset{e_1}{—} v_1 \overset{e_2}{—} \cdots \overset{e_m}{—} v_m = t$. Defineerime positiivsed reaalarvud $\delta_i \in \mathbb{R}^+$ järgmiselt:

$$\delta_i \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \psi(e_i) - \varphi(e_i), & \text{kui } e_i = (v_{i-1}, v_i), \\ \varphi(e_i), & \text{kui } e_i = (v_i, v_{i-1}) \end{cases}$$

ja olgu $\varepsilon = \min\limits_{i \in \{1,\ldots,m\}} \delta_i$. Defineerime nüüd uue voo φ' võrgul (G, ψ) järgmiselt:

$$\varphi'(e) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi(e), & \text{kui } e \notin \{e_1, \ldots, e_m\}, \\ \varphi(e) + \varepsilon, & \text{kui } \exists i : e = e_i \text{ ja } e_i = (v_{i-1}, v_i), \\ \varphi(e) - \varepsilon, & \text{kui } \exists i : e = e_i \text{ ja } e_i = (v_i, v_{i-1}). \end{cases}$$

Ilmselt on selliselt defineeritud φ' tõepoolest voog, kusjuures φ' väärtus on ε võrra suurem kui voo φ väärtus. See on aga vastuolus meie eeldusega, et φ on maksimaalne voog. Järelikult $t \in V_t$.

Hulkade V_s ja V_t konstruktsiooni tõttu kehtivad graafi G iga kaare e kohta järgmised väited:

- kui $e \in V_s \times V_t$, siis $\varphi(e) = \psi(e)$ (muidu kuuluks e lõpptipp hulka V_s);
- kui $e \in V_t \times V_s$, siis $\varphi(e) = 0$ (muidu kuuluks e algtipp hulka V_s).

Siit järeldub, et φ väärtus on võrdne kõigi nende servade $e \in E(G)$ läbilaskevõimete summaga, kus $e \in V_s \times V_t$. Kõigi selliste servade hulk on võrgu G lõige, mis ongi otsitav. □

Järeldus 6.4. *Kui (G, ψ) on võrk, φ mingi tema voog ja L mingi selline lõige, et φ väärtus on võrdne lõike L läbilaskevõimega, siis φ on (G, ψ) maksimaalne voog ja L minimaalne lõige.*

Tõestus. Teoreemi 6.3 kohaselt on φ väärtus vähemalt sama suur kui maksimaalsetel voogudel ning L läbilaskevõime on ülimalt nii suur kui minimaalsetel lõigetel. □

Teoreemi 6.3 tõestus annab meile ka algoritmi maksimaalse voo leidmiseks võrgus (G, ψ). Olgu φ_0 ükskõik milline voog selles võrgus (näiteks *nullvoog* — voog, mis varustab kõik kaared väärtusega 0). Kui meil on antud voog φ_i, siis püüame leida mingi suurendava ahela tippu t. Selleks võime näiteks konstrueerida hulgad V_s ja V_t analoogiliselt teoreemi tõestusega; hulk V_s konstrueeritakse graafi mingil viisil läbides, sellest läbimisest on lihtsalt leitavad suurendavad ahelad kõigisse hulga V_s tippudesse. Kui $t \in V_t$ (ja suurendavat ahelat tippu t ei leidu), siis on φ_i maksimaalne voog, sest leidub lõige, mille läbilaskevõime võrdub φ_i väärtusega. Kui $t \in V_s$, siis konstrueerime voo φ_{i+1} analoogiliselt voo φ' konstruktsiooniga teoreemi 6.3 tõestuses,

kasutades selleks leitud suurendavat ahelat tippu t. Seejärel korda-me eeltoodud sammu vooga φ_{i+1}. Kirjeldatud algoritmi nimetatakse Ford-Fulkersoni algoritmiks.

Ford-Fulkersoni algoritmi kirjeldusest ei selgu, kui mitu iteratsiooni võib vaja minna, saamaks mingit maksimaalset voogu (s.t. kui suur võib indeks i maksimaalse vooni jõudes olla). Uurime seda küsimust veidi lähemalt.

Lause 6.5. *Kui (G, ψ) on võrk, kus kõigil kaartel on täisarvulised läbilaskevõimed, siis tehakse maksimaalse voo leidmise algoritmis ülimalt $|\varphi|$ iteratsiooni, kus φ on (G, ψ) mingi maksimaalne voog.*

Tõestus. Kui kõigi kaarte läbilaskevõimed on täisarvud, siis märgendavad ka vood $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, mis Ford-Fulkersoni algoritm oma järjestikustel iteratsioonidel koostab, graafi G kõik kaared täisarvudega. Tõepoolest, murdarvud ei saa algoritmi töö käigus kuskilt sisse tulla — ainsad operatsioonid, mida algoritm arvudega teeb, on liitmine, lahutamine ja miinimumi leidmine, need operatsioonid aga annavad täisarvudele rakendades jälle tulemuseks täisarvu.

Seega on ka $|\varphi_0|, |\varphi_1|, |\varphi_2|, \ldots$ kõik täisarvud. Et $|\varphi_{i+1}| > |\varphi_i|$, siis $|\varphi_{i+1}| - |\varphi_i| \geqslant 1$. Seega jõutakse ülimalt $|\varphi|$ sammu pärast mingi maksimaalse vooni $|\varphi|$. □

See iteratsioonide arvu ülemtõke võib vägagi ebatäpne olla, kuid vähemalt näitab ta, et kui kõigi kaarte läbilaskevõimed on täisarvud, siis lõpetab Ford-Fulkersoni algoritm töö. Siit järeldub kohe, et ka siis, kui kõigi servade läbilaskevõimed on ratsionaalarvud, lõpetab Ford-Fulkersoni algoritm töö. Sel juhul on mingil iteratsioonil leitud voo väärtus eelmisel iteratsioonil leitud voo väärtusest vähemalt kõigi servade läbilaskevõimete vähima ühise nimetaja pöördväärtuse võrra suurem. Kui me lubame servade läbilaskevõimetena ka irratsionaalarve, siis on võimalik konstrueerida võrk ning sellised suurendavate ahelate valikud, et algoritmi iteratsioonidel leitavate voogude väärtused küll lähenevad piiramatult maksimaalse voo väärtusele, kuid ei saa sellega kunagi võrdseks.

Parema keerukushinnangu Ford-Fulkersoni algoritmile saame siis, kui me fikseerime, mil viisil suurendav ahel leitakse. Loeme nüüd, et suurendav ahel tippu t leitakse graafi G *laiuti läbides*. Sellist täiendust nimetatakse Edmonds-Karpi täienduseks. Sel juhul on suuren-

dav ahel tippu t, mida algoritm kasutab, minimaalse võimaliku pikkusega. Enamgi veel, kõigi tippude $v \in V_s$ jaoks on suurendav ahel lähtest s tippu v, mis hulka V_s konstrueerides leitakse, minimaalse võimaliku pikkusega.

Kui (G, ψ), on mingi võrk ja φ mingi voog sellel, siis tähistagu $\delta_\varphi(v)$, kus $v \in V(G)$, lühima suurendava ahela pikkust tippu v.

Lemma 6.6. *Kui (G, ψ), kus $G = (V, E)$, on mingi võrk ja $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ on voogude jada, mis leitakse Ford-Fulkersoni algoritmi (koos Edmonds-Karpi täiendusega) järjestikustel iteratsioonidel, siis suvalise $v \in V$ korral on jada $\delta_{\varphi_i}(v)$ mittekahanev.*

Tõestus. Olgu φ_n ja φ_{n+1} kaks järjestikust voogu selles voogude jadas ning olgu $B \subseteq V$ kõigi selliste tippude hulk, mis antud n korral seda mittekahanevuse tingimust ei täida, s.t. olgu

$$B = \{v \mid v \in V, \delta_{\varphi_{n+1}}(v) < \delta_{\varphi_n}(v)\} \ .$$

Oletame väitevastaselt, et hulk B ei ole tühi. Olgu $v \in B$ selline tipp, mille jaoks $\delta_{\varphi_{n+1}}(v)$ on minimaalne.

Olgu P' lühim suurendav ahel tippu v (voo φ_{n+1} järgi) ja u tema eelviimane tipp (s.t. vahetult enne tippu v). Et P' ilma oma viimase tiputa on lühim suurendav ahel tippu u, siis $\delta_{\varphi_{n+1}}(u) = \delta_{\varphi_{n+1}}(v) - 1$. Et aga $\delta_{\varphi_{n+1}}(v)$ väärtus on minimaalne hulga B elementide seas, siis $u \notin B$. Uurime voogu φ_n tippude u ja v vahel.

Kui φ_n on tippude u ja v vahel küllastamata, siis on iga suurendav ahel tippu u (voo φ_n järgi) ühe sammuga pikendatav suurendavaks ahelaks tippu v. Muuhulgas kehtib see ka lühima suurendava ahela kohta ning seega $\delta_{\varphi_n}(v) \leqslant \delta_{\varphi_n}(u) + 1$. Et $\delta_{\varphi_n}(u) \leqslant \delta_{\varphi_{n+1}}(u)$ (sest $u \notin B$), siis

$$\delta_{\varphi_n}(v) \leqslant \delta_{\varphi_n}(u) + 1 \leqslant \delta_{\varphi_{n+1}}(u) + 1 = \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja järelikult $v \notin B$, mis annabki soovitud vastuolu.

Kui φ_n on tippude u ja v vahel küllastatud, siis olgu P_n selline suurendav ahel (voo φ_n suhtes) võrgu (G, ψ) suudmesse, et voog φ_{n+1} on saadud voost φ_n, lisades talle täiendava voo üle ahela P_n (sama moodi, nagu teoreemi 6.3 tõestuses saadakse voog φ' voost φ, lisades talle täiendava voo üle teatava suurendava ahela). Et φ_{n+1}

on tippude u ja v vahel küllastamata, siis peab ahelas P_n leiduma fragment $\cdots - v - u - \cdots$

Et P_n on leitud graafi G laiuti läbides, siis on tema prefiks kuni tipuni v (analoogiliselt: kuni tipuni u) minimaalse pikkusega suurendav ahel (voo φ_n järgi) tippu v (analoogiliselt: tippu u). Järelikult $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1$. Et ka $\delta_{\varphi_n}(u) \leqslant \delta_{\varphi_{n+1}}(u)$ (sest $u \notin B$), siis

$$\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1 \leqslant \delta_{\varphi_{n+1}}(u) - 1 = \delta_{\varphi_{n+1}}(v) - 2 \leqslant \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja järelikult $v \notin B$, mis annab taas vastuolu. □

Teoreem 6.7. *Ford-Fulkersoni algoritm koos Edmonds-Karpi täiendusega teeb võrgu (G, ψ), kus $G = (V, E)$, maksimaalset voogu leides ülimalt $(|V| - 2) \cdot |E|$ iteratsiooni.*

Tõestus. Olgu $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ vood, mis maksimaalse voo leidmise algoritm oma järjestikustel iteratsioonidel koostab. Leidmaks voost φ_n voogu φ_{n+1} konstrueerib algoritm n-ndal iteratsioonil mingi suurendava ahela

$$P_n : s = v_0 \overset{e_1}{-} v_1 \overset{e_2}{-} v_2 \overset{e_3}{-} \cdots \overset{e_m}{-} v_m = t \ .$$

Defineerime suurused $\delta_1, \ldots, \delta_m$ samamoodi nagu teoreemi 6.3 tõestuses. Ütleme, et tipupaar (v_{i-1}, v_i) on *kriitiline*, kui talle vastav suurus δ_i on minimaalne (teoreemi 6.3 tõestuse terminites: (v_{i-1}, v_i) on kriitiline siis, kui $\delta_i = \varepsilon$). Igal iteratsioonil leidub vähemalt üks kriitiline tipupaar ja järgmisel iteratsioonil on voog nende tippude vahel küllastatud.

Olgu $u, v \in V$. Loeme, kui mitmel iteratsioonil võib tipupaar (u, v) kriitiline olla. Kui (u, v) on n-ndal iteratsioonil kriitiline, siis sisaldab P_n fragmenti $\cdots - u - v - \cdots$ ja seega $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) + 1$.

Iteratsioonil järjekorranumbriga $n + 1$ on voog tippude u ja v vahel küllastatud. Kui (u, v) on iteratsioonil n', kus $n' > n$, taas kriitiline, siis on voog $\varphi_{n'}$ tippude u ja v vahel taas küllastamata. Järelikult peab leiduma mingi iteratsioon n'', kus $n < n'' < n'$ nii, et suurendav ahel $P_{n''}$ sisaldaks fragmenti $\cdots - v - u - \cdots$. Siis aga $\delta_{\varphi_{n''}}(u) = \delta_{\varphi_{n''}}(v) + 1$.

Kokkuvõttes saame, et

$$\delta_{\varphi_{n'}}(u) \geqslant \delta_{\varphi_{n''}}(u) = \delta_{\varphi_{n''}}(v) + 1 \geqslant \delta_{\varphi_n}(v) + 1 = \delta_{\varphi_n}(u) + 2,$$

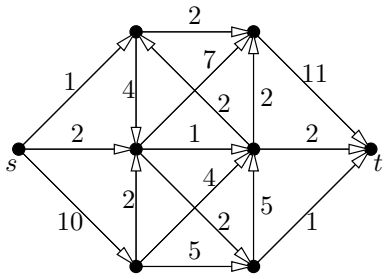
seega iga kord, kui (u, v) saab kriitiliseks, on suurus $\delta_{\varphi_n}(u)$ eelmise korraga võrreldes vähemalt kahe võrra suurenenud.

Kui (u, v) on kriitiline tipupaar, siis ei saa suurus $\delta_{\varphi_n}(u)$ olla suurem kui $|V|-2$. Tõepoolest, kriitilise ahela P_n pikkus ei ole suurem kui $n-1$, sest ta sisaldab kõiki tippe ülimalt üks kord. Samuti pole tipp u ahela P_n viimane tipp, sest tipp v tuleb veel pärast teda. Tipupaare, mis üldse võivad kriitiliste tipupaaridena kõne alla tulla, on ülimalt $2 \cdot |E|$ tükki — kui (u, v) on kriitiline, siis peab leiduma serv tipust u tippu v või tipust v tippu u. □

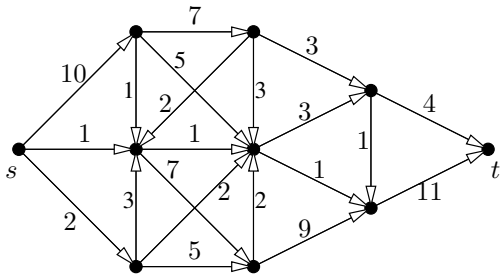
Ülesanded

Ülesanne 53. Leia maksimaalsed vood järgmistes võrkudes. Samuti leia neis võrkudes mõni minimaalne lõige.

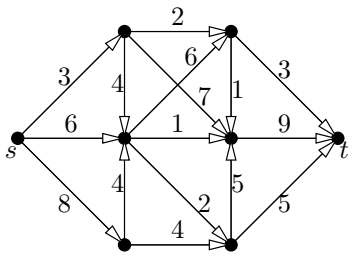
1.



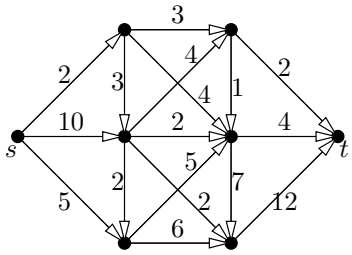
2.



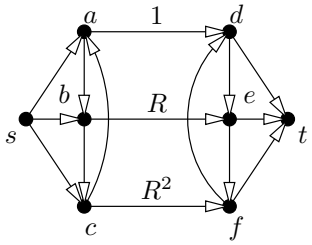
3.



4.



Ülesanne 54. Vaatleme voogu järgmisel joonisel.



Olgu $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (siis $R^n = R^{n+1} + R^{n+2}$) ja ülejäänud servadel suured läbilaskevõimed. Olgu esimene suurendav ahel s — a — d — t ning järgmised suurendavad ahelad (tsüklis)

1. s — c — f — d — a — b — e — t
2. s — b — e — f — c — a — d — t
3. s — a — d — e — b — c — f — t.

Näita, et Ford-Fulkersoni algoritm ei lõpeta tööd.

7. Kooskõlad ja katted

7.1. Berge'i teoreem

Olgu G suunamata graaf. *Kooskõlaks* graafis G nimetatakse tema servade sellist alamhulka $M \subseteq E(G)$, et iga tipu $v \in V(G)$ jaoks kehtib $\deg_M(v) \leqslant 1$ (s.t. kaks serva hulgast M pole intsidentsed sama tipuga). Siin $\deg_M(v)$ tähistab tipuga v intsidentsete hulka M kuuluvate servade arvu. Kooskõla M nimetatakse *maksimaalseks*, kui ta on suurima võimaliku võimsusega. Kui iga tipu $v \in V(G)$ jaoks kehtib $\deg_M(v) = 1$, siis nimetatakse kooskõla M *täielikuks kooskõlaks*.

Kui $G = (V, E)$ on graaf ja $S \subseteq V$, siis on hulga S *naabrus* $N(S) \subseteq V$ defineeritud järgmiselt:

$$N(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \mid w \in V, \exists (e \in E, v \in S) : e = \{v, w\}\} \ .$$

Olgu M kooskõla graafis G. Ahelat P selles graafis nimetatakse *M-vahelduvaks*, kui sellel ahelal olevad servad kuuluvad vaheldumisi hulkadesse M ja $E(G) \backslash M$. Kui ahel P otstippudega u ja v on M-vahelduv ja $\deg_M(u) = \deg_M(v) = 0$, siis nimetatakse seda ahelat *M-laienevaks*.

Teoreem 7.1 (Berge). *Kooskõla M graafis G on maksimaalne parajasti siis, kui selles graafis ei leidu M-laienevat ahelat.*

Tõestus. Tarvilikkuse ($\Rightarrow$) näitamiseks eeldame, et M on graafi G maksimaalne kooskõla ning oletame väitevastaselt, et selles graafis leidub M-laienev ahel P otstippudega u ja v. Olgu M' kõigi selliste servade hulk, mis kuuluvad täpselt ühte hulkadest M ja P (siin ja edaspidi laseme ahelat tähistaval sümbolil tähistada ka sellesse ahelasse kuuluvate servade hulka). Olgu $w \in V(G)$ ja selgitame, millega võrdub $\deg_{M'}(w)$.

- Kui w ei asu ahelal P, siis $\deg_{M'}(w) = \deg_M(w)$. Tõepoolest, et P ei sisalda tipuga w intsidentseid servi, siis on mingi hulka M' kuuluv serv tipuga w intsidentne parajasti sel juhul, kui see serv kuulub hulka M.
- Kui w asub ahelal P ning pole üks selle ahela otstippudest u või v, siis $\deg_{M'}(w) = \deg_M(w) = 1$. Antud juhul sisaldab P

kaks tipuga w intsidentset serva, neist üks kuulub hulka M (ja ei kuulu hulka M') ning teine ei kuulu (ja kuulub hulka M'). Teised tipuga w intsidentsed servad ei kuulu hulka M.

- Kui $w \in \{u, v\}$, siis $\deg_{M'}(w) = 1$. Tipud u ja v pole ühegi hulka M kuuluva servaga intsidentsed, küll aga on nad intsidentsed ühe ahelas P esineva servaga.

Meil on $\deg_{M'}(u) = \deg_M(u) + 1$ ning $\deg_{M'}(v) = \deg_M(v) + 1$. Ülejäänud tippude jaoks on $\deg_{M'}$ ja $\deg_M$ võrdsed. Seega $|M'| = |M|+1$ ning M ei ole maksimaalne kooskõla.

Piisavuse ($\Leftarrow$) näitamiseks eeldame, et M on graafi G kooskõla, mis ei ole maksimaalne, ning püüame konstrueerida mingi M-laieneva ahela. Olgu M^* graafi G mingi maksimaalne kooskõla ning vaatleme graafi $H = (V, M \cup M^*)$. Selle graafi sidusatel komponentidel võib olla üks järgmistest kujudest:

(i) isoleeritud tipp;

(ii) serv $u \overset{e}{—} v$, kus $e \in M \cap M^*$;

(iii) tsükkel, mille servad kuuluvad vaheldumisi hulkadesse M ja M^*; seega peab selle tsükli pikkus olema paarisarv ning ta peab sisaldama võrdsel arvul hulka M kuuluvaid ning hulka M^* kuuluvaid servi;

(iv) ahel, mille servad kuuluvad vaheldumisi hulkadesse M ja M^*.

Et $|M| < |M^*|$ ning sidusates komponentides (i), (ii) ja (iii) on hulkadesse M ja M^* kuuluvaid servi võrdsel arvul, siis peab H sisaldama vähemalt ühte sidusat komponenti kujuga (iv) nii, et see ahel algaks ja lõppeks hulka M^* kuuluva servaga. See ahel ongi M-laienev. □

7.2. Halli abieluteoreem

Järgmine teoreem on saanud oma nime nn. *abieluprobleemi* järgi. Selles probleemis on antud mingi tütarlaste hulk X, noormeeste hulk Y ning relatsioon $E \subseteq X \times Y$, mis kirjeldab, milline tütarlaps millise noormehega sobib. Küsitakse, millistel tingimustel on kõigil tütarlastel võimalik abielluda mõne sobiva noormehega.

Teoreem 7.2 (Philip Hall, 1935). *Kui G on kahealuseline graaf alustega X ja Y (s.t. $X \cup Y = V(G)$, $X \cap Y = \emptyset$ ning iga $e \in E(G)$ korral $e = \{x, y\}$ mingi $x \in X$ ja $y \in Y$ jaoks), siis leidub graafil G kooskõla M omadusega* $\deg_M(x) = 1$ *iga $x \in X$ jaoks parajasti sel juhul, kui iga $S \subseteq X$ jaoks kehtib $|N(S)| \geqslant |S|$.*

Tõestus. Tarvilikkuse ($\Rightarrow$) näitamiseks eeldame, et M on selline kooskõla, mis iga $x \in X$ jaoks sisaldab tipuga x intsidentset serva. See kooskõla defineerib teatava funktsiooni $\alpha : X \longrightarrow Y$, mis kujutab hulga X iga elemendi x hulga Y selliseks elemendiks y, et kooskõla M sisaldab serva, mille otstippudeks on x ja y. Vastavalt eeldustele leidub iga $x \in X$ jaoks täpselt üks selline $y \in Y$. Et M on kooskõla, siis pole ükski $y \in Y$ intsidentne enam kui ühe hulka M kuuluva servaga, järelikult on funktsioon α injektiivne. Et iga $S \subseteq X$ korral $\alpha(S) \subseteq N(S)$, siis $|N(S)| \geqslant |\alpha(S)| = |S|$.

Piisavuse ($\Leftarrow$) näitamiseks eeldame, et M on mingi maksimaalne kooskõla graafis G. Oletame, et leidub niisugune $x \in X$, mille korral $\deg_M(x) = 0$. Olgu Z kõigi selliste tippude $v \in V(G)$ hulk, mille korral leidub M-vahelduv ahel tipust x tippu v (M-vahelduvuse definitsiooni kohaselt muidugi $x \in Z$) ning tähistame veel $S = Z \cap X$ ja $T = Z \cap Y$.

Näitame, et $N(S) = T$. Tõepoolest, olgu $s \in S$. Kui $s = x$ ja $t \in Y$ on tipu x naabertipp, siis $x \text{ — } t$ on M-vahelduv ahel. Kui $s \neq x$, siis olgu P M-vahelduv ahel tipust x tippu s. Selle ahela viimane serv kuulub hulka M, sest ahela pikkus on paarisarv (tegemist on ahelaga kahealuselise graafi kahe samasse alusesse kuuluva tipu vahel) ja tema esimene serv ei kuulu hulka M (kuna $\deg_M(x) = 0$). Olgu $e \in E(G)$ tipuga s intsidentne serv ja $t \in Y$ selle serva teine naabertipp. Meil tuleb näidata, et leidub M-vahelduv ahel tipust x tippu t.

(i) Juhul $e \in M$ peab e olema ahela P viimane serv. Kui me jätame ahelast P välja serva e ja tipu s, siis jääb järgi M-vahelduv ahel tipust x tippu t.

(ii) Juhul $e \notin M$ on $x \overset{P}{\rightsquigarrow} s \overset{e}{\text{ — }} t$ on M-vahelduv ahel tipust x tippu t.

Näitame, et hulgad $S \backslash \{x\}$ ja T on võrdse võimsusega, konstrueerides üksühese vastavuse nende vahel. Olgu $s \in S \backslash \{x\}$. Eespool me

juba näitasime, et leidub $e \in M$, mis on tipuga s intsidentne. Tipule s seame vastavusse serva e teise otstipu, eespool (juht (i)) me juba näitasime, et see tipp kuulub hulka T. On ilmne, et hulga $S\backslash\{x\}$ erinevatele elementidele seatakse niiviisi vastavusse hulga T erinevad elemendid, seega $|S\backslash\{x\}| \leqslant |T|$.

Olgu $t \in T$. Siis $\deg_M(t) = 1$, sest vastasel juhul oleks M-vahelduv ahel P tipust x tippu t M-laienev ning see läheks vastuollu Berge'i teoreemiga. Tipule t seame vastavusse temaga intsidentse serva $e \in M$ teise otstipu s, siis $x \overset{P}{\rightsquigarrow} t \overset{e}{—} s$ on M-vahelduv ahel tipust x tippu s. Ilmselt $s \neq x$ ja hulga T erinevatele elementidele seatakse vastavusse hulga S erinevad elemendid. Seega $|T| \leqslant |S\backslash\{x\}|$.

Me oleme konstrueerinud sellise hulga $S \subseteq X$, et $|N(S)| = |S| - 1$. See on vastuolus teoreemi eeldustega. □

Järeldus 7.3. *Kui G on regulaarne kahealuseline graaf, mis ei ole nullgraaf, siis leidub selles graafis täielik kooskõla.*

Tõestus. Olgu X ja Y graafi G alused, kusjuures G regulaarsusest (s.t. kõigi tippude aste on sama) järeldub $|X| = |Y|$. Tõepoolest, kahealuselises graafis kehtib võrdus $\sum\limits_{x \in X} \deg(x) = \sum\limits_{y \in Y} \deg(y)$ ning kui G on regulaarne, siis on see võrdus sama, mis $|X| \cdot k = |Y| \cdot k$, kus $k > 0$ on kõigi tippude ühine aste.

Kui $S \subseteq X$ ning $e \in E(G)$ on mõne hulka S kuuluva tipuga intsidentne, siis on e ka mõne hulka $N(S)$ kuuluva tipuga intsidentne. Järelikult $\sum\limits_{x \in S} \deg(x) \leqslant \sum\limits_{y \in N(S)} \deg(y)$ ehk $|S| \cdot k \leqslant |N(S)| \cdot k$ ja $|S| \leqslant |N(S)|$. Vastavalt Halli abieluteoreemile leidub graafis G kooskõla M nii, et iga $x \in X$ jaoks kehtib $\deg_M(x) = 1$. Et hulgas Y on sama palju tippe kui hulgas X, siis peab ka iga $y \in Y$ jaoks kehtima $\deg_M(y) = 1$, seega on M täielik kooskõla. □

7.3. Königi teoreem

Kooskõlaga mingis mõttes duaalne mõiste on kate. Graafi G *kateks* nimetatakse sellist tippude hulka $K \subseteq V(G)$, et graafi G iga serva mõni otstipp kuulub hulka K. Katet K nimetatakse minimaalseks siis, kui tema võimsus on vähim võimalik.

Lemma 7.4. *Kui M on graafi G mingi kooskõla ja K sellesama graafi mingi kate, siis $|M| \leqslant |K|$. Kui $|M| = |K|$, siis on M maksimaalne kooskõla ja K minimaalne kate.*

Tõestus. Iga $e \in M$ jaoks leidub mingi $v \in K$, nii et v on e otstipp. Kooskõla definitsiooni tõttu peavad seejuures hulga M erinevatele servadele vastama erinevad tipud. Seega $|M| \leqslant |K|$. Lemma teine väide järeldub otseselt esimesest (ning maksimaalse kooskõla ja minimaalse katte definitsioonist). □

Teoreem 7.5 (König). *Kui G on kahealuseline graaf, siis kõigi tema maksimaalsete kooskõlade ja minimaalsete katete võimsused osutuvad võrdseteks.*

Tõestus. Olgu X ja Y graafi G alused ning M tema mingi maksimaalne kooskõla. Me konstrueerime graafi G sellise katte K, mille korral $|M| = |K|$.

Olgu $U \subseteq X$ selliste tippude $u \in X$ hulk, nii et $\deg_M(u) = 0$. Paneme tähele, et M võimsus on võrdne $X\backslash U$ võimsusega — iga hulka $X\backslash U$ kuuluv tipp on intsidentne mõne hulka M kuuluva servaga ja rohkem servi M ei sisalda. Olgu Z selliste tippude $v \in V(G)$ hulk, mille korral leidub mingi $u \in U$ jaoks M-vahelduv ahel tipust u tippu v. Olgu $S = Z \cap X$ ja $T = Z \cap Y$. Täiesti analoogiliselt Halli abieluteoreemi tõestusega saame nüÜd tõestada, et kehtivad võrdused $N(S) = T$ ja $|S\backslash U| = |T|$.

Kui $K = T \cup (X\backslash S)$, siis K on kate. Tõepoolest, oletame, et serva $e \in E(G)$ kumbki otstipp ei kuulu hulka K. Sel juhul kuulub e alusest X pärinev otstipp hulka S ning alusest Y pärinev otstipp w hulka $Y\backslash T$. Järelikult kuulub $w \in Y\backslash T$ hulga S naabrusse, mis on aga vastuolus ülaltõestatud võrdusega $N(S) = T$.

Katte K võimsus avaldub kujul

$$|K| = |T| + |X\backslash S| = |S\backslash U| + |X\backslash S| = |X\backslash U| = |M|$$

(eelviimane võrdus kehtib $U \subseteq S \subseteq X$ tõttu). Lõpuks järeldub lemmast 7.4, et kate K on minimaalne kate. □

7.4. Tutte'i teoreem

Järgmisena anname ühe tarviliku ja piisava tingimuse täieliku kooskõla leidumiseks (üldises) graafis. Tähistagu odd(G) graafi G paarituarvulise tippude arvuga sidusate komponentide arvu.

Teoreem 7.6 (Tutte). *Graafis $G = (V, E)$ leidub täielik kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib* $\mathrm{odd}(G \backslash S) \leqslant |S|$.

Tõestus. Tarvilikkuse ($\Rightarrow$) näitamiseks eeldame, et M on graafi G täielik kooskõla ning $S \subseteq V$. Olgu $G_1, \ldots, G_k$ graafi $G \backslash S$ paarituarvulise tippude arvuga sidusad komponendid. Igas komponendis G_i leidub vähemalt üks selline tipp v_i, et serva $e_i \in M$, mille üheks otstipuks on v_i, teiseks otstipuks oleks mingi $s_i \in S$. Et M on kooskõla, siis on erinevate tippude v_i jaoks vastavad tipud s_i samuti erinevad. Seega peab hulgas S olema vähemalt k tippu.

Piisavuse ($\Leftarrow$) näitamiseks oletame väitevastaselt, et iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib $\mathrm{odd}(G \backslash S) \leqslant |S|$, aga graafis G ei leidu täielikku kooskõla. Kui me võtame $S = \emptyset$, siis saame, et $\mathrm{odd}(G) = 0$, seega on graafis G paarisarv tippe. Lisame graafile G mingil viisil servi senikaua, kuni saame mingi graafi G^*, millel ei ole täielikku kooskõla, aga kui me talle veel mõne serva lisaksime, siis sellel graafil juba oleks täielik kooskõla. Et täisgraafis K_{2n} leidub täielik kooskõla, siis pole G^* täisgraaf.

Mudugi kehtib ka graafis G^* iga tipuhulga $S \subseteq V$ jaoks võrratus $\mathrm{odd}(G^* \backslash S) \leqslant |S|$, sest

- graaf $G^* \backslash S$ on saadud graafile $G \backslash S$ mingil viisil servi lisades;
- graafile mingil viisil servi lisades ei saa odd($\cdot$) suureneda — serva lisades võivad sidusad komponendid kas samaks jääda või võib kahest komponendist üks saada. Seejuures saab kahest paarisarvulise tippude arvuga komponendist paarisarvulise tippude arvuga komponent (kusjuures odd($\cdot$) ei muutu), kahest paarituarvulise tippude arvuga komponendist paarisarvulise tippude arvuga komponent (odd($\cdot$) väheneb kahe võrra) ning paaris- ja paarituarvulise tippude arvuga komponendist paarituarvulise tippude arvuga komponent (odd($\cdot$) ei muutu).

Olgu U kõigi selliste tippude $u \in V$ hulk, mis on graafis G^* servaga ühendatud kõigi ülejäänud tippudega. Ilmselt on tipuhulga U indutseeritud alamgraaf graafis G^* täisgraaf.

Vaatleme graafi $G^*\backslash U$ sidusaid komponente. Selgub, et kõik need komponendid ei saa olla täisgraafid. Tõepoolest, kui $G^*\backslash U$ kõik sidusad komponendid oleksid täisgraafid, siis saaksime graafis G^* konstrueerida täieliku kooskõla järgmisel viisil:

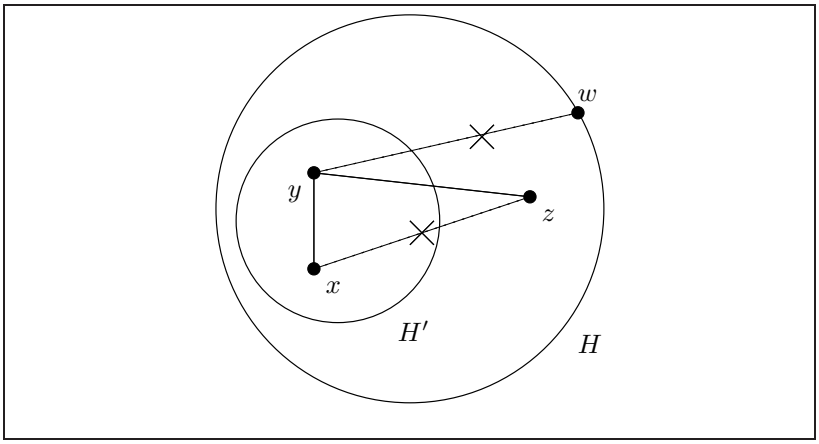
- Graafi $G^*\backslash U$ paarisarvulise tippude arvuga sidusates komponentides korraldame täieliku kooskõla iga sellise komponendi piires.
- Graafi $G^*\backslash U$ paarituarvulise tippude arvuga sidusates komponentides korraldame „peaaegu täieliku“ kooskõla nende komponentide piires — igast komponendist üks tipp jääb ilma paariliseta, ülejäänud tipud jagame paarideks.
- Eelmisel sammul graafi $G^*\backslash U$ paarituarvulise tippude arvuga sidusates komponentides $G_1, \ldots, G_k$ ülejäänud tipud seame paari mingite (suvaliste) tippudega $u_1, \ldots, u_k \in U$. Saame seda teha, sest $k = \mathrm{odd}(G^*\backslash U) \leqslant |U|$ ning $u_1, \ldots, u_k$ on ühendatud kõigi ülejäänud tippudega.
- Hulga $U\backslash\{u_1, \ldots, u_k\}$ tipud seame mingil viisil omavahel paaridesse. See on võimalik, sest need tipud on kõik omavahel ühenduses ja neid on paarisarv (me juba nägime, et graafis G^* on paarisarv tippe).

Seega peab graafis $G^*\backslash U$ leiduma mingi sidus komponent H, mis ei ole täisgraaf. Sel juhul sisaldab H vähemalt kolme tippu, sest üheja kahetipulised graafid on kõik kas mittesidusad või täisgraafid.

Olgu H' graafi H maksimaalse tippude arvuga täisalamgraaf. Siis leiduvad tipud $z \in V(H)\backslash V(H')$ ning $y \in V(H')$ nii, et y ja z on omavahel servaga ühendatud. Kui selliseid tippe ei leiduks, siis oleks H' omaette sidus komponent.

Olgu $x \in V(H')$ selline tipp, et x ja z ei ole omavahel servaga ühendatud. Kui niisugust tippu ei leiduks, siis peaks ka z graafi H' tipp olema, seega ei oleks H' siis maksimaalse tippude arvuga.

Olgu $w \in V\backslash U$ selline tipp, et y ja w ei ole omavahel servaga ühendatud. Niisugune w peab leiduma, sest y ei ole ühendatud graafi G^* kõigi tippudega — vastasel juhul kuuluks ta ise hulka U. Tippude x, y, z ja w asendit ja nendevahelisi servi illustreerib joonis 7.1.



Joonis 7.1. Tipud y, z, x ja w Tutte'i teoreemi tõestuses.

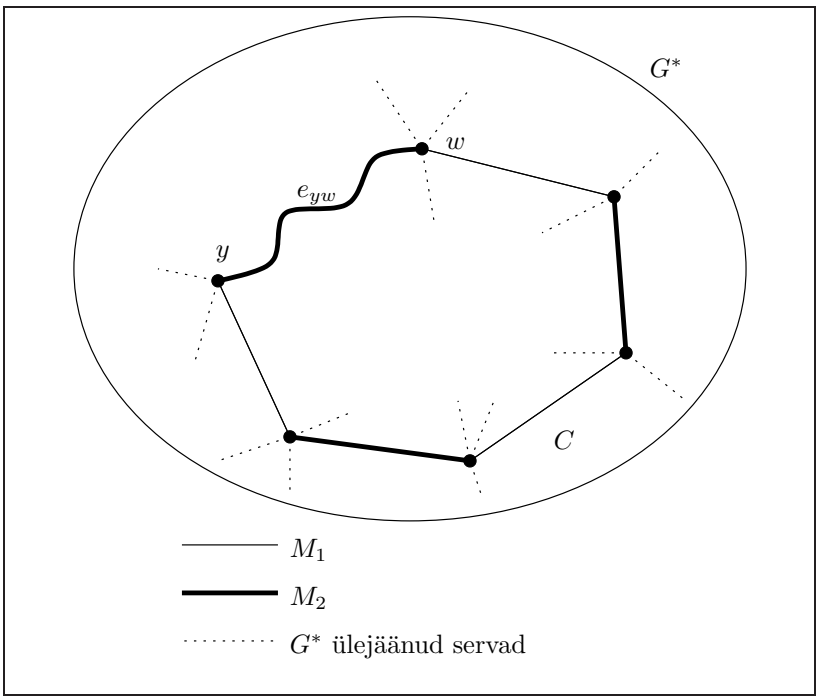
Et graafile G^* ükskõik millise serva lisamisel leidub temas täielik kooskõla, siis leidub täielik kooskõla M_1 graafis $G^* + e_{xz}$, kus $e_{xz} = \{x, z\}$, ning samuti täielik kooskõla M_2 graafis $G^* + e_{yw}$, kus $e_{yw} = \{y, w\}$.

Olgu $G' = (V, E')$, kus $E' \stackrel{\text{def}}{=} (M_1 \backslash M_2) \cup (M_2 \backslash M_1)$, s.t. graaf G' sisaldab graafi G^* kõiki tippe ja kõiki selliseid servi, mis kuuluvad täpselt ühte hulkadest M_1 ja M_2. Kui $v \in V$, siis on $\deg_{E'}(v)$ võimalikud väärtused ainult kas 0 või 2. Tõepoolest, leidub täpselt üks serv $e_1 \in M_1$ ja täpselt üks serv $e_2 \in M_2$, mis on intsidentnsed tipuga v. Kui $e_1 = e_2$, siis ei ole see serv graafis G' ja $\deg_{E'}(v) = 0$. Kui $e_1 \neq e_2$, siis $e_1 \notin M_2$ ja $e_2 \notin M_1$ (muidu poleks M_2 või M_1 kooskõla) ning seetõttu on nii e_1 kui ka e_2 graafi G' servad ja $\deg_{E'}(v) = 2$.

Kui tippude astmete võimalikeks väärtusteks on ainult 0 ja 2, siis sellise graafi sidusatel komponentidel on kaks võimalikku kuju — isoleeritud tipud ja tsüklid. Graafis G' olevates tsüklites esinevad vaheldumisi servad hulkadest M_1 ja M_2, muuhulgas tähendab see, et graafi G' kõik tsüklid on paarisarvulise pikkusega.

On selge, et $e_{xz} \in M_1$ ja $e_{yw} \in M_2$, sest muidu oleks M_1 või vastavalt M_2 juba graafi G^* täielik kooskõla, aga meie eeldasime, et graafil G^* ei ole täielikke kooskõlasid.

Vaatleme graafi G' neid sidusaid komponente (tsükleid), kuhu



Joonis 7.2. Tsükkel, mis sisaldab serva e_{yw}, aga mitte serva e_{xz}.

kuuluvad servad e_{xz} ja e_{yw}. On kaks võimalust — nad asuvad kas samas sidusas komponendis või erinevates sidusates komponentides.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus servad e_{xz} ja e_{yw} asuvad erinevates sidusates komponentides. Olgu C graafi G' tsükkel (sidus komponent), mis sisaldab serva e_{yw} (vaata ka joonist 7.2). Tähistagu $V_C \subseteq V$ kõigi nende tippude hulka, mida tsükkel C läbib. Olgu G^*_C graafi G^* indutseeritud alamgraaf tipuhulgaga V_C. Me näitame, et nii graafis G^*_C kui ka graafis $G^* \backslash V_C$ leidub täielik kooskõla. See aga on vastuolus meie eeldustega, sest nende kahe täieliku kooskõla ühend annab meile täieliku kooskõla graafis G^*.

- Täielikuks kooskõlaks graafis G^*_C on täieliku kooskõla M_1 kõigi nende servade hulk, mis kuuluvad tsüklisse C. Tõepoolest, tsükli C iga tipp on ju intsidentne täpselt ühe hulka M_1 kuu-

luva servaga. Samuti on kõik hulka M_1 kuuluvad servad, mis asuvad tsüklis C, ühtlasi ka graafi G^* servad, sest et serv e_{xz} ei asu tsüklis C.

- Täielikuks kooskõlaks graafis $G^*\backslash V_C$ on täieliku kooskõla M_2 kõigi nende servade hulk, mis ei kuulu tsüklisse C. See järeldub sellest, et M_2 kõigi nende servade hulk, mis ei kuulu tsüklisse C, on täielikuks kooskõlaks graafis $(G^* + e_{yw})\backslash V_C$, see graaf on aga võrdne graafiga $G^*\backslash V_C$ (sest $y, w \in V_C$).

Vaatleme nüüd juhtu, kus servad e_{xz} ja e_{yw} asuvad mõlemad graafi G' sidusas komponendis (tsüklis) C. Olgu V_C ja G_C^* defineeritud samamoodi nagu eelmisel juhul. Me konstrueerime taas täielikud kooskõlad graafides G_C^* ja $G^*\backslash V_C$ ning jõuame vastuoluni — täieliku kooskõlani graafis G^*.

Täielikuks kooskõlaks graafis $G^*\backslash V_C$ on taas täieliku kooskõla M_2 kõigi nende servade hulk, mis ei kuulu tsüklisse C, põhjendus on sama, mis eelmisel korralgi (tegelikult oleksime me võinud M_2 asemel kasutada ka täielikku kooskõla M_1).

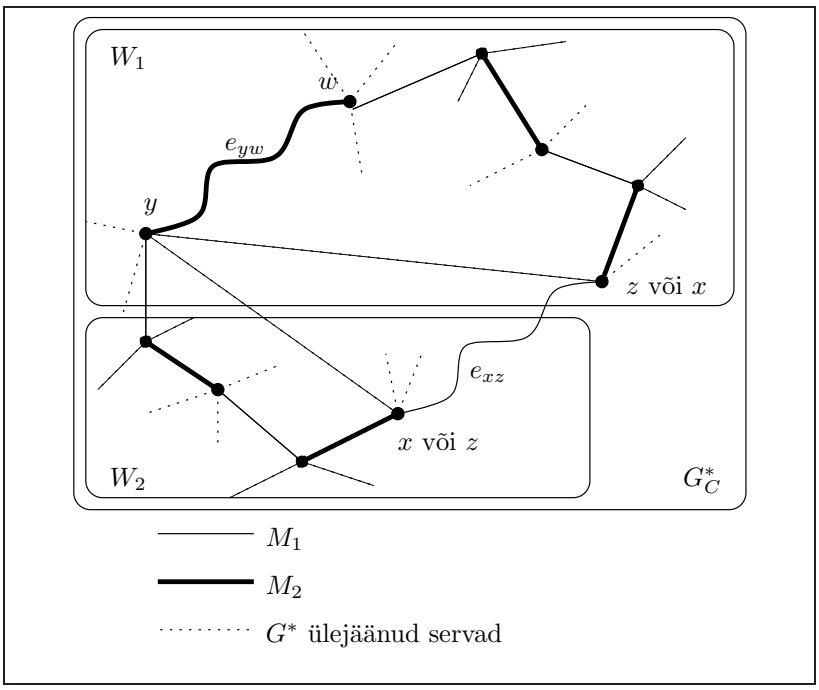
Tsüklit C ja graafi G_C^* illustreerib joonis 7.3 (W_1 ja W_2 defineerime hiljem). Nagu jooniselt näeme, võivad tipud x, y, z ja w esineda selles tsüklis kahes põhimõtteliselt erinevas järjekorras („põhimõtteliselt erinev“ tähendab, et pole teineteisest saadavad nihutamiste ja peegeldamiste teel), need järjekorrad on (y, w, z, x) ja (y, w, x, z). Oma edasises arutelus me eeldame, et järjekorraks on (y, w, z, x). Saamaks arutelu järjekorra (y, w, x, z) jaoks, tuleks meil edaspidises käsitluses lihtsalt kõikjal x ja z ära vahetada.

Olgu $W_1 \subseteq V_C$ tipuhulk, kuhu kuuluvad y, w ja kõik neile tsüklit C selles suunas $(y \to w \to \cdots)$ läbides järgnevad tipud, kuni tipuni z (kaasa arvatud).

Olgu $W_2 = V_C\backslash W_1$ ning G_i^*, kus $i \in \{1, 2\}$, graafi G^* indutseeritud alamgraaf tipuhulgaga W_i. Konstrueerimaks täielikku kooskõla graafis G_C^* piisab, kui konstrueerime täielikud kooskõlad graafides G_1^* ja G_2^*; nende kooskõlade ühend on täielik kooskõla graafis G_C^*.

Täielikuks kooskõlaks graafis G_2^* on täieliku kooskõla M_2 kõigi selliste servade hulk, mis on mõne hulka W_2 kuuluva tipuga intsidentsed.

Täielikuks kooskõlaks graafis G_1^* on täieliku kooskõla M_1 kõigi selliste servade hulk, mis on mõne hulka W_1 kuuluva tipuga intsidentsed,



Joonis 7.3. Tsükkel C, mis sisaldab servi e_{xz} ja e_{yw}.

ning millele lisaks on veel võetud serv tippude y ja z vahel. Serv y ja z vahel leidub vastavalt nende tippude valikule (joonis 7.1). Sellega oleme konstrueerinud täieliku kooskõla graafis G_C^* ning ka graafis G^*, mis annabki soovitud vastuolu. □

Ülesanded

Ülesanne 55. Antud n-järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ *permanendiks* nimetame suurust

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

kus S_n on n-elemendilise hulga sümmeetriline rühm. Ütleme, et ruutmaatriks P on *permutatsioonimaatriks*, kui tema igas reas ja igas veerus on täpselt üks 1 ning kõik ülejäänud elemendid on nullid. Ütleme, et maatriks A on *bistohhastiline*, kui kõik tema elemendid on mittenegatiivsed ja kõigi ridade ning kõigi veergude summad on 1.

Olgu A bistohhastiline (ruut)maatriks. Tõesta, et siis

1. $\mathrm{per}(A) \neq 0$;
2. A avaldub kujul $A = x_1P_1 + \ldots + x_rP_r$, kus x_i on mittenegatiivsed, $x_1 + \ldots + x_r = 1$ ja kõik maatriksid P_i on permutatsioonimaatriksid.

Ülesanne 56. Olgu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ hulga X alamhulkade pere. Siis nimetame vektorit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ selle pere *transversaaliks* ehk erinevate esindajate komplektiks, kui iga i korral $x_i \in X_i$ ja kõik elemendid x_i on erinevad.

Olgu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ hulga $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ alamhulkade selline pere, et iga i korral $|X_i| = k$ ja hulga X iga element kuulub täpselt k alamhulka. Tõesta, et

1. sellel perel leidub transversaal;
2. sellel perel leidub k lõikumatut transversaali.

Ülesanne 57. Olgu m ja n positiivsed täisarvud, kusjuures $m \leqslant n$. *Ladina ristkülik* on $(m \times n)$ maatriks $M = (m_{ij})$, mille elemendid on täisarvud, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

(a) $1 \leqslant m_{ij} \leqslant n$,

(b) üheski reas ega üheski veerus ei ole kaht võrdset elementi.

Kui $m = n$, siis nimetatakse seda ristkülikut *ladina ruuduks*.

Tõesta, et ladina ristkülikule M saab lisada $n - m$ rida nii, et moodustuks ladina ruut.

Ülesanne 58. Olgu m ja n positiivsed täisarvud. Hulk $\{1, 2, \ldots, mn\}$ on tükeldatud hulkadeks $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kus $|A_i| = m$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tõesta, et iga teise samasuguse tükelduse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ korral saab hulgad $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nii ümber nummerdada, et $A_i \cap B_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ülesanne 59. Kaks mustkunstnikku näitavad järgmist trikki. Esimene mustkunstnik läheb ruumist välja. Teine mustkunstnik võtab paki 100 kaardiga, mis on nummerdatud arvudega $1, 2, \ldots, 100$, ja laseb kolmel pealtvaatajal järgemööda valida igaühel ühe kaardi. Teine mustkunstnik näeb, millise kaardi iga pealtvaataja on võtnud. Seejärel lisab ta ühe kaardi ülejäänud pakist. Pealtvaatajad segavad need neli kaarti, kutsuvad esimese mustkunstniku tagasi ja annavad segatud kaardid talle. Esimene mustkunstnik vaatab neid nelja kaarti ning mõistatab ära, millise kaardi võttis esimene, millise teine ja millise kolmas pealtvaataja.

Tõesta, et mustkunstnikud saavad seda trikki teha.

Ülesanne 60. Kaks mustkunstnikku näitavad järgmist trikki. Esimene neist palub ühel pealtvaatajal valida bridžikaartide pakist (52 kaarti) viis kaarti ja anda need talle, näitamata neid teisele mustkunstnikule. Seejärel annab esimene mustkunstnik neist viiest kaardist üksteise järel neli tükki teisele mustkunstnikule. Teine mustkunstnik arvab seejärel viienda kaardi ära.

Tõesta, et mustkunstnikud saavad seda trikki teha.

Ülesanne 61. („Haaremiprobleem“) Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuseline graaf alustega X ja Y. Olgu $k \in \mathbb{N}$. Näita, et graafis G leidub servade hulk $M \subseteq E$ omadusega

$$\forall x \in X : \deg_M(x) = k$$
$$\forall y \in Y : \deg_M(y) \leqslant 1$$

parajasti siis, kui iga alamhulga $S \subseteq X$ korral $k \cdot |S| \leqslant |N(S)|$.

Ülesanne 62. Olgu $(X_1, \ldots, X_n)$ hulga X alamhulkade pere ning $(x_1, \ldots, x_n)$ ja $(y_1, \ldots, y_n)$ selle pere kaks transversaali. Näita, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral leiduvad $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $x'_1, \ldots, x'_n \in X$ nii, et $(x'_1, \ldots, x'_n)$ on pere $(X_1, \ldots, X_n)$ transversaal ja

$$\{x'_1, \ldots, x'_n\} = \{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_j\} \ .$$

8. Graafi servade värvimine

Olgu meil antud silmusteta graaf $G = (V, E)$. Peale selle olgu antud graafi G kooskõlad $M_1, \ldots, M_k$, mis moodustavad servade hulga E tükelduse.

Vajadus selliseid servade hulka tükeldavaid kooskõlasid konstrueerida tekib näiteks järgmisel juhul. Olgu X mingi toodete hulk ning olgu Y mingi tööpinkide hulk. Vaatame kahealuselist graafi alustega X ja Y, kus serv $x \in X$ ja $y \in Y$ vahel tähendab, et toote x valmistamisel tuleb mingil ajal kasutada pinki y. Eeldame, et üht toodet võib pinkidel töödelda ükskõik mis järjekorras. Samuti eeldame, et kõigi töötlemiste ajakulu on 1 ajaühik.

Kooskõlade hulk $M_1, \ldots, M_k$ sellel graafil kujutab siis endast tööplaani — kui serv, mis ühendab toodet x ja tööpinki y, kuulub kooskõlla M_i, siis tähendab see seda, et ajahetkel i tuleb toodet x töödelda pingil y.

Antud graafi $G = (V, E)$ korral huvitab meid, milline on minimaalne selline k, et leiduks servahulga E tükeldus kooskõladeks $M_1, \ldots, M_k$. Seda minimaalset k väärtust tähistame sümboliga $\chi'(G)$ ja nimetame graafi G *kromaatiliseks arvuks servade järgi*.

Sama probleemi saab ka teisiti sõnastada (ja see sõnastus selgitab, miks sümbolit $\chi'(G)$ just niimoodi nimetatakse). Silmusteta graafi $G = (V, E)$ *servade värvimisviisiks k värviga* nimetatakse funktsiooni γ graafi servade hulgast E hulka $\{1, \ldots, k\}$. Värvimisviisi γ nimetatakse *korrektseks*, kui ei leidu tippu $v \in V$ ja servi $e_1, e_2 \in E$ nii, et e_1 ja e_2 on intsidentsed tipuga v ning $\gamma(e_1) = \gamma(e_2)$. Graafi G kromaatiline arv servade järgi on siis vähim selline k, mille puhul leidub G servade korrektne värvimisviis k värviga. Tähistus χ' tuleb kreekakeelsest sõnast $\chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha$ — värv (tähistust χ kasutame tippude värvimise juures).

Tähistagu $\Delta(G)$ graafi G tippude maksimaalset astet. On ilmne, et $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$, sest kõik maksimaalse astmega tipuga intsidentsed servad peavad olema eri värvi. Järgnevas me näitame, et kahealuselise graafi G korral $\chi'(G) = \Delta(G)$ ning lihtgraafi G korral $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Teoreem 8.1. *Kui G on kahealuseline graaf, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Tõestus. Olgu X ja Y graafi $G = (V, E)$ alused. Eeldame, et

$|X| = |Y|$; kui see nii ei ole, siis lisame väiksema võimsusega alusele niipalju uusi tippe, et aluste võimsused võrdsustuksid.

Olgu $k = \Delta(G)$. Järgmise sammuna muudame graafi G k-regulaarseks. Kui ta seda veel ei ole, siis leidub mingi tipp x mingis aluses (üldisust kitsendamata eeldame, et aluses X) nii, et $\deg(x) < k$. Siis peab ka aluses Y leiduma mingi tipp y nii, et $\deg(y) < k$, sest tippude astmete summa ühes aluses on võrdne astmete summaga teises aluses ning mõlemas aluses on ühepalju tippe. Lisame graafile G serva, mis ühendab tippe x ja y. On selge, et kui graaf G on pärast selle serva lisamist värvitav k värviga, siis oli ta ka enne lisamist värvitav k värviga. Kordame seda operatsiooni senikaua, kuni oleme tulemuseks saanud k-regulaarse graafi.

Vastavalt järeldusele 7.3 leidub regulaarses kahealuselises graafis täielik kooskõla. Olgu M_1 meie k-regulaarse kahealuselise graafi $G = (V, E)$ mingi täielik kooskõla. Vaatleme graafi $(V, E \setminus M_1)$, mis on $(k-1)$-regulaarne kahealuseline. Järelikult leidub ka temas mingi täielik kooskõla M_2 ning graaf $(V, E \setminus (M_1 \cup M_2))$ on $(k-2)$-regulaarne kahealuseline. Neid samme jätkates tükeldame servade hulga E lõpuks täielikeks kooskõladeks $M_1, \ldots, M_k$. See k ehk $\Delta(G)$ täielikku kooskõla sisaldav tükeldus annabki meile G servade korrektse värvimisviisi $\Delta(G)$ värviga. □

Vaatleme nüüd suvalisi lihtgraafe. Kõigepealt sõnastame me ühe üpris tehnilise (ja ehk isegi kunstilikuvõitu) lemma. Sellest lemmast järeldub kohe tulemus, mida me käesoleva peatüki alguses näidata lubasime.

Lemma 8.2. *Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, $k \in \mathbb{N}$ ning $v \in V$ selline tipp, et*

(i) v ja kõigi tema naabertippude aste on ülimalt k;

(ii) tipul v on ülimalt üks naabertipp, mille aste on täpselt k.

Sel juhul, kui graafis $G \setminus v$ leidub servade korrektne värvimisviis k värviga, siis ka graafis G leidub servade korrektne värvimisviis k värviga.

Teoreem 8.3 (Vizing). *Kui G on lihtgraaf, siis*

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

Tõestus. Seda, et $\Delta(G) \leqslant \chi'(G)$, oleme me juba näidanud. Võrratuse $\chi'(G) \leqslant \Delta(G)+1$ tõestamiseks tõestame induktsiooniga tippude arvu järgi võrratuse $\chi'(G') \leqslant \Delta(G)+1$, kus G' on graafi G mingi indutseeritud alamgraaf.

Kui graafis G' on ainult üks tipp, siis loomulikult leidub G' servade korrektne värvimisviis $\Delta(G)+1$ värviga. Oletame nüüd, et graafis G' on enam kui üks tipp, ning olgu v graafi G' mingi tipp. Kui valida $k = \Delta(G)+1$, siis on graafis G' tipu v jaoks lemma 8.2 eeldused (i) ja (ii) triviaalselt täidetud — tipu v ja tema naabrite astmed ei ole suuremad kui $\Delta(G)$. Induktsiooni tarvis oletame, et $G'\backslash v$ on värvitav $\Delta(G)+1$ värviga. Lemma 8.2 kohaselt on siis ka G' värvitav $\Delta(G)+1$ värviga. □

Lemma 8.2 tõestus. Lemma tõestatakse induktsiooniga k järgi. Kui $k = 1$, siis ka $\deg(v) \leqslant 1$ ja kui $\deg(v) = 1$, s.t. tipul v on naabertipp u, siis on ka selle naabertipu aste 1. Seega kas v on graafis G isoleeritud tipp, või on graafi G tippu v sisaldav sidus komponent kujul u — v. Esimesel juhul on graafidel $G\backslash v$ ja G samad servad ning $G\backslash v$ servade korrektne värvimisviis 1 värviga on ühtlasi ka G servade korrektne värvimisviis 1 värviga. Teisel juhul saame G servade korrektse värvimisviisi $G\backslash v$ servade korrektsest värvimisviisist, kui me lisaks värvime tippude u ja v vahelise serva ainsama värviga.

Olgu $k > 1$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et tipu v aste on täpselt k, et tipul v on täpselt üks naaber, mille aste on täpselt k, ning et tipu v kõigi ülejäänud naabertippude aste on täpselt $k-1$. Tõepoolest, kui mõne tipu v' (kus v' on kas v või v naabertipp) aste on eeldatust väiksem, siis lisame graafile G uue tipu u ning uue serva $\{u, v'\}$, millega tipu v' aste suureneb ühe võrra. On ilmne, et kui enne uue tipu ja serva lisamist oli graafil $G\backslash v$ servade korrektne värvimisviis k värviga, siis on tal selline värvimisviis ka pärast. Samuti on ilmne, et me ei jää graafi G sel viisil lõpmatuseni täiendama.

Olgu γ graafi $G\backslash v$ servade mingi korrektne värvimisviis k värviga. Olgu X_i, kus $i \in \{1, \ldots, k\}$, tipu v selliste naabrite (graafis G) v' hulk, et graafis $G\backslash v$ ei leidu tipuga v' intsidentset serva e, mille korral $\gamma(e) = i$ (sellises olukorras me ütleme, et värv i *ei esine* tipus v').

Formaalselt võib selle definitsiooni esitada kujul

$$X_i \stackrel{\text{def}}{=} \{v' \mid v' \in V, \{v, v'\} \in E, \nexists v'' \in V \backslash \{v\} : \\ \{v', v''\} \in E \wedge \gamma(\{v', v''\}) = i\} \ .$$

Tipu v ühe naabri aste graafis $G\backslash v$ on $k-1$, see tipp kuulub täpselt ühte hulkadest X_i. Tipu v ülejäänud naabrite aste selles graafis on $k-2$, need tipud kuuluvad igaüks täpselt kahte hulkadest X_i. Kokkuvõttes saame

$$\sum_{i=1}^{k} |X_i| = 2\deg(v) - 1 = 2k - 1 < 2k \ . \tag{8.1}$$

Järgmise sammuna näitame, et värvimisviisi γ saab alati valida niiviisi, et oleks

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, k\} : \big||X_i| - |X_j|\big| \leqslant 2 \ . \tag{8.2}$$

Tõepoolest, see väide kehtib näiteks kõigi selliste värvimisviiside γ jaoks, mille puhul $\sum_{i=1}^{k} |X_i|^2$ on minimaalne võimalikest. Oletame väitevastaselt, et mingi γ puhul on see summa minimaalne, aga leiduvad värvid i ja j, nii et $|X_i| > |X_j| + 2$. Vaatleme graafi $G\backslash v$ alamgraafi H, millel on sama tipuhulk ning mille servadeks on täpselt need graafi $G\backslash v$ servad e, mille jaoks $\gamma(e) = i$ või $\gamma(e) = j$. Graafis H on kõigi tippude astmed kas 0, 1 või 2, seega on graafi H sidusad komponendid kõik kas isoleeritud tipud, ahelad või tsüklid.

Paneme tähele, et kui me värvimisviisi γ sel viisil muudame, et valime välja graafi H ühe sidusa komponendi H' ning „vahetame“ sellesse komponenti kuuluvate servade värvid (s.t. kui mingi serv oli enne värvitud värviga i, siis on ta pärast värvitud värviga j ja vastupidi), siis on ka saadav värvimisviis γ' korrektne. Tõepoolest, kui mingi tipp ei kuulu komponenti H', siis värvivad viisid γ ja γ' temaga intsidentsed servad ühtemoodi. Kui mingi tipp kuulub komponenti H', siis on viisil γ' värvides selle tipuga intsidentseid servi, mis on värvi i, sama palju, kui on viisil γ värvides selle tipuga intsidentseid servi, mis on värvi j — s.t. ülimalt 1 (sest γ on korrektne värvimisviis). Samuti on värvimisviisis γ' selle tipuga intsidentseid servi, mis on värvi j, ülimalt 1. Muid värve kasutavad värvimisviisid γ ja γ' ühtemoodi.

Olgu $v' \in X_i \backslash X_j$, s.t. leidub tipuga v' intsidentseid servi, mis on värvitud värviga j, aga ei leidu intsidentseid servi, mis on värvitud värviga i. Järelikult leidub graafis H sidus komponent H', mis on ahel ning mille üheks otstipuks on v'. Et $|X_i| > |X_j|$, siis on võimalik v' valida sellisel viisil, et ahela H' teine otstipp v'' ei kuulu hulka $X_j \backslash X_i$; olgu v' sellisel viisil valitud. Tipp v'' kas ei ole tipu v naabertipp või kuulub ta hulka $X_i \backslash X_j$.

Vahetame sidusasse komponenti H' kuuluvate servade värvid. Sellega me tõstame tipu v' hulgast X_i hulka X_j. Kui v'' on tipu v naabertipp, siis me tõstame ka tema hulgast X_i hulka X_j. Rohkem muutusi hulkades $X_1, \ldots, X_k$ ei toimu. Seega oleme me vähendanud suurust $|X_i|$ ühe või kahe võrra ning suurendanud suurust $|X_j|$ sama palju. Selline muutus vähendab suurust $|X_i|^2 + |X_j|^2$. Tõepoolest, kui $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x - y > 2$, siis

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + y^2 - 2(x-y) + 2 < x^2 + y^2 - 2 \cdot 2 + 2,$$
$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = x^2 + y^2 - 4(x-y) + 8 < x^2 + y^2 - 4 \cdot 2 + 8 \ .$$

Me oleme näidanud, et värvimisviis γ on valitav nii, et (8.2) osutuks tõeseks; eeldame, et γ on niimoodi valitud.

Võrratuste (8.1) ja (8.2) tõttu kuuluvad kõik suurused $|X_i|$, kus $i \in \{1, \ldots, k\}$, hulka $\{0, 1, 2\}$ või hulka $\{1, 2, 3\}$. Kui nad kuuluvad hulka $\{1, 2, 3\}$, siis peab leiduma mõni i nii, et $|X_i| = 1$, sest muidu ei kehtiks võrratus (8.1). Ka siis, kui nad kuuluvad hulka $\{0, 1, 2\}$, peab leiduma mõni i, mille korral $|X_i| = 1$, sest võrduse (8.1) kohaselt on kõigi hulkade X_i võimsuste summa paaritu arv. Üldisust kitsendamata eeldame, et $|X_k| = 1$. Tähistagu u hulga X_k ainsat elementi.

Olgu graaf G' saadud graafist G, eemaldades sealt serva $\{v, u\}$ ning kõik servad $e \in E$, mille korral $\gamma(e) = k$. Neid servi eemaldades vähendame me tipu v astet ühe võrra, tipu u astet ühe võrra ning ka tipu v ülejäänud naabertippude astet ühe võrra, sest ülejäänud naabertippudel on igaühel intsidentne serv, mille värvimisviis γ värvib värviga k. Seega on graafis G' tipu v aste $k - 1$. Samuti on v kõigi naabertippude aste graafis G' ülimalt $k - 1$ ning v ülimalt ühe naabertipu aste graafis G' on täpselt $k - 1$.

Värvimisviis γ, mis oli graafi $G \backslash v$ korrektne värvimisviis k värviga, on ühtlasi graafi $G' \backslash v$ korrektne värvimisviis $k - 1$ värviga.

Tõepoolest, graaf $G'\backslash v$ on saadud graafist $G\backslash v$ eemaldades sealt kõik servad, mis on värvitud värviga k.

Me oleme näidanud, et lemma 8.2 eeldused kehtivad graafi G', tipu v ja värvide arvu $k-1$ jaoks. Induktsiooni oletuse järgi leidub graafi G' korrektne värvimisviis $k-1$ värviga. Olgu see värvimisviis γ'. Graafi G korrektse värvimisviisi k värviga saame värvimisviisist γ' nii, et kõik servad $e \in E$, mille korral $\gamma(e) = k$, värvime värviga k ning serva $\{u, v\}$ värvime samuti värviga k. □

Ülesanded

Ülesanne 63. Leia $\chi'(K_n)$, $\chi'(P_n)$ ja $\chi'(C_n)$.

Ülesanne 64. Näita, et paaritu arvu tippudega regulaarse mittenullgraafi G jaoks $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Ülesanne 65. Näita, et $\chi'(\text{Pet}) = 4$ (vt. ülesannet 1.8).

Ülesanne 66. Näita, et 3-regulaarses Hamiltoni graafis G on $\chi'(G)$ võrdne kolmega.

Ülesanne 67. Näita, et kui graafi G servad on k värviga korrektselt värvitavad, siis on nad k värviga värvitavad ka sellisel viisil, et servade arvud, mis on ühe või teise värviga värvitud, üksteisest rohkem kui ühe võrra ei erine.

Ülesanne 68. Kirjelda lihtsat algoritmi puu servade värvimiseks vähima võimaliku arvu värvidega.

Ülesanne 69. Graaf G on *χ'-kriitiline* siis, kui $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ ja G suvalise serva eemaldamisel saadava graafi servi saab värvida väiksema arvu värvidega.

1. Leia 5-tipuline χ'-kriitiline graaf, mille korral $\Delta(G) = 3$.
2. Milliste n väärtuste korral on K_n χ'-kriitiline?

Ülesanne 70. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ja olgu $S \subseteq V$ kõigi selliste tippude v hulk, kus $\deg(v) = \Delta(G)$. Olgu $G[S]$ graafi G alamgraaf, mille indutseerib tipuhulk S. Näita, et kui $G[S]$ on mets, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$.

9. Klikid ja sõltumatud hulgad

Sissejuhatuseks vaatleme järgmist ülesannet. Tõestada, et igal peol, kus on vähemalt kuus inimest, leidub alati kas

- kolm inimest, kes kõik tunnevad üksteist, või siis
- kolm inimest, kes ei tunne üksteist.

Graafiteooria terminitesse üle minnes võib olukorda kirjeldada nii. Olgu V peol olevate inimeste hulk ja $E \subseteq V \times V$ binaarne relatsioon hulgal V, nii et iga kahe inimese $u, v \in V$ korral $\{u, v\} \in E$ parajasti siis kui u ja v tunnevad teineteist.

Lihtgraafi G tippude alamhulka $S \subseteq V(G)$ nimetatakse *klikiks*, kui iga kahe tipu $u, v \in S$ jaoks, kus $u \neq v$, leidub graafis G serv nende kahe tipu vahel. Alamhulka $S \subseteq V(G)$ nimetatakse *sõltumatuks hulgaks* siis, kui ühegi kahe hulka S kuuluva tipu vahel ei ole graafis G serva. Äsjaesitatud väide pidude kohta on väljendatav graafiteoorias järgmise teoreemina.

Teoreem 9.1. *Iga suunamata lihtgraaf $G = (V, E)$, kus $|V| \geqslant 6$, sisaldab indutseeritud alamgraafina vähemalt ühte graafidest K_3 (kolmetipuline täisgraaf) ja O_3 (kolmetipuline nullgraaf), s.t. sisaldab kas kolme-elemendilist klikki või siis kolme-elemendilist sõltumatut hulka.*

Tõestus. Olgu $v \in V$ mingi suvaline tipp, $N(v) = \{u \,|\, \{u, v\} \in E\}$ tipu v naabrite hulk ja $\overline{N}(v) = \{u \,|\, u \neq v,\ \{u, v\} \notin E\}$ tipu v mittenaabrite hulk. Peale tipu v leidub graafis G veel vähemalt viis tippu, mistõttu kas

a) $|N(v)| \geqslant 3$, või siis

b) $|\overline{N}(v)| \geqslant 3$.

Juhul a) vaatleme indutseeritud alamgraafi tipuhulgaga $N(v)$ ja kahte esineda saavat võimalust.

a1) Iga kahe tipu $u, w \in N(v)$ korral $\{u, w\} \notin E$. Siis on $N(v)$ sõltumatu hulk, milles on vähemalt kolm tippu.

a2) Leiduvad tipud $u, w \in N(v)$, nii et $\{u, w\} \in E$. Sel juhul on aga $\{u, v, w\}$ kolme-elemendiline klikk.

Juhul b) vaatleme indutseeritud alamgraafi tipuhulgaga $\overline{N}(v)$ ja kahte esineda saavat võimalust.

b1) Iga kahe erineva tipu $u, w \in \overline{N}(v)$ korral $\{u, w\} \in E$. Siis on $\overline{N}(v)$ klikk, milles on vähemalt kolm tippu.

b2) Leiduvad erinevad tipud $u, w \in \overline{N}(v)$, nii et $\{u, v\} \notin E$. Siis aga on $\{u, v, w\}$ kolme-elemendiline sõltumatu hulk.

Teoreem on tõestatud. □

Teoreemist 9.1 tulenevalt võib tekkida uus ja üldisem küsimus: „Kas kõigi positiivsete täisarvude k ja ℓ korral leidub täisarv $r(k, \ell)$ nii, et iga graaf $G = (V, E)$, kus $|V| \geqslant r(k, \ell)$, sisaldab indutseeritud alamgraafina kas k-elemendilist klikki (s.t. $K_k \hookrightarrow G$) või siis ℓ-elemendilist sõltumatut hulka (s.t. $O_\ell \hookrightarrow G$)?“ Osutub, et vastus sellele küsimusele on jaatav. Küsimuse tõstatas (ja ka vastas) esimesena Ramsey. Nii tekkis Ramsey teooria.

NB! Edaspidi eeldame, et $r(k, \ell)$ on vähim selline positiivne täisarv r, mis rahuldab tingimust „$K_k \hookrightarrow G$ või $O_\ell \hookrightarrow G$ iga suunamata lihtgraafi $G = (V, E)$ korral, kus $|V| \geqslant r$“. Arve $r(k, \ell)$ nimetatakse *Ramsey arvudeks*.

Lemma 9.2. *Kõigi positiivsete täisarvude k ja ℓ korral*
$r(1, \ell) = r(k, 1) = 1$, $r(2, \ell) = \ell$ *ja* $r(k, 2) = k$.

Tõestus. Iga graaf, kus on vähemalt üks tipp, sisaldab alati ühe-elemendilist klikki ja ühe-elemendilist sõltumatut hulka. Seega $r(1, \ell) = 1$ ja $r(k, 1) = 1$.

Olgu $G = (V, E)$ mingi ℓ-tipuline graaf. On selge, et kui leiduvad tipud $u, v \in V$, nii et $(u, v) \in E$, siis $K_2 \hookrightarrow G$. Kui aga $(u, v) \notin E$ iga kahe tipu u ja v korral, siis G on nullgraaf ja seega $O_\ell \hookrightarrow G$. Samas on selge, et leidub $(\ell - 1)$-tipuline graaf, milles ei sisaldu ei K_2 ega ka O_ℓ. Selleks on $O_{\ell-1}$. Seega tõepoolest $r(2, \ell) = \ell$.

Olgu nüüd $G = (V, E)$ mingi k-tipuline graaf. On selge, et kui leiduvad erinevad tipud $u, v \in V$, nii et $(u, v) \notin E$, siis $O_2 \hookrightarrow G$. Kui aga $(u, v) \in E$ iga kahe erineva tipu u ja v korral, siis on G täisgraaf ja järelikult $K_k \hookrightarrow G$. Samas leidub $(k - 1)$-tipuline graaf K_{k-1}, mis ei sisalda indutseeritud alamgraafina ei graafi K_k ega ka graafi O_2. Seega tõepoolest $r(k, 2) = k$. □

Teoreemist 9.1 järeldub, et $r(3,3) \leqslant 6$. Samas leidub viie-tipuline graaf, mis ei sisalda ei kolme-elemendilist klikki ega ka kolme-elemendilist nullgraafi. Selleks sobib näiteks viie-elemendiline tsükkel.

Teoreem 9.3 (Ramsey). *Kõigi täisarvude $k, \ell \geqslant 2$ korral kehtib võrratus*

$$r(k,\ell) \leqslant r(k-1,\ell) + r(k,\ell-1) \ .$$

Tõestus. Kasutame induktsiooni summa $k+\ell$ järgi. Kui $k+\ell = 4$, s.t. $k = \ell = 2$, siis vastavalt lemmale 9.2

$$r(k,\ell) = 2 = 1+1 = r(1,2) + r(2,1) = r(k-1,\ell) + r(k,\ell-1).$$

Oletame, et väide kehtib kõigi niisuguste k' ja ℓ' korral, et $k'+\ell' < k+\ell$. Olgu $G = (V,E)$ graaf, milles on

$$|V| = r(k-1,\ell) + r(k,\ell-1)$$

tippu, ning $v \in V$ mingi suvaline tipp. On selge, et kas

a) $|N(v)| \geqslant r(k-1,\ell)$, või siis

b) $|\overline{N}(v)| \geqslant r(k,\ell-1)$.

Juhul a) vaatleme indutseeritud alamgraafi G' tipuhulgaga $N(v)$. Vastavalt induktsiooni oletusele on kaks võimalust:

a1) $K_{k-1} \hookrightarrow G'$, millest järeldub et $\{v\} \cup N(v)$ on k-tipuline klikk;

a2) $O_\ell \hookrightarrow G'$, millest triviaalselt tuleneb, et ka $O_\ell \hookrightarrow G$.

Juhul b) vaatleme indutseeritud alamgraafi G'' tipuhulgaga $\overline{N}(v)$. Vastavalt induktsiooni oletusele on jälle kaks võimalust:

b1) $O_{\ell-1} \hookrightarrow G''$, millest järeldub et $\{v\} \cup \overline{N}(v)$ on ℓ-tipuline sõltumatu hulk;

b2) $K_k \hookrightarrow G''$, millest triviaalselt tuleneb, et ka $K_k \hookrightarrow G$.

Teoreem on tõestatud. □

Järeldus 9.4. *Kui $k, \ell \geqslant 2$ ning $r(k, \ell-1)$ ja $r(k-1, \ell)$ on mõlemad paarisarvud, siis*

$$r(k,\ell) \leqslant r(k-1,\ell) + r(k,\ell-1) - 1 \ .$$

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ graaf, milles on $r(k-1,\ell)+r(k,\ell-1)-1$ tippu. Et tippude arv on paaritu ning vastavalt teoreemile 1.1 leidub igas graafis paarisarv paaritu astmega tippe, siis peab vaadeldavas graafis leiduma selline tipp $v \in V$, millel on paarisarv naabreid. Et nii $|N(v)|$ kui ka $|\overline{N}(v)|$ on paarisarvud, siis kehtib taas üks järgmistest väidetest: kas

a) $|N(v)| \geqslant r(k-1,\ell)$, või siis

b) $|\overline{N}(v)| \geqslant r(k,\ell-1)$.

Tõestus jätkub identselt teoreemi 9.3 tõestusega. □

Teoreem 9.5. *Kõigi täisarvude $k, \ell \geqslant 2$ korral*

$$r(k,\ell) \leqslant \binom{k+\ell-2}{k-1}.$$

Tõestus. Kasutame induktsiooni $k+\ell$ järgi. Kui $k = \ell = 2$, siis

$$r(k,\ell) = 2 = \binom{2}{1} = \binom{k+\ell-2}{k-1}.$$

Olgu k, ℓ positiivsed täisarvud ja kehtigu teoreemi väide kõigi niisuguste k', ℓ' korral, et $k'+\ell' < k+\ell$. Siis vastavalt teoreemile 9.3

$$\begin{aligned} r(k,\ell) &\leqslant r(k-1,\ell) + r(k,\ell-1) \leqslant \\ &\leqslant \binom{k+\ell-3}{k-2} + \binom{k+\ell-3}{k-1} = \binom{k+\ell-2}{k-1}, \end{aligned}$$

mis tõestabki teoreemi. □

Järelikult $r(k,k) \leqslant \binom{2k-2}{k-1} \leqslant 2^{2k-3}$. Järgnev teoreem annab suurusele $r(k,k)$ ka alumise tõkke.

Teoreem 9.6 (Erdős). *Kui $k \geqslant 2$, siis $r(k,k) \geqslant 2^{k/2}$.*

Tõestus. Teoreemi väide on lihtsalt kontrollitav juhul $k = 2$, seetõttu eeldame, et $k \geqslant 3$. Tõestus on mittekonstruktiivne ja põhineb niinimetatud tõenäosuslikul meetodil. Leidub täpselt $2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ paarikaupa mitteisomorfset märgendatud n-tipulist graafi (üle mingi fikseeritud märgendite hulga M). Olgu G graaf, mis on nende hulgast juhuslikult valitud. Seejuures eeldame, et see valik on *ühtlane*, s.t. igaühel nendest $2^{\binom{n}{2}}$ graafist on sama suur tõenäosus valituks saada. Tõestame, et kui $n < 2^{k/2}$, siis (klassikaline) tõenäosus

$$\mathsf{P}[K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_k \hookrightarrow G] < 1,$$

mistõttu järeldame, et leidub n-tipuline graaf, mis ei sisalda alamgraafina ei graafi K_k ega graafi O_k ja seega $r(k,k) \geqslant 2^{k/2}$.

Tõepoolest, kui $n < 2^{k/2}$ ja $k \geqslant 3$, siis

$$\begin{aligned} \mathsf{P}[K_k \hookrightarrow G] &\leqslant \frac{\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \leqslant \frac{n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} < \\ &< \frac{2^{k^2/2} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Et ka võrratus $\mathsf{P}[O_k \hookrightarrow G] < 1/2$ on analoogiliselt tõestatav, siis saame, et

$$\mathsf{P}[K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_k \hookrightarrow G] \leqslant \mathsf{P}[K_k \hookrightarrow G] + \mathsf{P}[O_k \hookrightarrow G] < 1,$$

mis tõestabki teoreemi. □

Ramsey arvusid $r(k,\ell)$ saab mitmel viisil üldistada. Siinkohal vaatame neist ühte, mis tugineb sellele, et võime arvu $r(k,\ell)$ defineerida ka kui vähima arvu n, mille korral täisgraafi K_n servi ükskõik mis viisil kahe värviga värvides leiduvad k tippu, mille vahelised servad on kõik värvitud esimese värviga, või ℓ tippu, mille vahelised servad on kõik värvitud teise värviga.

Kahe värvi asemel võime me vaadata ka mingit muud arvu värve. Defineerimegi *Ramsey arvu* $r(a_1, \ldots, a_k)$ kui vähima sellise arvu n, mille korral täisgraafi K_n servi ükskõik mis viisil k värviga värvides

leidub selline $i \in \{1, \ldots, k\}$, et leiduvad a_i tippu, mille vahelised servad on kõik värvitud värviga i.

Arvud $r(a_1, \ldots, a_k)$ rahuldavad teoreemi 9.3 väitega analoogilist võrratust, nimelt kehtib võrratus

$$r(a_1, \ldots, a_k) \leqslant -(k-2) + \\ + \sum_{i=1}^{k} r(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_k) \ . \quad (9.1)$$

Selle võrratuse tõestus on analoogiline teoreemi 9.3 tõestusega.

Ülesanded

Ülesanne 71. Olgu $G = (V, E)$ mingi silmusteta graaf, K tema mingi minimaalne kate ja S tema mingi maksimaalse võimsusega sõltumatu hulk. Näita, et $|K| + |S| = |V|$.

Ülesanne 72. Tõesta, et $r(3, 4) = 9$.

Ülesanne 73. Tõesta, et $r(n+1, n+1) \leqslant 4^n$.

Ülesanne 74. Tõesta, et suvaliste naturaalarvude k ja ℓ korral leidub selline naturaalarv n, et igas reaalarvujärjendis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ leidub kas mittekahanev alamjärjend pikkusega k või mittekasvav alamjärjend pikkusega ℓ.

Ülesanne 75. Näita, et kui mõni arvudest $a_1, \ldots, a_k$ on võrdne ühega, siis $r(a_1, \ldots, a_k) = 1$.

Ülesanne 76. Tõesta võrratus (9.1).

Ülesanne 77. Tõesta, et $r(3, 3, 3) \leqslant 17$.

Ülesanne 78. Tõesta, et

$$r(a_1, \ldots, a_{i-1}, 2, a_{i+1}, \ldots, a_k) = r(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

Ülesanne 79. Näita, et iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks leidub arv $m_n \in \mathbb{N}$, nii et hulga $\{1, 2, \ldots, m_n\}$ suvalisel tükeldusel n tükiks leiduvad arvud x ja y nii, et x, y ja $x + y$ kõik kuuluvad samasse tükki.

10. Tasandilised graafid

10.1. Tasandilisuse definitsioon

Graaf on *tasandiline* (ehk *planaarne*) siis, kui teda on võimalik tasandile joonistada nii, et tema servad väljaspool tippe ei lõikuks.

See „definitsioon“ on küll hästi intuitiivne, kuid ta pole matemaatiliselt range, sest „joonistamine“ ei ole rangelt defineeritud mõiste. Anname siinkohal tasandilisuse ühe võimaliku range definitsiooni, kuigi käesolevas õppematerjalis kasutame edaspidi vaid eeltoodud mitteranget definitsiooni ja jätame seetõttu mõned väliselt ilmsed, kuid tegelikult mittetriviaalsed väited tõestamata.

Joone eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^n$ määrab funktsioon $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, kus $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Punkte $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$ nimetatakse joone γ *otspunktideks*. Joon $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on *pidev* siis, kui iga $y \in [a,b]$ jaoks kehtib $\lim\limits_{x \to y} \gamma(x) = \gamma(y)$.

Pidev joon on *sirgestuv* siis, kui osutub lõplikuks ülemraja

$$\sup\Big\{\sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \,:\, k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\Big\}$$

(siin d on kaugus ruumis $\mathbb{R}^n$ ja ülemraja leitaks lõigu $[a,b]$ kõikvõimalike jaotuste järgi). Seda ülemraja nimetatakse joone *pikkuseks*.

Jordani jooneks nimetatakse sirgestuvat joont, mis ennast ei lõika (s.t. funktsiooniga γ määratud kujutus on injektiivne). Olgu J_n kõigi Jordani joonte hulk ruumis $\mathbb{R}^n$.

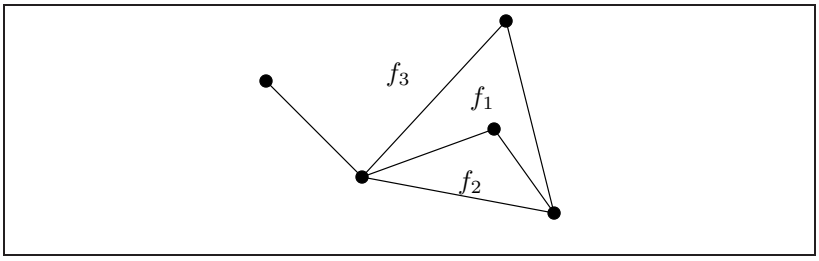
Graaf $G = (V, E)$ on *sisestatav* ruumi $\mathbb{R}^n$, kui leiduvad injektiivsed kujutused $\iota_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\iota_E : E \longrightarrow J_n$, mille korral

- kui tipp $v \in V$ osutub serva $e \in E$ üheks otstipuks, siis on punkt $\iota_V(v)$ joone $\iota_E(e)$ üheks otspunktiks;
- servade kujutisteks olevad jooned lõikuvad üksteisega vaid nende ühistes otspunktides.

Graaf on *tasandiline* siis, kui ta on sisestatav tasandile, s.t. ruumi $\mathbb{R}^2$. Tema sisestus tasandile ongi see, mida me intuitiivselt mõistame graafi joonise all.

10.2. Euleri valem

Kui graaf on mingil viisil tasandile joonistatud, siis jaotab see joonis tasandi ülejäänud osa (s.t. osa, mis ei jää joonise alla) osadeks. Tasandi kaht punkti loeme erinevates osades olevaks siis, kui ühest punktist teise jõudmiseks tuleb graafi joonisest üle minna. Neid tasandi osi nimetame *tahkudeks*. Joonisel 10.1 on toodud graaf, mille joonis defineerib tasandil kolm tahku. Tahku f_3 sellel joonisel nimetatakse *lõpmatuks tahuks*. Tahu lõpmatuses ei ole midagi erilist, sest me võime graafi joonistada nii, et ükskõik milline tahk on lõpmatu. Kui me joonistaks graafi mitte tasandile, vaid sfäärile, siis ei eristuks ükski tahk teistest oma lõpmatuse poolest.



Joonis 10.1. Tahud tasandilise graafi joonisel.

Järgmine teoreem seob graafi (joonise) tippude, servade ja tahkude arvud. Muuhulgas ütleb ta seda, et sõltumata sellest, kuidas sidus tasandiline graaf tasandile on joonistatud, jääb joonise tahkude arv samaks.

Teoreem 10.1 (Euler, 1750). *Kui G on sidus tasandiline graaf ning n, m ja f vastavalt tippude, servade ja tahkude arvud tema joonisel, siis $n + f - m = 2$.*

Tõestus toimub induktsiooniga servade arvu m järgi.

Kui $m = 0$, siis $n = 1$ (meil on sidus graaf) ja $f = 1$ (lõpmatu tahk). Seega $n + f - m = 1 + 1 - 0 = 2$.

Oletame nüüd, et teoreem kehtib kõigi ülimalt $m - 1$ servaga graafide korral. Olgu G graaf, millel on m serva. Kui G on puu, siis $n = m + 1$ ja $f = 1$ ning $n + f - m = (m + 1) + 1 - m = 2$. Kui G ei ole puu, siis leidub graafis G selline serv e, et tema eemaldamine ei

muuda graafi G mittesidusaks. Graafis $G-e$ on n tippu, $m-1$ serva ja $f-1$ tahku (sest serva lisamisel sidusasse graafi jaotame me mingi tahu kaheks[1]). Induktsiooni oletuse järgi $n+(f-1)-(m-1)=2$. Siit järeldub kohe teoreemi väide. □

Teoreemist 10.1 järeldub päris mitu huvitavat tulemust.

Järeldus 10.2. *Kui G on tasandiline graaf ning n, m, f ja k vastavalt tippude, servade, tahkude ja sidusate komponentide arvud tema joonisel, siis $n+f-m=k+1$.*

Tõestus. Rakendame teoreemi 10.1 eraldi graafi G kõigile sidusatele komponentidele, pannes üksnes tähele, et me loeksime lõpmatut tahku ainult üks kord. □

Järeldus 10.3. *Kui G on sidus tasandiline lihtgraaf, millel on n tippu ja m serva, kusjuures $n \geqslant 3$, siis kehtivad järgmised väited:*

(i) $m \leqslant 3n-6$;

(ii) kui G ei sisalda tsükleid pikkusega 3, siis $m \leqslant 2n-4$.

Tõestus. Vaatame graafi G joonist tasandil. Et G on lihtgraaf, siis peab igal tema tahul olema vähemalt 3 serva (ühe servaga tahk tähendaks, et graafis on silmus, kahe servaga tahk aga tähendaks, et graafis on kordseid servi). Et iga serv kuulub täpselt kahele tahule (või ühele ja samale tahule kaks korda, näiteks loeme me, et tahul f_3 joonisel 10.1 on viis serva), siis $2m \geqslant 3f$. Euleri valemist saame nüüd

$$2 = n+f-m \leqslant n+\frac{2}{3}m-m = \frac{3n-m}{3},$$

millest järeldub $3n-m \geqslant 6$ ehk $3n-6 \geqslant m$.

Väites (ii) toodud täiendav tingimus tähendab, et G joonise igal tahul on vähemalt neli serva. Seega kehtib võrratus $2m \geqslant 4f$, mida sarnaselt eelmisele osale Euleri valemisse asendades saame tõestamist vajava võrratuse. □

[1] See väide on tegelikult mittetriviaalne. Ta järeldub sellest, et iga kinnine Jordani joon jagab tasandi kaheks osaks.

Järeldus 10.4. *Graafid K_5 ja $K_{3,3}$ pole tasandilised.*

Tõestus. Graafil K_5 on 5 tippu ja 10 serva. Kui K_5 oleks tasandiline, siis saaksime järelduse 10.3 väitest (i), et $10 \leqslant 9$.

Graafil $K_{3,3}$ on 6 tippu ja 9 serva, lisaks sellele pole tal paarituarvulise pikkusega tsükleid (teoreem 1.3). Kui $K_{3,3}$ oleks tasandiline, siis saaksime järelduse 10.3 väitest (ii), et $9 \leqslant 8$. □

Järeldus 10.5. *Igas tasandilises lihtgraafis leidub tipp astmega ülimalt viis.*

Tõestus. Olgu G vaadeldava tasandilise lihtgraafi mingi sidus komponent, n tippude ja m servade arv selles komponendis. Oletame, et G iga tipu aste on vähemalt 6. Et iga serv on intsidentne kahe tipuga, siis kehtib võrratus $6n \leqslant 2m$ ehk $m \geqslant 3n$. Võrreldes seda võrratust järelduse 10.3 väite (i) võrratusega $m \leqslant 3n - 6$ saame vastuolu. □

10.3. Tasandilisuse kriteerium

Graaf on tasandiline parajasti siis, kui temas ei „sisaldu“ graafe K_5 ja $K_{3,3}$. Allpool täpsustame, mida sisaldumine tähendab.

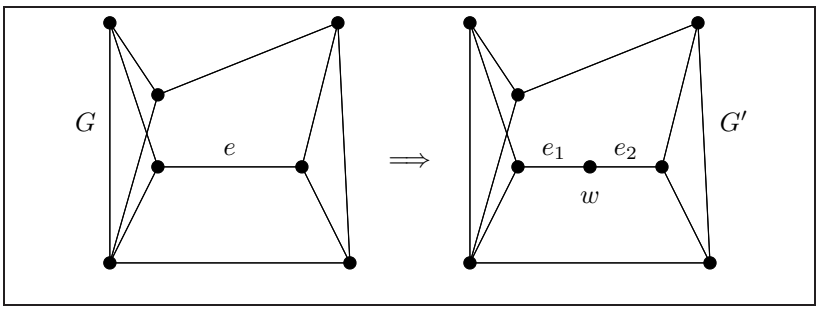
Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf ja $e \in E$ tema mingi serv, kusjuures $e = \{u, v\}$. Ütleme, et graaf $G' = (V', E')$ on saadud graafist G serva e *poolitades*, kui

- $V' = V \cup \{w\}$, kus w on mingi uus tipp;
- $E' = E \backslash \{e\} \cup \{e_1, e_2\}$, kus e_1 ja e_2 on mingid uued servad;
- $e_1 = \{u, w\}$ ja $e_2 = \{w, v\}$.

Serva poolitamist illustreerib joonis 10.2.

Graafe G_1 ja G_2 nimetame *homöomorfseteks*, kui leidub mingi selline graaf G, et nii G_1 kui ka G_2 on saadavad graafist G servade poolitamiste teel.

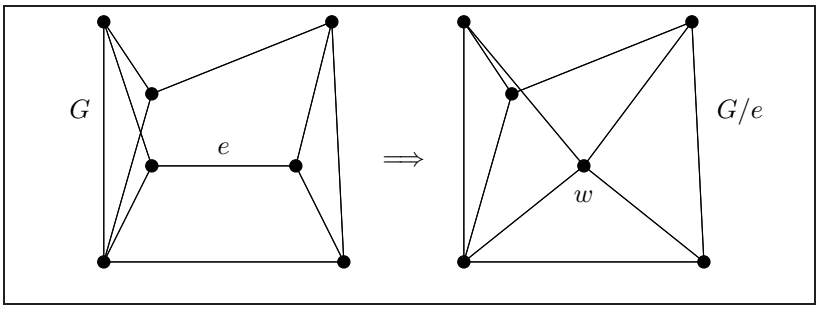
Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf ning $e \in E$. Loeme, et E on tipuhulga V kaheelemendiliste alamhulkade mingi hulk. Kui me graafis G serva e *kokku tõmbame* (ehk tema *otstipud samastame*), siis saame lihtgraafi, mida tähistame G/e, ning mille tipuhulk on $V \backslash \mathcal{E}(e) \cup \{w\}$, kus w on mingi uus tipp, ja servahulk on



Joonis 10.2. Näide serva e poolitamisest.

$$\big\{\{u,v\} \mid \{u,v\} \in E, u, v, \notin \mathcal{E}(e)\big\} \cup \\ \cup \big\{\{u,w\} \mid \{u,v\} \in E, u \notin \mathcal{E}(e), v \in \mathcal{E}(e)\big\} \ .$$

Joonisel 10.3 on toodud serva kokkutõmbamise näide. Paneme tähele, et kui me tasandilises graafis mingi serva kokku tõmbame või poolitame, siis ka saadav graaf on tasandiline.



Joonis 10.3. Näide serva e kokkutõmbamisest.

Ütleme, et graaf G on *kokkutõmmatav* graafiks G', kui G' on saadav graafist G servade kokkutõmbamiste teel.

Teoreem 10.6 (Kuratowski). *Graaf on tasandiline parajasti siis, kui ükski tema alamgraaf pole homöomorfne graafiga K_5 või $K_{3,3}$.*

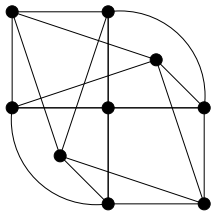
Teoreem 10.7 (Wagner). *Graaf on tasandiline parajasti siis, kui ükski tema alamgraaf pole kokkutõmmatav graafiks K_5 või $K_{3,3}$.*

Ülesanded

Ülesanne 80. Millised graafidest K_n ja $K_{m,n}$ on tasandilised?

Ülesanne 81. Milliste k väärtuste korral on graaf Q_k tasandiline?

Ülesanne 82. Milliste r, s, t väärtuste korral on graaf $K_{r,s,t}$ tasandiline?



Ülesanne 83. Milliste n väärtuste korral on graaf G_n (vt. ülesanne 16) tasandiline?

Ülesanne 84. Kas kõrval kujutatud graaf on tasandiline?

Ülesanne 85. Tõesta, et Peterseni graaf pole tasandiline.

Ülesanne 86. Leia Peterseni graafis alamgraaf, mis on homöomorfne graafiga $K_{3,3}$.

Ülesanne 87. Näita, et kui tasandilise lihtgraafi kõigi tippude aste on vähemalt 5, siis on sellel graafil vähemalt 12 tippu.

Ülesanne 88. Kas leidub tasandiline graaf, mille iga tipu aste on 5?

Ülesanne 89. Tõesta, et iga $n \geqslant 20$ korral leidub n-tipuline tasandiline graaf, mille iga tipu aste on vähemalt 5.

Ülesanne 90. Näita, et tasandilisel 3-regulaarsel graafil, mille igal tahul on vähemalt 5 serva, on vähemalt 20 tippu.

Ülesanne 91. Olgu G tasandiline graaf, mille joonisel on ülimalt 11 tahku. Näita, et kui G kõigi tippude aste on vähemalt 3, siis leidub joonisel tahk, millel on ülimalt 4 serva.

Ülesanne 92. Tõesta, et kui n tipu ja m servaga tasandilise lihtgraafi igal tahul on t serva, siis $m = t(n-2)/(t-2)$.

Ülesanne 93. Tõesta, et kui graafil G on vähemalt 11 tippu, siis on vähemalt üks graafidest G ja $\overline{G}$ mittetasandiline. On võimalik näidata, et sama väide kehtib ka 9-tipuliste graafide korral.

Ülesanne 94. Leia 8-tipulised graafid G, mille korral

1. nii G kui $\overline{G}$ on tasandilised,
2. nii G kui $\overline{G}$ on mittetasandilised
3. G on tasandiline, aga $\overline{G}$ mitte.

11. Graafi tippude värvimine

11.1. Üldiste graafide värvimine

Olgu $G = (V, E)$ silmusteta graaf. Graafi G *tippude värvimisviisiks k värviga* nimetatakse funktsiooni γ graafi tippude hulgast V hulka $K = \{1, \ldots, k\}$. Värvimisviisi γ nimetatakse *korrektseks*, kui ei leidu serva, mille mõlemad otstipud oleksid sama värvi. Graaf G on *värvitav k värviga* siis, kui leidub tippude korrektne värvimisviis k värviga. Värvide arvu k minimaalset väärtust tähistame sümboliga $\chi(G)$ ja nimetame graafi G *kromaatiliseks arvuks tippude järgi*.

On selge, et kui $\gamma : V \longrightarrow K$ on mingi korrektne värvimisviis ja $\sigma : K \longrightarrow K$ on mingi bijektsioon, siis ka $\sigma \circ \gamma : V \longrightarrow K$ on korrektne värvimisviis. See tähendab, et korrektse värvimisviisi värvide permuteerimine ei muuda värvimisviisi mittekorrektseks. Näiteks saab omavahel ära vahetada kaks värvi.

Teoreem 11.1. *Silmusteta graaf G on värvitav $\Delta(G)+1$ värviga.*

Tõestus toimub induktsiooniga tippude arvu järgi.

On ilmne, et teoreemi väide kehtib ühetipuliste graafide jaoks. Olgu G mingi graaf ja oletame, et teoreemi väide kehtib kõigi sellest graafist väiksema tippude arvuga graafide jaoks. Olgu $v \in V(G)$ ja γ graafi $G \backslash v$ mingi korrektne värvimisviis $\Delta(G) + 1$ värviga. Et $\deg(v) < \Delta(G) + 1$, siis leidub mingi värv $i \in \{1, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ nii, et tipu v ükski naabertipp graafis G pole värvitud värviga i. Kui me täiendame värvimisviisi γ, värvides täiendavalt tipu v värviga i, siis saame graafi G korrektse värvimisviisi $\Delta(G) + 1$ värviga. □

Enamasti õnnestub graafi tippe värvida ka ühe võrra väiksema värvide arvuga:

Teoreem 11.2 (Brooks,1941). *Kui graafis G on tippude maksimaalne aste ülimalt d (kus $d \geqslant 3$) ja G ei sisalda $(d + 1)$-tipulist klikki, siis $\chi(G) \leqslant d$.*

Tõestus. On selge, et teoreemi väide kehtib ühetipuliste graafide korral. Oletame väitevastaselt, et teoreemi väide üldiselt ei kehti ja $G = (V, E)$ on minimaalse tippude arvuga kontranäide. Olgu

$v \in V$ suvaline tipp graafis G ning $N(v) = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ tipu v naabrite hulk, kus muidugi $\ell \leqslant d$. Et G on minimaalne kontranäide, siis graaf $H \stackrel{\text{def}}{=} G \backslash v$ on värvitav d värviga. Olgu need värvid $\{1, \ldots, d\}$. Kui mõni neist värvidest i ei esine hulgas $\{\gamma(v_1), \ldots, \gamma(v_\ell)\}$, siis võiksime võtta $\gamma(v) = i$ ja kogu graaf oleks värvitav d värviga, mis aga on välistatud G valiku tõttu. Seega peavad kõik d värvi esinema hulgas $\{\gamma(v_1), \ldots, \gamma(v_\ell)\}$, millest järeldub $\ell = d$, s.t. minimaalne kontranäide G on d-regulaarne graaf. Samuti järeldub siit, et graafi H iga korrektne värvimisviis d värviga peab kasutama kõiki värve $\{1, \ldots, d\}$. Eeldame, et iga i korral $\gamma(v_i) = i$.

Olgu H_{ij} graafi H alamgraaf, mille indutseerivad värvid i ja j, s.t. $w \in V(H_{ij})$ parajasti siis, kui $\gamma(w) \in \{i, j\}$. Kui v_i ja v_j oleksid graafi H_{ij} erinevates sidusates komponentides, siis võiksime vahetada omavahel värvid i ja j ühe komponendi piires ilma, et värvimisviis muutuks ebakorrektseks. Pärast seda protseduuri oleksid aga tipud v_i ja v_j sama värvi, mis on võimatu tehtud eelduse tõttu. Olgu C_{ij} see sidus komponent, kuhu kuuluvad tipud v_i ja v_j.

Näitame, et sidus komponent C_{ij} on ahel tipust v_i tippu v_j. Kui tipul v_i oleks kaks sama värvi naabrit graafis H, siis oleks tipul v_i graafis H ülimalt $d-2$ eri värvi naabrit, seega me võiksime muuta tipu v_i värvi, mistõttu v_i saaks olema sama värvi mis üks naabritest $\{v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1} \ldots, v_d\}$, mis on aga võimatu. Järelikult on tipul v_i ainult üks naaber, mis on värvi j. Olgu

$$v_i = u_0 \text{ — } u_1 \text{ — } \ldots \text{ — } w \text{ — } \ldots \text{ — } u_{m-1} \text{ — } u_m = v_j$$

mingi ahel tipust v_i tippu v_j graafis H_{ij} ja w (v_i poolt vaadatuna) esimene tipp selles ahelas, mille aste graafis H_{ij} on suurem kui kaks. Tipul w on graafis H ülimalt $d-2$ eri värvi naabrit. Seega me saame tipu w värvida mingit värvi $c \notin \{i, j\}$, misjärel v_i ja v_j ei oleks enam ahelaga ühendatavad.[1] See on aga võimatu, nagu eelnevast arutelust selgus. Seega ei leidu graafi H_{ij} üheski ahelas $v_i \rightsquigarrow v_j$ kahest suurema astmega tippe, millest järeldubki, et C_{ij} on ahel.

Olgu $u \in C_{ij} \cap C_{ik}$, nii et $u \neq v_i$, siis ilmselt $\gamma(u) = i$. Mõlemad komponendid C_{ij} ja C_{ik} on ahelad, mis algavad tipust v_i ja lõpevad vastavalt tippudes v_j ja v_k (mis on erinevad!). Samuti võime täheldada, et $v_k \notin C_{ij}$ ja samuti $v_j \notin C_{ik}$. Seega on u mõlema ahela

[1] Sellepärast tuli alustada tipust v_i ja kõigepealt näidata, et tipul v_i ei ole graafis H_{ij} rohkem naabreid kui üks.

sisepunkt ja $\gamma(u) = i$ tõttu peab tipul u olema parajasti kaks j-värvi naabrit ja kaks k-värvi naabrit. Jällegi peaks siis tipul u olema graafis H ülimalt $d-2$ eri värvi naabrit ja seega me saaksime tipu u värvida mingi värviga väljastpoolt hulka $\{i, j, k\}$, mis annab vastuolu. Seega $C_{ij} \cap C_{ik} = \{v_i\}$.

Meie eeldusest $K_{d+1} \not\to G$ järeldub, et hulgas $N(v)$ leiduvad kaks tippu, mis pole servaga ühendatud. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et need tipud on v_1 ja v_2. Olgu x tipu v_1 naaber, mis on värvitud värviga 2, s.t. $(x, v_1) \in E$ ja $x \in C_{12}$. Nüüd vahetame alamgraafis C_{13} omavahel värvid 1 ja 3. Uues tekkinud värvimisviisis on meil uued ahelad C'_{ij}. Selge, et $x \in C'_{23}$, sest tipul v_1 on ju uues värvimisviisis värv 3. Ahelas C_{12} muutis ainult tipp v_1 värvi, sest $C_{12} \cap C_{13} = \{v_1\}$. Seega ka uues värvimisviisis $x \in C'_{12}$, sest ta on ühendatud ahela C_{12} abil tipuga v_2. Kuid siis $C'_{12} \cap C'_{23} \neq \{v_2\}$, mis annab vastuolu. □

11.2. Tasandiliste graafide värvimine

Teoreem 11.3. *Tasandiline lihtgraaf on värvitav kuue värviga.*

Tõestus. Selle teoreemi tõestus on sarnane teoreemi 11.1 tõestusega. Ühetipuliste graafide jaoks on teoreemi väide ilmselt kehtiv. Olgu G nüüd n-tipuline tasandiline lihtgraaf ja kehtigu teoreemi väide graafide jaoks, millel on ülimalt $n-1$ tippu. Olgu v graafi G mingi selline tipp, millel on ülimalt 5 naabertippu; selline tipp leidub vastavalt järeldusele 10.5. Graafis $G\backslash v$ on $n-1$ tippu ja vastavalt induktsiooni oletusele on ta värvitav kuue värviga. Graafi G korrektse värvimisviisi kuue värviga saame graafi $G\backslash v$ korrektsest värvimisviisist kuue värviga siis, kui me lisaks anname tipule v värvi, mis erineb kõigi tema naabertippude värvist. □

Teoreem 11.4. *Iga tasandiline lihtgraaf on värvitav viie värviga.*

Tõestus. Jällegi on ühetipuliste graafide jaoks teoreemi väite kehtivus ilmne. Olgu G tasandiline lihtgraaf, millel on n tippu, ja kehtigu teoreemi väide graafide jaoks, millel on ülimalt $n-1$ tippu. Olgu v graafi G selline tipp, millel on ülimalt 5 naabertippu (järeldus 10.5).

Kui tipul v on ülimalt 4 naabertippu, siis vaatame graafi $G\backslash v$. Vastavalt induktsiooni oletusele on ta viie värviga värvitav; graafi G korrektse värvimisviisi viie värviga saame, kui värvime lisaks tipu v värviga, mis erineb kõigi tema naabertippude värvidest.

Oletame nüüd, et tipul v on täpselt 5 naabertippu. Nende viie tipu seas peavad leiduma tipud v' ja v'', mis ei ole omavahel servaga ühendatud, vastasel juhul sisaldaks G alamgraafina graafi K_5, mis aga järelduse 10.4 kohaselt pole tasandiline. Olgu G' saadud graafist G servade $\{v, v'\}$ ja $\{v, v''\}$ kokkutõmbamisel; olgu $w \in V(G')$ tipp, mis asendab graafis G' tippe v, v' ja v''. Graaf G' on tasandiline graaf $n-2$ tipuga ning induktsiooni oletuse kohaselt värvitav viie värviga. Olgu γ selline korrektne värvimisviis. Graafi G korrektse värvimisviisi saame sel teel, et anname tippudele v' ja v'' värvi $\gamma(w)$ ning tipule v värvi, mis erineb kõigi tema naabertippude värvidest. Selline värv leidub, sest kaks naabertippu on värvitud sama värviga. □

11.3. Kromaatiline polünoom

Selle osa lõpetame uurimisega, kui mitmel viisil saab lihtgraafi G tippe korrektselt k värviga värvida. Tähistagu $\mathrm{P}_G(k)$ kõigi selliste korrektsete värvimisviiside $\gamma : V(G) \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ arvu. Funktsiooni P_G nimetatakse graafi G *kromaatiliseks funktsiooniks*.

Mõnede lihtsate graafide G puhul on P_G lihtsalt leitav. Näiteks $\mathrm{P}_{O_n}(k) = k^n$. Tõepoolest, tühjas graafis võib iga tipu värvida üksteisest sõltumatult k värviga. Samuti $\mathrm{P}_{K_n}(k) = \prod_{i=0}^{n-1}(k-i)$ — esimese tipu värvimiseks on k võimalust, teise värvimiseks $k-1$ võimalust, kolmanda värvimiseks $k-2$ võimalust jne. Kui G on n-tipuline puu, siis $\mathrm{P}_G(k) = k \cdot (k-1)^{n-1}$. Tõepoolest, esimese tipu värvimiseks on k erinevat võimalust ja iga järgmise (me eeldame, et järgmisena värvitav tipp on mõne (ja täpselt ühe) juba värvitud tipu naabertipp) tipu värvimiseks $k-1$ võimalust.

Teoreem 11.5. *Kui G on lihtgraaf ja e mingi tema serv, siis* $\mathrm{P}_G(k) = \mathrm{P}_{G-e}(k) - \mathrm{P}_{G/e}(k)$.

Tõestus. Olgu v ja w serva e otstipud graafis G. Vaatleme graafi $G-e$ võimalikke värvimisviise. Kui γ on graafi $G-e$ mingi korrektne värvimisviis k värviga, siis osutuvad võimalikuks kaks varianti.

Variant 1. Juhul $\gamma(v) \neq \gamma(w)$ on γ ka graafi G mingi korrektne värvimisviis. Seejuures saame me graafi G kõik värvimisviisid kätte. Seega on graafi $G - e$ korrektsete k värviga värvimisviiside arv, kus tippudel v ja w on erinev värv, võrdne suurusega $\mathrm{P}_G(k)$.

Variant 2. Juhul $\gamma(v) = \gamma(w)$ on γ ka korrektne värvimisviis graafis, kus tipud v ja w on samastatud, s.t. graafis G/e. Jällegi, me saame kõik värvimisviisid kätte ja nende arv on $\mathrm{P}_{G/e}(k)$.

Kokkuvõtteks oleme näidanud, et $\mathrm{P}_{G-e}(k) = \mathrm{P}_G(k) + \mathrm{P}_{G/e}(k)$. □

Järeldus 11.6. *Lihtgraafi kromaatiline funktsioon on polünoom.*

Tõestus toimub induktsiooniga graafi servade arvu järgi.

Kui lihtgraafis G pole ühtegi serva, siis on ta mingi graafidest O_n ja tema kromaatiliseks funktsiooniks on k^n. Kui graafis G on servi, siis me eeldame, et kõigi väiksema servade arvuga graafide kromaatilised funktsioonid on polünoomid, muuhulgas on polünoomid ka P_{G-e} ja $\mathrm{P}_{G/e}$. Teoreemi 11.5 järgi on siis P_G võrdne kahe polünoomi vahega, järelikult on ta ka ise polünoom. □

Järelduse 11.6 tõttu nimetataksegi graafi kromaatilist funktsiooni enamasti tema *kromaatiliseks polünoomiks.*

Ülesanded

Ülesanne 95. Leia ülesandes 18 toodud graafide kromaatilised arvud tippude järgi.

Ülesanne 96. Leia malendigraafide $G_X^{n\times n}$ kromaatilised arvud tippude järgi, kui $X \in \{Kuningas, Vanker, Oda, Ratsu\}$.
Näita, et $\chi(G_{Lipp}^{n\times n}) \geqslant n$.

Ülesanne 97. Näita, et vahe $\Delta(G) - \chi(G)$ võib olla kuitahes suur.

Ülesanne 98. Tõesta, et kui graafi G tipud on (korrektselt) värvitud vähima võimaliku arvu värvidega, siis leidub iga kahe erineva värvi i ja j korral selline graafi G serv, mille üks otstipp on värvitud värviga i ja teine otstipp värviga j.

Ülesanne 99. Kas võib väita, et iga graafi G korral
1. $\chi(G) = \chi'(L(G))$? 2. $\chi'(G) = \chi(L(G))$?

Ülesanne 100. Tõesta, et kui mingi graafi servgraafi tipud on korrektselt värvitud, siis pole ükski tipp seotud rohkem kui kahe sama värvi tipuga.

Ülesanne 101. Tõesta, et kui graafis G on n tippu ja m serva, siis

$$\chi(G) \geqslant \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

Milliste graafide korral kehtib võrdus?

Ülesanne 102. Leia graafi $K_5 - e$ (täisgraaf K_5, millest on eemaldatud üks serv) kromaatiline polünoom.

Ülesanne 103. Leia graafide $K_{1,n}$ kromaatilised polünoomid.

Ülesanne 104.

1. Tõesta, et graafi $K_{2,n}$ kromaatiline polünoom on

$$k(k-1)^n + k(k-1)(k-2)^n.$$

2. Tõesta, et n-tipulise tsükli C_n kromaatiline polünoom on

$$(k-1)^n - (-1)^n(k-1).$$

Ülesanne 105. Leia graafide W_n (n-tipuline „ratas“ — C_{n-1} koos ühe täiendava tipuga, mis on ühendatud kõigi ülejäänud tippudega) ja $K_{m,n}$ kromaatilised polünoomid.

Ülesanne 106. Tõesta, et kui G on mittesidus lihtgraaf, siis on tema kromaatiline polünoom võrdne tema sidusate komponentide kromaatiliste polünoomide korrutisega.

Ülesanne 107. Tõesta, et n-tipulise graafi kromaatilise polünoomi aste on n.

Ülesanne 108. Tõesta, et kui G on n tipu, m serva ja t sidususa komponendiga lihtgraaf siis G kromaatilises polünoomis

$$a_n k^n + a_{n-1}k^{k-1} + \ldots + a_1 k + a_0$$

1. $a_n = 1$.
2. $a_{n-1} = -m$.
3. $a_{t-1} = a_{t-2} = \cdots = a_0 = 0$.
4. $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_t \neq 0$.
5. $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_t$ on vahelduvate märkidega.

Ülesanne 109. Tõesta, et kui G on sidus graaf, milles on n tippu, siis iga k korral $P_G(k) \leqslant k(k-1)^n$.

Ülesanne 110. Tõesta, et lihtgraaf G on puu parajasti siis, kui tema kromaatiline polünoom on $k(k-1)^n$.

Ülesanne 111. Kas leidub graafe G, kus

1. $P_G(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2$?
2. $P_G(k) = k^4 - 3k^3 + 2k^2$?
3. $P_G(k) = k^5 - 4k^4 + 5k^3 - 2k^2$?

Kui vastus on jaatav, siis leia kõik sellised graafid.

Indeks

abieluprobleem, 53
ahel, 8
    Euleri, 17
    Hamiltoni, 23
    kinnine, 8
    M-laienev, 52
    M-vahelduv, 52
    suurendav, 45
alamgraaf, 8
algoritm
    Fleury, 19
    Ford-Fulkerson, 47
    Kruskal, 33
algtipp, 6
alus, 10
aluspuu, 32
aste, 7
    lokaalne, 7
Aut, 14
automorfism, 8
automorfismirühm, 14

d, 15
d, 9
deg, 7
$\overrightarrow{\deg}_\omega$, 42
$\overleftarrow{\deg}_\omega$, 42
Δ, 65
diameeter, 15

$\mathcal{E}$, 5
e, 15
Edmonds-Karpi täiendus, 47
ekstsentrilisus, 15

graaf, 5
    bikromaatiline, 10
    Euleri, 17
    Grötzschi, 21
    Hamiltoni, 23
    Hamiltoni-sidus, 30
    χ'-kriitiline, 70
    k-aluseline, 10
    kahealuseline, 10
    märgendatud, 36
    Ore-kinnine, 25
    paaritu, 15
    Peterseni, 14
    planaarne, 77
    pool-Euleri, 17
    pool-Hamiltoni, 23
    regulaarne, 7
    sidus, 9
    suunamata, 5
    suunatud, 5
    tasandiline, 77
    täielik k-aluseline, 10
    täielik kahealuseline, 10

haaremiprobleem, 64
χ, 83
χ', 65
homöomorfne, 80

intsidentne, 5
intsidentsusfunktsioon, 5
isomorfism
    graafide, 8
    märgendatud graafide, 36

joon, 77
    Jordani, 77
    pidev, 77
    sirgestuv, 77

kaal, 32
kaar, 6
kaaslusmaatriks, 7
kate, 55
kaugus, 9
klikk, 71
kokku tõmbamine, 80
kolmnurk, 16
kood
    Prüferi, 36
kooskõla, 52
    maksimaalne, 52
    täielik, 52
kriitiline tipupaar, 49
kromaatiline arv
    servade järgi, 65
    tippude järgi, 83
kromaatiline funktsioon, 86
kromaatiline polünoom, 87

ladina ristkülik, 63
ladina ruut, 63
leht, 34
lihtahel, 8, 14
lihtgraaf, 6
lihttee, 8
läbilaskevõime, 42
lähe, 42
lõige, 44
    minimaalne, 44
lõpptipp, 6

maatriks
    bistohhastiline, 63
    permutatsiooni-, 63
malendigraaf, 21
mets, 31
monomorfism, 7

naabertipp, 7
naabrusmaatriks, 7
nullgraaf, 9
nullvoog, 46

odd, 57
Ore sulund, 26
otspunkt, 77
otstipp, 5

permanent, 62
P_G, 86
pikkus
    ahela, 8
    joone, 77
poolitamine, 80
puu, 31

r, 15
raadius, 15
Ramsey arvud, 72
ratas, 88

serv, 5
    suunatud, 6
servgraaf, 15
sidus komponent, 9
sild, 19
silmus, 5
sisend, 42
sisendaste, 42
skelett, 32
suue, 42

sõltumatu hulk, 71

tahk, 78
tee, 8
teoreem
    Berge, 52
    Brooks, 83
    Cayley, 40
    Erdős, 75
    Euler, 17
    Ford-Fulkerson, 44
    Hall, 54
    Kuratowski, 81
    König, 56
    Ore, 23
    Tutte, 57
    Vizing, 66
    Wagner, 81
tipp, 5
    rippuv, 34
toes, 32
transversaal, 63
tsenter, 15
tsükkel, 8, 14
    Hamiltoni, 23
turniir, 30
täiendgraaf, 6
täisgraaf, 10
tõuk, 35

valem
    Euler, 78
valents, 7
voog, 42
    küllastamata, 45
väljund, 42
väljundaste, 42
värvimisviis
    servade, 65
    tippude, 83
väärtus
    voo, 43
võrk, 42

ülemgraaf, 25