20. oktoobril 2004 toimunud Graafide kontrolltöö ülesanded ja lahendused

1. ülesanne. Leia $|E(L(K_{m,n}))|$.
Lahendus. Graafis $K_{m,n}$ on mn serva, graafis $L(K_{m,n})$ on seega mn tippu. Graafis $K_{m,n}$ on iga serva ühe otstipu aste m ja teise aste n, seega on graafis $L(K_{m,n})$ iga tipu aste $m+n-2$. Suvalises graafis on tippude astmete summa võrdne kahekordse servade arvuga, järelikult on graafis $L(K_{m,n})$ $\frac{mn(m+n-2)}{2}$ serva.
2. ülesanne. Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf, olgu $e \in E$. *Serva* $e = (u, v)$ *kokkutõmbamine* graafis G annab meile *liht*graafi G/e, kus tipud u ja v on asendatud üheainsa tipuga w, mis on servaga ühendatud kõigi nende tippudega, millega oli ühendatud u või v.

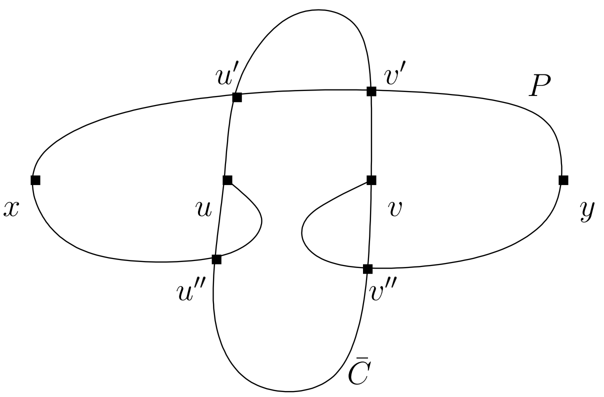
Näita, et kui G on vähemalt nelja tipuga blokk ja $e \in E(G)$, siis kas $G-e$ või G/e on blokk.
Lahendus 1. Oletame, et $G-e$ ei ole blokk. Näitame, et siis G/e on blokk.

Olgu x ja y mingid tipud graafis G/e, näitame, et G/e-s leidub tsükkel, millel nad mõlemad on. Kuna G on blokk, siis leidub graafis G mingi tsükkel C, millel on nii x kui ka y (kui kas x või y on võrdne w-ga, siis vaatame tema asemel graafis G tippu u).

- Kui ei u ega ka v ei kuulu tsüklile C, siis on C ka tsükkel graafis G/e.
- Kui u või v, aga mitte mõlemad kuuluvad tsüklile C, siis asendades selle tipu tipuga w saame tsükli G/e-s, millele kuuluvad nii x kui ka y.
- Kui tsüklisse C kuuluvad nii u kui ka v ja peale selle ka serv e (s.t. tipud u ja v on C-l järjest, nende vahel on serv e), siis C/e on tsükkel graafis G/e, millele kuuluvad nii x kui ka y.

Vaatamata on veel võimalus, kus nii u kui ka v on tsüklil C, aga $e \notin C$. Näitame, et see võimalus ei saa esineda. Konkreetsemalt näitame, et kui G-s leidub tsükkel $\bar{C}$, millel on u ja v, aga ei ole e, siis ka $G-e$ on blokk.

Olgu x ja y mingid tipud graafis G, näitame, et nende vahel leidub tsükkel, mis ei sisalda serva e. Olgu C mingi tsükkel graafis G, millel on nii x kui ka y. Kui $e \notin C$, siis oleme soovitud omadusega tsükli leidnud. Vastasel juhul leidub meil graafis $G-e$ lihtahel $P : u \rightsquigarrow x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow v$ (tipud x ja y võivad ka vahetatud olla), selle ahela saame C-st, kustutades seal serva e.

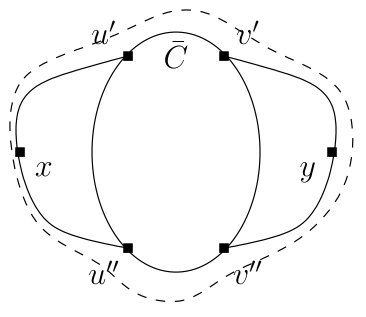


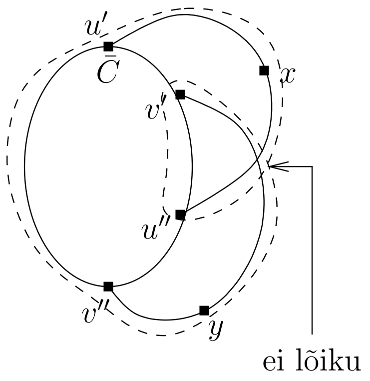
Olgu u' ja u'' tipud, mida läbivad nii $\bar{C}$ kui ka P, seejuures olgu

- tipp x ahelal P tippude u' ja u'' vahel;
- ahel P ei lõiku u' ja u'' vahel tsükliga $\bar{C}$.

Tipp x võib ka $\bar{C}$-l asuda, sel juhul $x = u' = u''$. Olgu v' ja v'' analoogilisi tingimusi rahuldavad tipud tipu y jaoks.

Tipud u', u'', v', v'' võivad $\bar{C}$-l asuda kahes põhimõtteliselt erinevas järjekorras. Mõlemal juhul on P ja $\bar{C}$ servadest kokku pandav tsükkel, millel on x ja y (näidatud katkendjoonega); see tsükkel ei sisalda serva e.





Lahendus 2. Oletame, et G/e ei ole blokk. Näitame, et siis $G - e$ on blokk.

Paneb kirja kunagi edaspidi...

3. ülesanne. Kui graafis G on tsükleid, siis minimaalse pikkusega tsükli pikkust nimetame graafi *vööümbermõõduks* ja tähistame $g(G)$. Näita, et kui graafis leidub tsükleid, siis $g(G) \leqslant 2\mathsf{d}(G) + 1$.

Lahendus. Võrratus, mis meil tuleb tõestada, on samaväärne võrratusega $\mathsf{d}(G) \geqslant (g(G) - 1)/2$. Näitame, et kehtib pisut tugevam võrratus, nimelt $\mathsf{d}(G) \geqslant \lfloor g(G)/2 \rfloor$.

Näitamaks, et graafi diameeter on mingist väärtusest suurem, tuleb meil leida kaks tippu, mille vaheline kaugus on vähemalt võrdne selle väärtusega (või sellest suurem). Olgu C tsükkel graafis G, mille pikkus on $g(G)$. Olgu u ja v teineteise vastas olevad tipud sellel tsüklil, nende tippude kaugus *mööda tsüklit* C on $\lfloor g(G)/2 \rfloor$. Olgu P_C ahel mööda tsüklit C otstippudega u ja v ning pikkusega $\lfloor g(G)/2 \rfloor$.

Me väidame, et $d(u,v) = \lfloor g(G)/2 \rfloor$. Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et $d(u,v)$ on väiksem, siis leidub G-s mingi ahel P u-st v-sse, mille pikkus on väiksem kui $\lfloor g(G)/2 \rfloor$. Ahelad P ja P_C koos moodustavad mingi kinnise ahela, mille pikkus on väiksem kui $g(G)$. Selle ahela servadest saab kokku panna mingi tsükli, mille pikkus on samuti väiksem kui $g(G)$. Vastuolu $g(G)$ definitsiooniga.

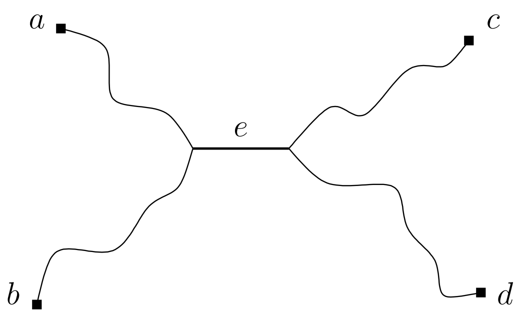
Oleme leidnud tipud u ja v, mille vaheline kaugus on $\lfloor g(G)/2 \rfloor$.

4. ülesanne. Olgu antud graaf $G = (V, E)$, mille servadel on defineeritud pikkused, vaatame Hiina postiljoniprobleemi selles graafis. Loengust on teada, et probleemi lahendus koosneb Euleri ahelast selles graafis ning mingitest täiendavatest ahelatest P_i paarituarvuliste astmetega tippude vahel.

Näita, et ükski graafi serv ei kuulu rohkem kui ühele neist ahelatest P_i.

Lahendus 1. Loengus tõestasime, et Hiina postiljoniprobleemi lahenduseks olev kinnine ahel ei sisalda ühtegi serva rohkem kui kaks korda. Iga serv esineb üks kord Euleri ahelas. Seega võib ta ülimalt ühel korral esineda ahelates P_i, s.t. ta saab esineda mitte rohkem kui ühel neist ahelatest P_i.

Lahendus 2. Oletame vastuväiteliselt, et mingi serv e on nii ahelal tipust a tippu c kui ka ahelal tipust b tippu d. Üldsust kitsendamata loeme, et a ja b on „samal pool“ serva e (vastasel juhul vahetame b ja d ära).



Kui me asendaksime ahelad $a \rightsquigarrow c$ ja $b \rightsquigarrow d$ ahelatega $a \rightsquigarrow b$ ja $c \rightsquigarrow d$, siis ahelate P_i summaarne pikkus väheneks. Vastuolu sellega, et ahelad P_i annavad meile Hiina postiljoniprobleemi lahenduse.

5. ülesanne. Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf ning tähistagu $t(U)$ iga $U \subseteq V$ jaoks minimaalset sellist arvu k, mille korral leiduvad graafis $G[U]$ lihtahelad $P_1, \ldots, P_k$ nii, et iga tipp U-st kuulub täpselt ühele neist ahelatest. Näita,

et kui graafis G mingi $U \subseteq V$ jaoks $t(U) > |V| - |U|$, siis pole G Hamiltoni graaf.
Lahendus. Olgu $G = (V, E)$ Hamiltoni graaf, olgu $U \subseteq V$ ja olgu C mingi Hamiltoni tsükkel graafis G. See tsükkel siseneb mingi arv kordi alamgraafi $G[U]$ ja sama palju kordi ka väljub sealt. Iga sisenemise ja väljumise korra vahel on mingi lihtahel U tippudest. Need lihtahelad on omavahel ühendatud väljaspool graafi $G[U]$, ühendusi on sama palju kui neid ahelaid, igaks ühendamiseks on tarvis vähemalt ühte tippu $V \backslash U$-st. Neid lihtahelaid on vähemalt $t(U)$ tükki, seega peab olema $t(U) \leqslant |V \backslash U| = |V| - |U|$.

Oleme näidanud, et Hamiltoni graafis $G = (V, E)$ on iga $U \subseteq V$ jaoks $t(U) \leqslant |V| - |U|$. Seega kui mingi $U \subseteq V$ jaoks on $t(U) > |V| - |U|$, siis pole G Hamiltoni.
6. ülesanne. Näita, et vähemalt kolme tipuga puus T on ülimalt

$$\frac{|V(T)|(\Delta(T) - 2) + 2}{\Delta(T) - 1}$$

lehte, kus $\Delta(T)$ on T tippude maksimaalne aste.
Lahendus 1. Olgu $n = |V(T)|$ ja $d = \Delta(T)$. Olgu n_i, kus $1 \leqslant i \leqslant d$, puu selliste tippude arv, mille aste on i. Siis $n_1 + n_2 + \cdots + n_d = n$. Me soovime näidata, et

$$n_1 \leqslant \frac{n(d-2) + 2}{d - 1} \quad .$$

Puus, kus on n tippu, on $n - 1$ serva. Kõigi tippude astmete summa on servade arvu kahekordne, seega siis $2(n - 1)$.

Puu tippude astmete summa võib ka leida, summeerides tipu astme üle kõikvõimalike väärtuste. Tipud, mille aste on i, lisavad sellesse summasse i; selliseid tippe on n_i tükki. Kõigi tippude astmete summa on seega $\sum_{i=1}^{d} in_i$.

Oleme saanud

$$2(n-1) = \sum_{i=1}^{d} in_i = n_1 + \sum_{i=2}^{d} in_i,$$

ja seega

$$n_1 = 2(n-1) - \sum_{i=2}^{d} in_i \quad .$$

Suurendame seda summat, võttes teguri i asemel d. Kui me summat suurendame, siis võrdusmärgist paremal pool olev avaldis väheneb, sest summa on võetud miinusmärgiga.

$$n_1 \geqslant 2(n-1) - \sum_{i=2}^{d} dn_i = 2(n-1) - d \sum_{i=2}^{d} n_i = 2(n-1) - d(n - n_1)$$

Lahendades selle võrratuse n_1 suhtes, saame

$$\begin{aligned}
2n - 2 - dn + dn_1 &\leqslant n_1 \\
(d-1)n_1 &\leqslant dn - 2n + 2 \\
n_1 &\leqslant \frac{n(d-2)+2}{d-1},
\end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

Lahendus 2. Olgu T' saadud T-st sellisel viisil, et kõigile T tippudele v, mis ei ole lehed, on naabriteks juurde lisatud nii palju lehti, et v aste T'-s oleks võrdne $\Delta(T)$-ga. Puus T' on siis tippude astmetel ainult kaks võimalikku väärtust: 1 ja $\Delta(T) = \Delta(T')$.

Tähistagu $n(T)$ tippude arvu ja $n_1(T)$ lehtede arvu puus T. Puus T' on siis $(n(T) - n_1(T))$ sisemist tippu. Loeme, mitu lehte on puus T'. Selleks leiame puu T' kõigi tippude astmete summa kahel erineval moel; sealt saame võrrandi $n_1(T')$ jaoks.

- T' kõigi tippude astmete summa on $(n(T) - n_1(T))\Delta(T) + n_1(T')$.
- T' kõigi tippude astmete summa on T'-i kahekordne servade arv. Servade arv omakorda on ühe võrra väiksem kui tippude arv. Otsitav summa on seega $2(n(T) - n_1(T) + n_1(T') - 1)$.

Saame

$$\begin{aligned}
(n(T) - n_1(T))\Delta(T) + n_1(T') &= 2(n(T) - n_1(T) + n_1(T') - 1) \\
\Delta(T)n(T) - \Delta(T)n_1(T) + n_1(T') &= 2n(T) - 2n_1(T) + 2n_1(T') - 2 \\
(\Delta(T) - 2)(n(T) - n_1(T)) + 2 &= n_1(T')
\end{aligned}$$

Liites selle võrduse mõlemale poolele juurde $(\Delta(T) - 2)n_1(T')$ ning võttes arvesse, et $(n(T) - n_1(T)) + n_1(T') = n(T')$ ja $\Delta(T) = \Delta(T')$, saame

$$\begin{aligned}
(\Delta(T) - 2)n(T') + 2 &= (\Delta(T) - 1)n_1(T') \\
n_1(T') &= \frac{n(T')(\Delta(T') - 2) + 2}{\Delta(T') - 1},
\end{aligned}$$

seega kehtib tõestatav võrratus puu T' jaoks (võrdusena).

Kustutame puust T' sinna juurde pandud lehed jälle ära. Iga lehe kustutamisega väheneb $n_1(T')$ ühe võrra, aga paremal pool võrdusmärki olev avaldis $(\Delta(T) - 2)/(\Delta(T) - 1)$ võrra, s.t. vähem kui ühe võrra. Seega jääb iga lehe kustutamisel võrratus kehtima (õiges suunas).

7. ülesanne. Näita, et kui graafis G on kõigile servadele omistatud erinevad kaalud, siis on G-l üksainus minimaalse kaaluga aluspuu.

Lahendus. Me tõestasime praktikumis, et G suvaline aluspuu võib olla Kruskali algoritmi poolt väljastatud, kui ta järjekordset serva konstrueeritavasse puusse lisades teeb õige valiku.

(Kruskali algoritm oli mittedeterministlik — valides serva, mis on minimaalse kaaluga nende seas, mis juba valitutega tsüklit ei moodusta, oli valikuks mitu erinevat võimalust, kui sellised minimaalse kaaluga servi on mitu.)

Kuna graafis G kõik servad on erinevad, siis ei ole Kruskali algoritmil mittedeterministlikke valikuid. Seega on tal võimalik tagastada ainult üks aluspuu. Rohkem minimaalse kaaluga aluspuid graafil G ei ole.