Graafid — 5. kodused ülesanded
tähtaeg 04./05.10.2004

Ülesanne 1. Olgu T puu ja $T_1, \dots, T_k \leq T$ tema indutseeritud alamgraafid (alampuud), nii et iga $1 \leq i < j \leq k$ jaoks on puudel T_i ja T_j ühine tipp. Näita, et siis leidub tipp, mis kuulub kõigisse puudesse $T_1, \dots, T_k$.

Ülesanne 2. Näita, et kui graafis leidub kaks tsüklit, millel on ühine serv e, siis leidub seal ka tsükkel, mis serva e ei sisalda.

Ülesanne 3. Näita, et kui graafis leidub kaks servade lõikavat hulka, millel on ühine serv e, siis leidub seal ka servade lõikav hulk, mis serva e ei sisalda.

Ülesanne 4. Graafi $G = (V, E)$ servade alamhulka $E' \subseteq E$ nimetame *tsüklivabaks* kui temasse kuuluvad servad ei moodusta ühtegi tsüklit. Näita, et kui $E_1, E_2 \subseteq E$ on tsüklivabad ja $|E_1| < |E_2|$, siis leidub $e \in E_2 \backslash E_1$ nii, et ka $E_1 \cup \{e\}$ on tsüklivaba.

Ülesanne 5. Mitu erinevat aluspuud on *märgendatud* graafil $K_{2,n}$? (s.t. aluspuudeks on märgendatud puud)

Ülesanne 6. Valime juhuslikult ühe n-tipulise märgendatud puu (s.t. kõigi puude jaoks on just selle puu valimise tõenäosus sama) ja selles puus juhuslikult ühe lehe. Kui suur on tõenäosus, et valitud tipp on leht?

Vihje: tõenäosus $= \frac{\text{soodsate võimaluste arv}}{\text{kõigi võimaluste arv}}$.

Mittehinnatav osa: Näita, et kui otsitavaks tõenäosuseks on P_n, siis $\lim_{n \to \infty} P_n = 1/e$.