Graafid — 4. kodused ülesanded
tähtaeg 27./28.09.2004

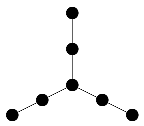
Ülesanne 1. Nimetame sidusat graafi G *k-serviti sidusaks*, kui sealt suvalise $(k-1)$ serva kustutamisel graaf jääb sidusaks. Olgu G k-serviti sidus Euleri graaf ja olgu P mingi lihtahel selles graafis pikkusega ülimalt $(k-1)$. Näita, et G-s leidub Euleri ahel, mis alamahelana sisaldab ahelat P.

Ülesanne 2. Olgu G selline graaf, mille kõik tsüklid on paarituarvulise pikkusega. Näita, et selles graafis ei leidu kahte tsüklit, millel oleks vähemalt üks ühine serv.

Ülesanne 3. Graaf $G = (V, E)$ on *k-aluseline*, kui tema tipuhulk on võimalik tükeldada k-ks mittetühjaks tükiks (aluseks) $V_1, \ldots, V_k$ nii, et mitte ühegi $e \in E$ jaoks ei kuulu tema mõlemad otstipud samasse tükki. G on *täielik k-aluseline*, kui ta on k-aluseline ja tema iga kahe erinevasse alusesse kuuluva tipu vahel on serv.

Näita, et täielik k-aluseline ($k \geq 2$) vähemalt kolme tipuga graaf G on Hamiltoni parajasti siis, kui $|V(G)| \geq 2\alpha(G)$, kus $\alpha(G)$ on G suurima aluse tippude arv.

Ülesanne 4. Olgu T puu. Näita, et T on tõuk parajasti siis, kui kõrvalolev graaf ei ole tema alamgraaf.



Ülesanne 5. Tõesta, et puul T on kas üks tsenter või kaks omavahel servaga ühendatud tsentrit ning et esimene juht esineb parajasti siis, kui $\mathsf{d}(T)$ on paaris.

Ülesanne 6. Tõesta, et kui T on puu, siis

$$\mathsf{r}(T) = \left\lceil \frac{\mathsf{d}(T)}{2} \right\rceil,$$

siin $\lceil x \rceil$ tähistab reaalarvu x ülemist täisosa ning $\mathsf{r}(T)$ ja $\mathsf{d}(T)$ on vastavalt T raadius ja diameeter.