Graafid, 1. kontrolltöö
20. oktoober 2004

1. **(10 punkti)** Leia $|E(L(K_{m,n}))|$. Siin $L(G)$ on graafi G servgraaf.

2. **(10 punkti)** Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf, olgu $e \in E$. *Serva* $e = (u, v)$ *kokkutõmbamine* graafis G annab meile *liht*graafi G/e, kus tipud u ja v on asendatud üheainsa tipuga w, mis on servaga ühendatud kõigi nende tippudega, millega oli ühendatud u või v.

   Näita, et kui G on vähemalt nelja tipuga blokk ja $e \in E(G)$, siis kas $G - e$ või G/e on blokk.

3. **(10 punkti)** Kui graafis G on tsükleid, siis minimaalse pikkusega tsükli pikkust nimetame graafi *vööümbermõõduks* ja tähistame $g(G)$. Näita, et kui graafis leidub tsükleid, siis $g(G) \leq 2\mathsf{d}(G) + 1$. Siin $\mathsf{d}(G)$ on graafi G diameeter.

4. **(5 punkti)** Olgu antud graaf $G = (V, E)$, mille servadel on defineeritud pikkused, vaatame Hiina postiljoniprobleemi selles graafis. Loengust on teada, et probleemi lahendus koosneb Euleri tsüklist selles graafis ning mingitest täiendavatest ahelatest P_i paarituarvuliste astmetega tippude vahel.

   Näita, et ükski graafi serv ei kuulu rohkem kui ühele neist ahelatest P_i.

5. **(10 punkti)** Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf ning tähistagu $t(U)$ iga $U \subseteq V$ jaoks minimaalset sellist arvu k, mille korral leiduvad graafis $G[U]$ lihtahelad $P_1, \ldots, P_k$ nii, et iga tipp U-st kuulub täpselt ühele neist ahelatest. Näita, et kui graafis G mingi $U \subseteq V$ jaoks $t(U) > |V| - |U|$, siis pole G Hamiltoni graaf.

6. **(10 punkti)** Näita, et vähemalt kolme tipuga puus T on ülimalt

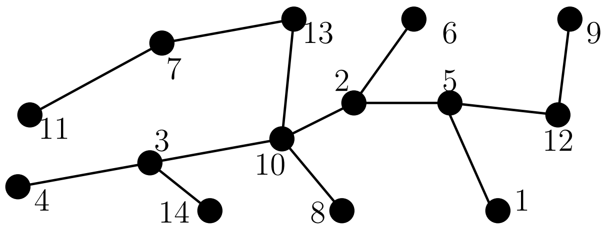
$$\frac{|V(T)|(\Delta(T) - 2) + 2}{\Delta(T) - 1}$$

   lehte, kus $\Delta(T)$ on T tippude maksimaalne aste.

7. **(5 punkti)** Näita, et kui graafis G on kõigile servadele omistatud erinevad kaalud, siis on G-l üksainus minimaalse kaaluga aluspuu.

8. **(5 punkti)** Leia märgendatud puu märgendite hulgaga $\{1, \ldots, 14\}$ ja Prüferi koodiga $(4, 3, 5, 4, 1, 5, 3, 5, 3, 5, 2, 8)$.

9. **(5 punkti)** Leia järgmise märgendatud puu Prüferi kood.



Töö eest saab ülimalt 45 punkti. Materjalide kasutamine on lubatud.