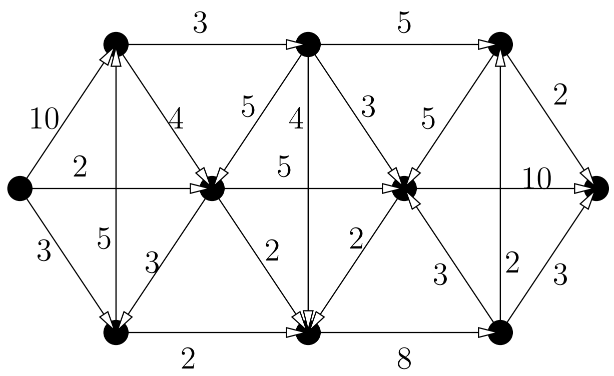
Graafid, 2. kontrolltöö

15. detsember 2004

1. **(10 punkti)** Leia mingi maksimaalne voog ja minimaalne lõige järgmises võrgus.



2. **(10 punkti)** Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuseline graaf alustega X ja Y. Iga $S \subseteq X$ jaoks kehtigu $|N(S)| > |S|$. Näita, et siis iga $e \in E$ jaoks leidub graafis G mingi maksimaalne kooskõla M, kus $e \in M$.

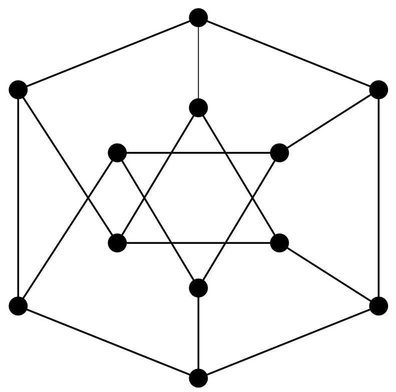
3. **(10 punkti)** 15-mäng koosneb 15-st ruudukujulisest klotsist küljepikkusega 1, mis on nummerdatud arvudega 1-st 15-ni, ning ruudukujulisest karbist küljepikkusega 4, mille sees need klotsid on. Karbis on ruumi 16-le klotsile, üks koht jääb seega vabaks. Võimalikuks käiguks mängus on vaba koha kõrval (horisontaalis või vertikaalis) asuva klotsi nihutamine vabale kohale, seejuures vabaneb koht, kus see klots ennem oli.

12	9	3	5
7	1		8
4	13	11	2
15	10	6	14

Kõrval on kujutatud ühte võimalikku 15-mängu seisu. Selles seisus on neli võimalikku käiku: lubatud on nihutada ruutu 1 paremale või ruutu 8 vasakule või ruutu 3 alla või ruutu 11 üles.

Kaks mängijat mängivad järgmist mängu. Algseisuks on 15-mängu mingi seis (s.t. klotsid kuidagi paigutatud ja vaba koht mingis kohas). Mängijad teevad vaheldumisi 15-mängu käike. Seejuures ei tohi korrata juba esinenud seisu (kaasa arvatud algseis). Mängija, kellel ei ole ühtegi lubatud käiku, kaotab. Näita, et esimesena käival mängijal leidub võitev strateegia.

4. **(10 punkti)** Mitme värviga on värvitavad järgmise graafi servad?



5. **(10 punkti)** Graafi nimetame *välistasandiliseks*, kui teda saab tasandile joonistada nii, et kõik tema tipud asuvad lõpmatu tahu ääres. Näita, et välistasandilise graafi tipud on värvitavad kolme värviga.

6. **(10 punkti)** Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf, kus $|V| = n$ ja $|E| = m$, olgu $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0$ tema kromaatiline polünoom. Olgu $\mathrm{cl}_3(G)$ kolmeelemendiliste klikkide arv G-s, s.t.
$\mathrm{cl}_3(G) = |\{U \subseteq V \,:\, G[U] \cong K_3\}|$.
Näita, et $a_{n-2} = m(m-1)/2 - \mathrm{cl}_3(G)$.

7. **(10 punkti)** Kas leidub graafe, mille kromaatiline polünoom on $k^6 - 6k^5 + 14k^4 - 15k^3 + 6k^2$? Kui jah, siis leia kõik sellised graafid.

8. **(10 punkti)** Malendi X graafiks $n \times n$ malelaual nimetame graafi $G_X^{n \times n}$, mille tippude hulgaks on $n \times n$ ruudustiku ruutude hulk ja serv kahe tipu vahele on tõmmatud parajasti siis, kui malendi X ühe käiguga saab ühele tipule vastavalt ruudult liikuda teisele tipule vastavale ruudule.

   Leia $\chi(G_{\mathrm{Lipp}}^{3 \times 4})$. Põhjenda vastust (s.t. põhjenda, miks väiksemast arvust värvidest ei piisa).

   Märkus. Lipp võib käia kuitahes mitu ruutu horisontaal-, vertikaal- või diagonaalsihis.

Töö eest saab ülimalt 45 punkti. Materjalide kasutamine on lubatud.