Tippude värvimine

Graafi $G = (V, E)$ *(tippude) (korrektne) värvimisviis k värviga* on mingi funktsioon $c : V \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$, nii et

- Iga $e \in E$ jaoks, kus $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$, kehtib $c(u) \neq c(v)$.

S.t. serva otstipud on värvitud erinevad värviga.

Graaf G on *värvitav k värviga*, kui tal leidub tippude värvimisviis k värviga.

Graafi G *kromaatiline arv (tippude järgi)* on minimaalne selline k, mille korral G on värvitav k värviga. Tähistame $\chi(G)$.

Graafe, mis on värvitavad k värviga, nimetatakse ka *k-aluselisteks*.

$\Delta(G)$ tähistab graafi G tippude max. astet.

Teoreem. Silmusteta graaf $G = (V, E)$ on värvitav $\Delta(G)+1$ värviga.

Tõestus. Induktsioon üle tippude arvu.

Baas. $|V| = 1$. Ilmne.

Samm. $|V| > 1$. Olgu $v \in V$. Induktsiooni eelduse kohaselt on $G \backslash v$ värvitav $\Delta(G \backslash v) + 1$ värviga. Ta on värvitav ka $\Delta(G) + 1$ värviga, sest $\Delta(G) \geq \Delta(G \backslash v)$.

Olgu c graafi $G \backslash v$ värvimisviis $\Delta(G) + 1$ värviga. Leidub värv i, nii et ükski tipu v naabritest pole seda värvi. Värvime tipu v täiendavalt värviga i. $\square$

Olgu $G = (V, E)$ graaf. Tipuhulka $S \subseteq V$ nimetatakse *klikiks*, kui suvalised kaks (erinevat) tippu $u, v \in S$ on G-s servaga ühendatud.

Teisisõnu, S on klikk, kui indutseeritud alamgraaf $G[S]$ on täisgraaf.

Tipuhulka $S \subseteq V$ nimetatakse *sõltumatuks hulgaks*, kui ühegi kahe S-i kuuluva tipu vahel serva ei ole.

Teisisõnu, S on sõltumatu hulk, kui indutseeritud alamgraaf $G[S]$ on tühigraaf.

Meenutame, et n-tipulist tühigraafi tähistasime sümboliga O_n.

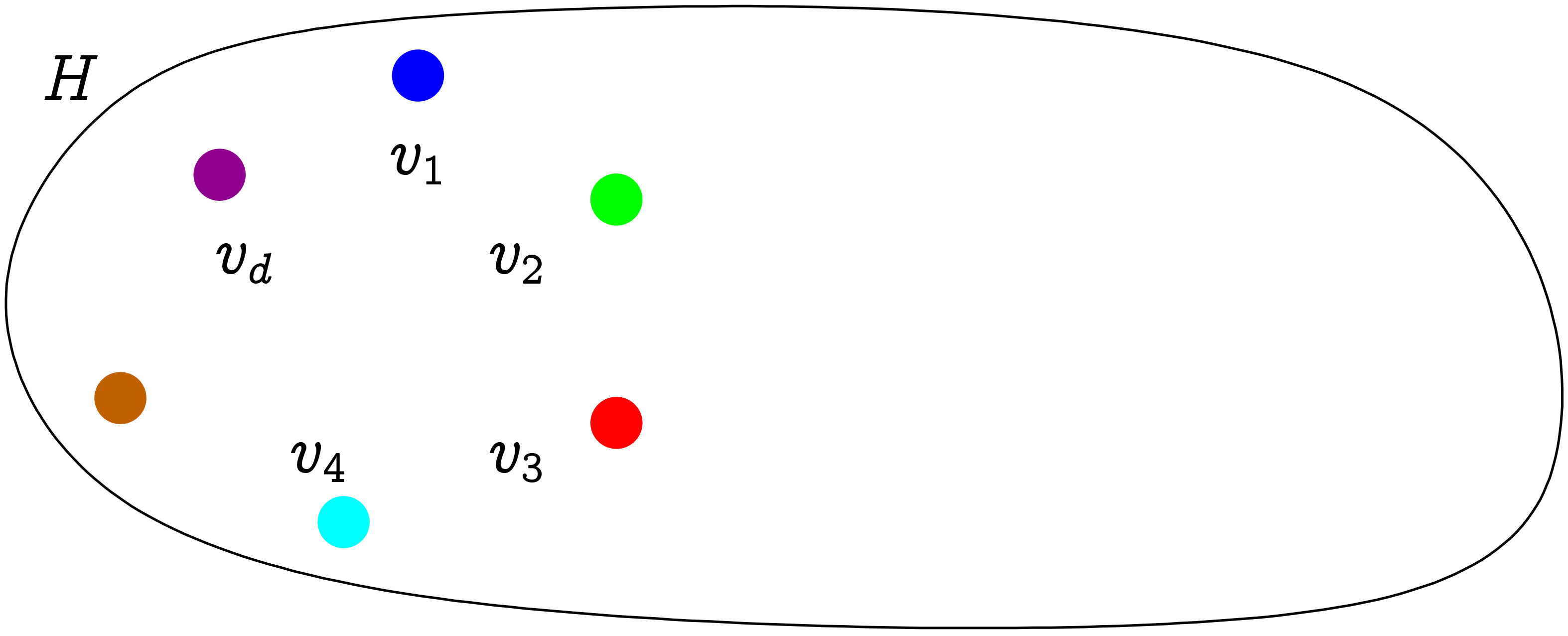
Teoreem (Brooks). Olgu $G = (V, E)$ silmusteta graaf. Olgu $d \geq \max\{\Delta(G), 3\}$. Kui G-s pole $(d+1)$-elemendilist klikki, siis on G värvitav d värviga.

Tõestus. Oletame, et teoreemi väide ei kehti, olgu $G = (V, E)$ minimaalse tippude arvuga kontranäide. S.t.

- $\Delta(G) = d \geq 3$;
- G ükski sidususkomponent ei ole K_{d+1};
- $\chi(G) > \Delta(G)$.

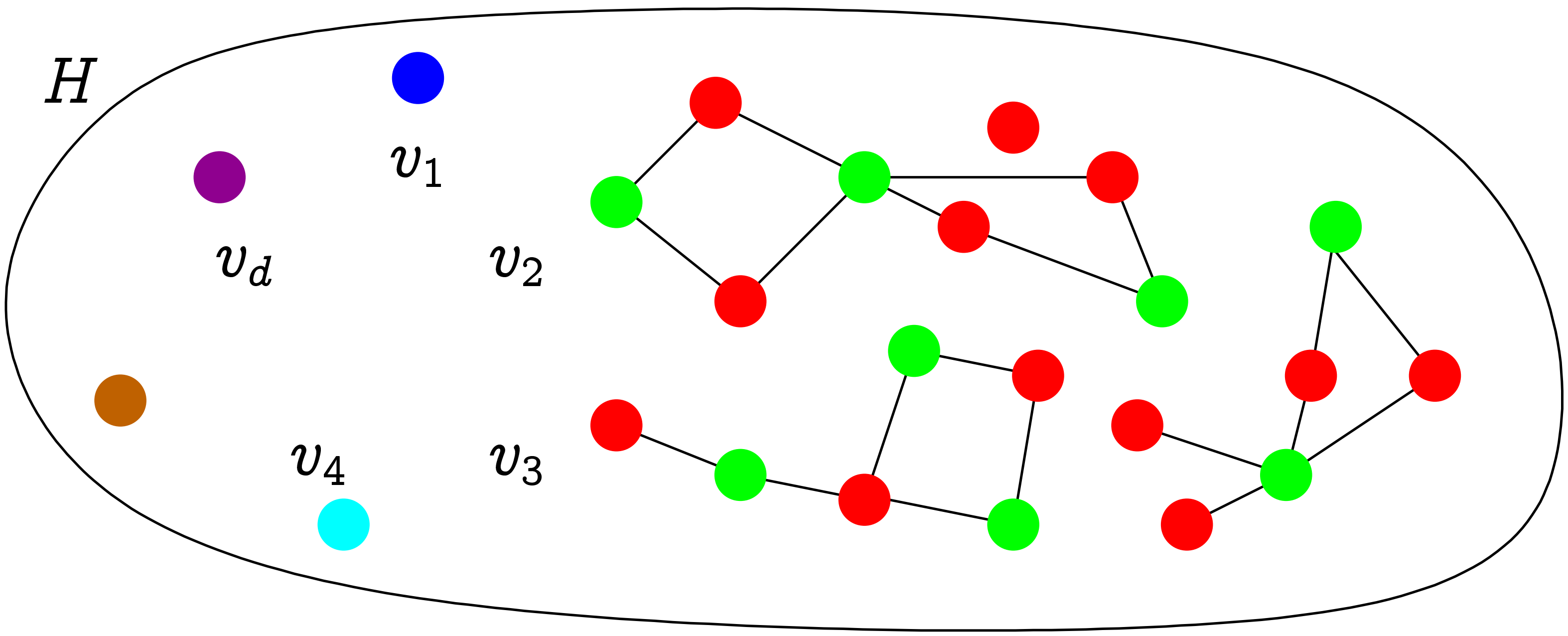
Olgu $v \in V$ mingi tipp. Olgu $H = G \backslash v$. Olgu c H-i mingi värvimisviis d värviga.

v-l on d naabertippu ja neil kõigil on erinev värv. Olgu $N(v) = \{v_1, \ldots, v_d\}$, nii et $c(v_i) = i$.

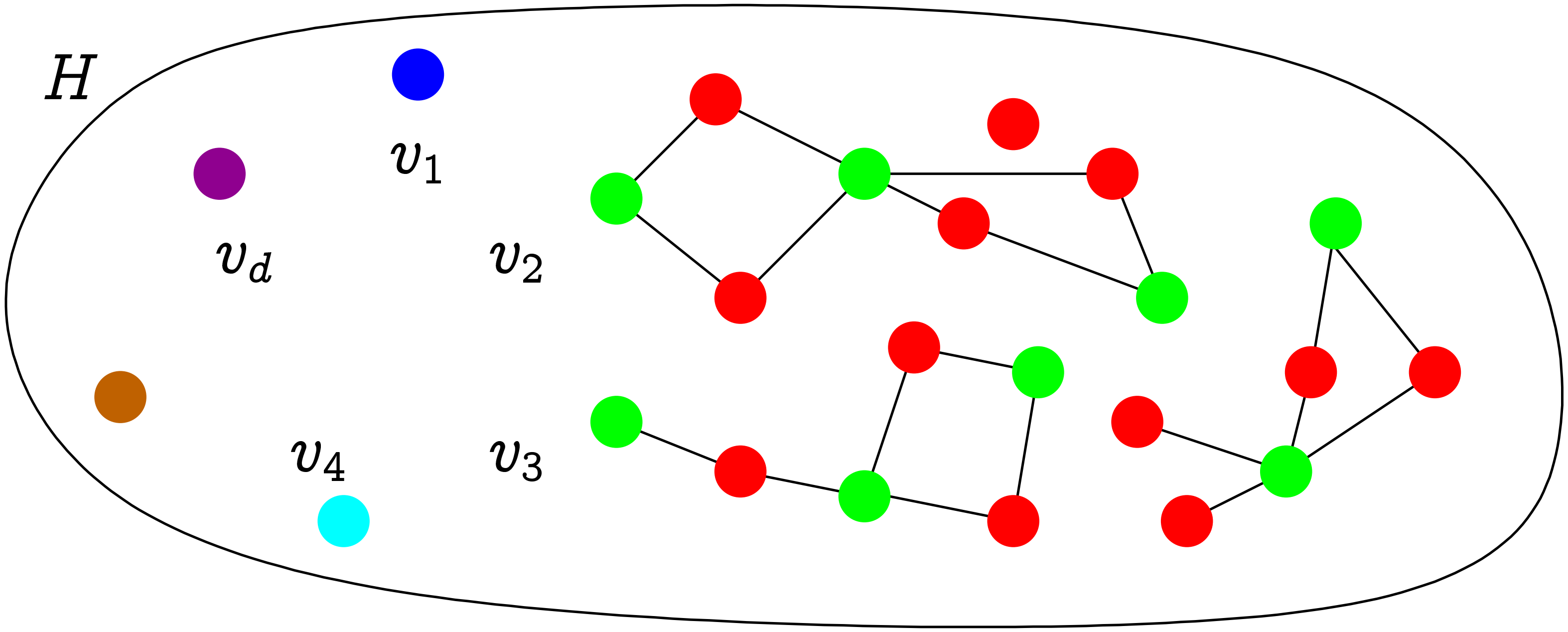


Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et leidub H-i värvimisviis c', mis annab kahele v naabertipule sama värvi.

Olgu i ja j kaks värvi ja olgu H_{ij} graafi H indutseeritud alamgraaf, mille moodustavad kõik need tipud, mis on värvitud värviga i või j.

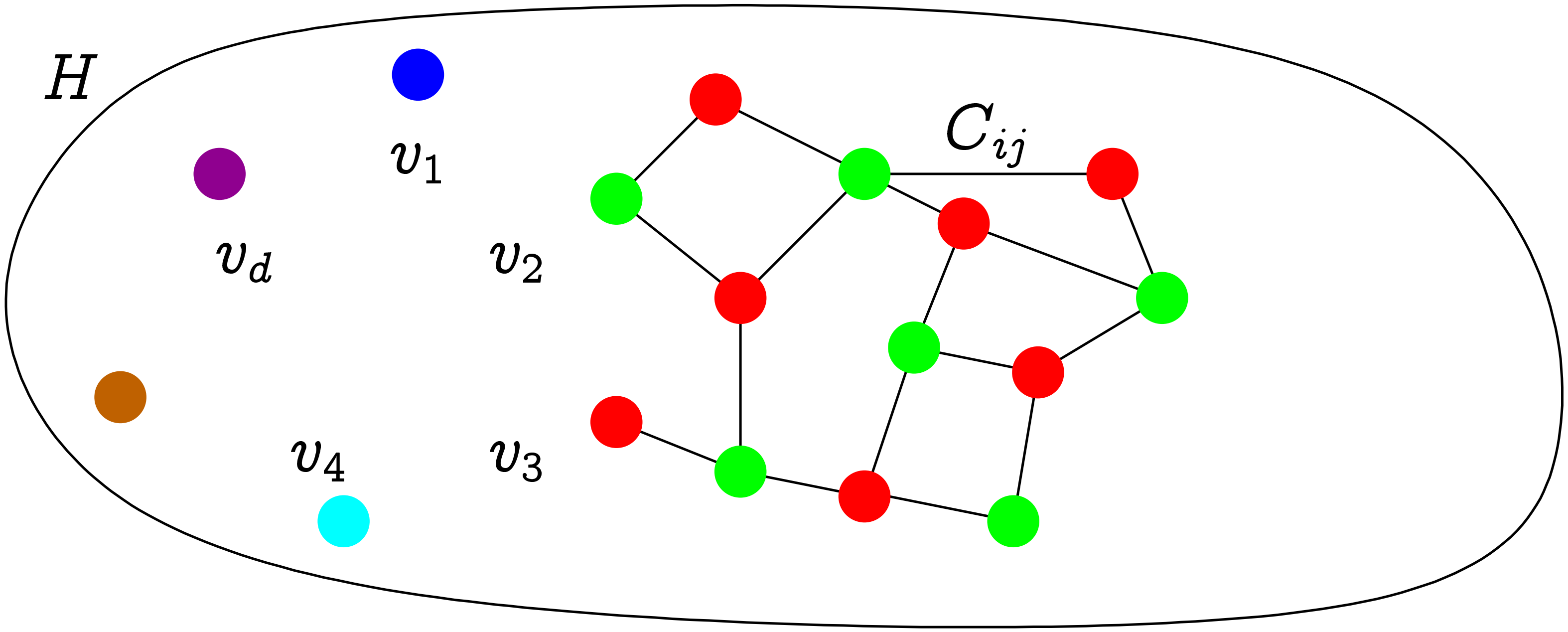


Kui me H_{ij} mõnes sidususkomponendis värvid ära vahetame, siis saame jälle korrektse värvimisviisi.



Seega peavad v_i ja v_j asuma H_{ij} samas sidususkomponendis.

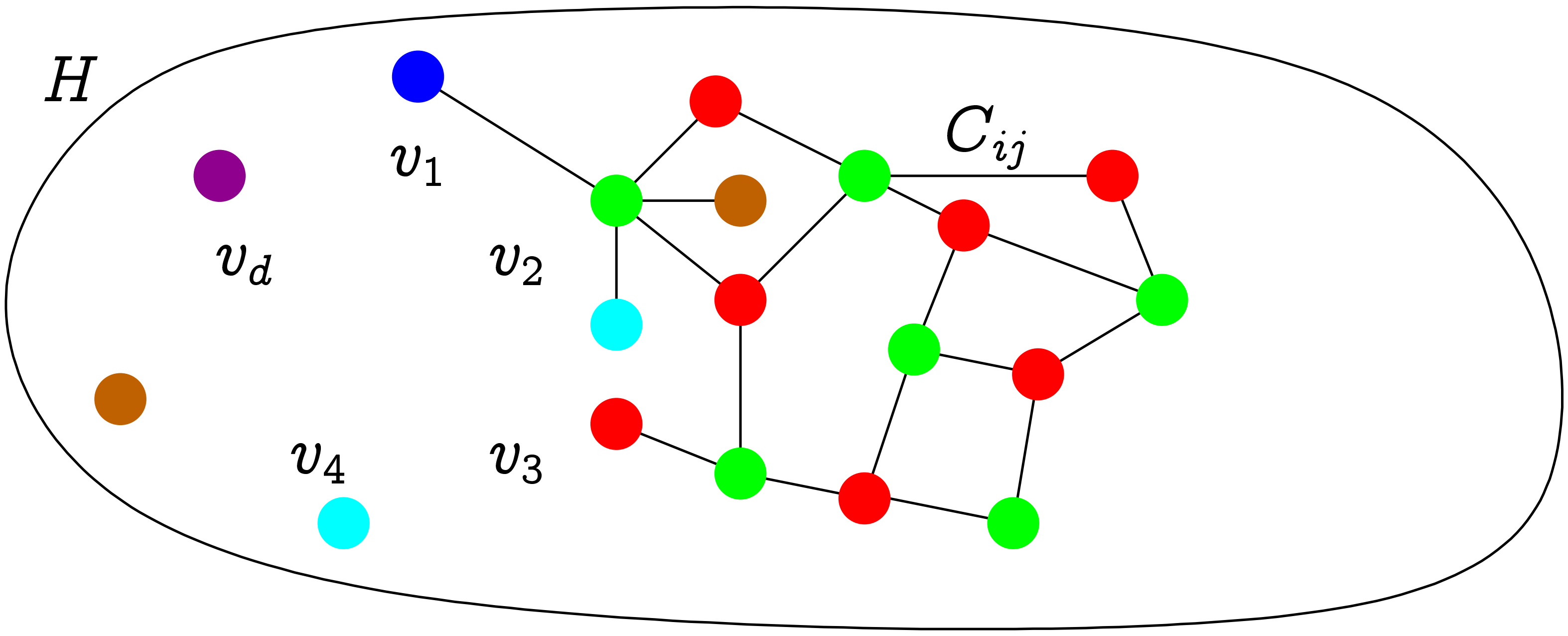
Tähistame seda sidususkomponenti C_{ij}-ga.



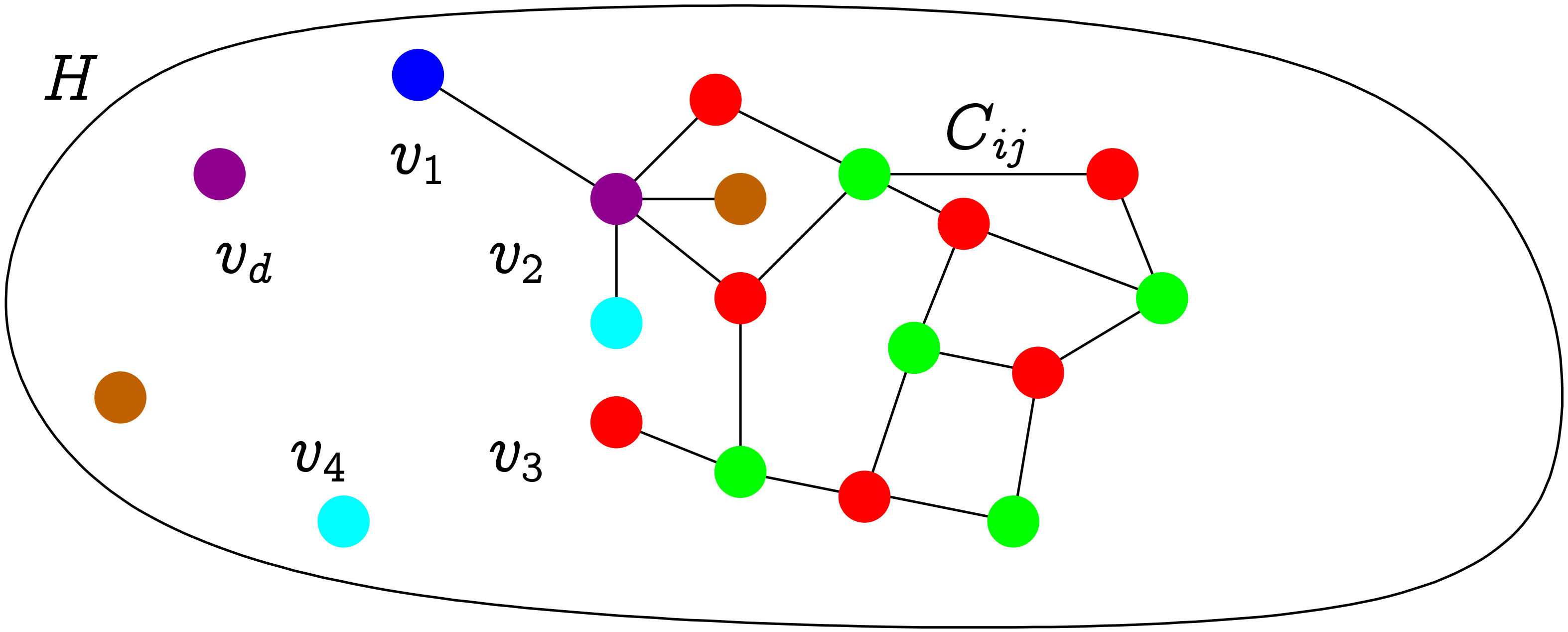
Järgmisena näitame, et C_{ij} peab olema ahel otspunktidega v_i ja v_j.

Piisab, kui näitame, et muidu leiduks H-i värvimisviis c', mille korral indutseeritud alamgraafis H'_{ij} oleksid v_i ja v_j erinevates sidususkomponentides.

Tipu v_j aste graafis H on $\leq d-1$. Kui v_j kaks naabrit oleksid sama värvi, siis oleks v_j naabritel ülimalt $d-2$ erinevat värvi.



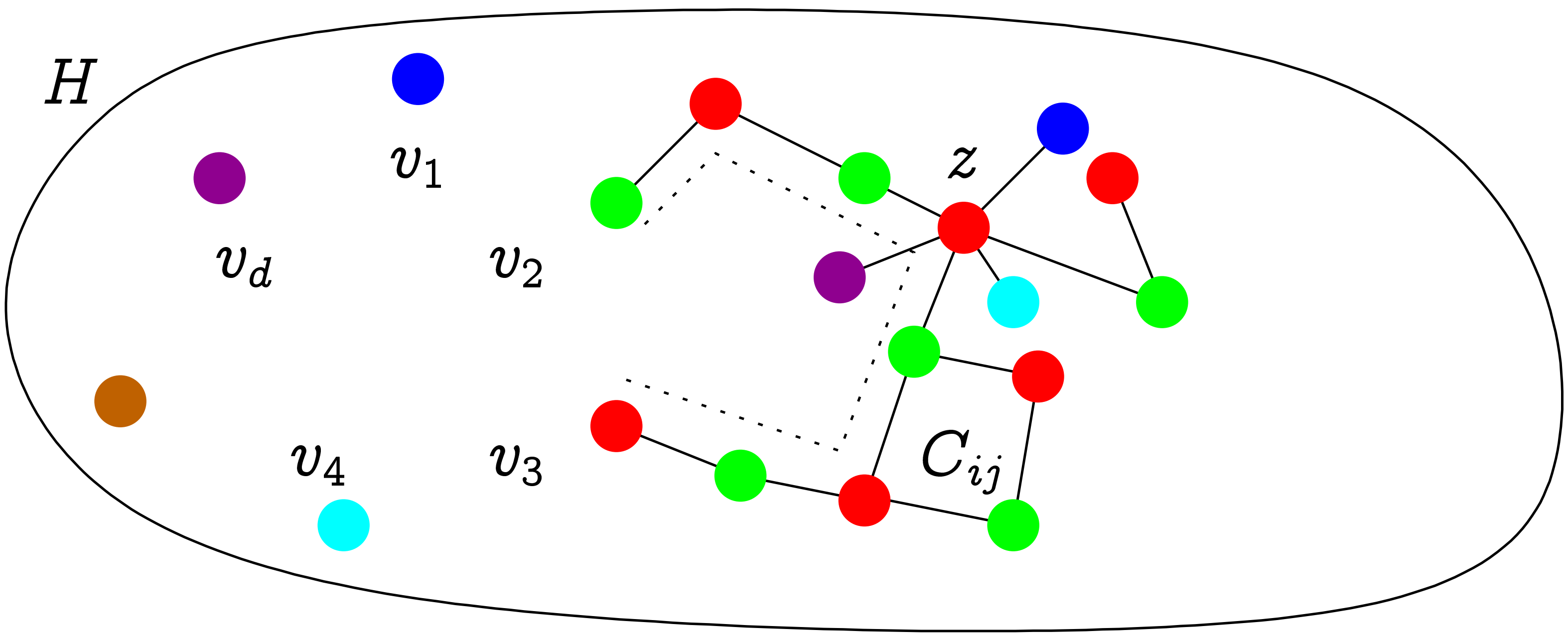
Seega saab tipu v_j värvi valida vähemalt kahel eri viisil. Üks neist on j, aga leidub ka mõni teine.



Nüüd on kahel tipul hulgast $\{v_1, \ldots, v_d\}$ sama värv.

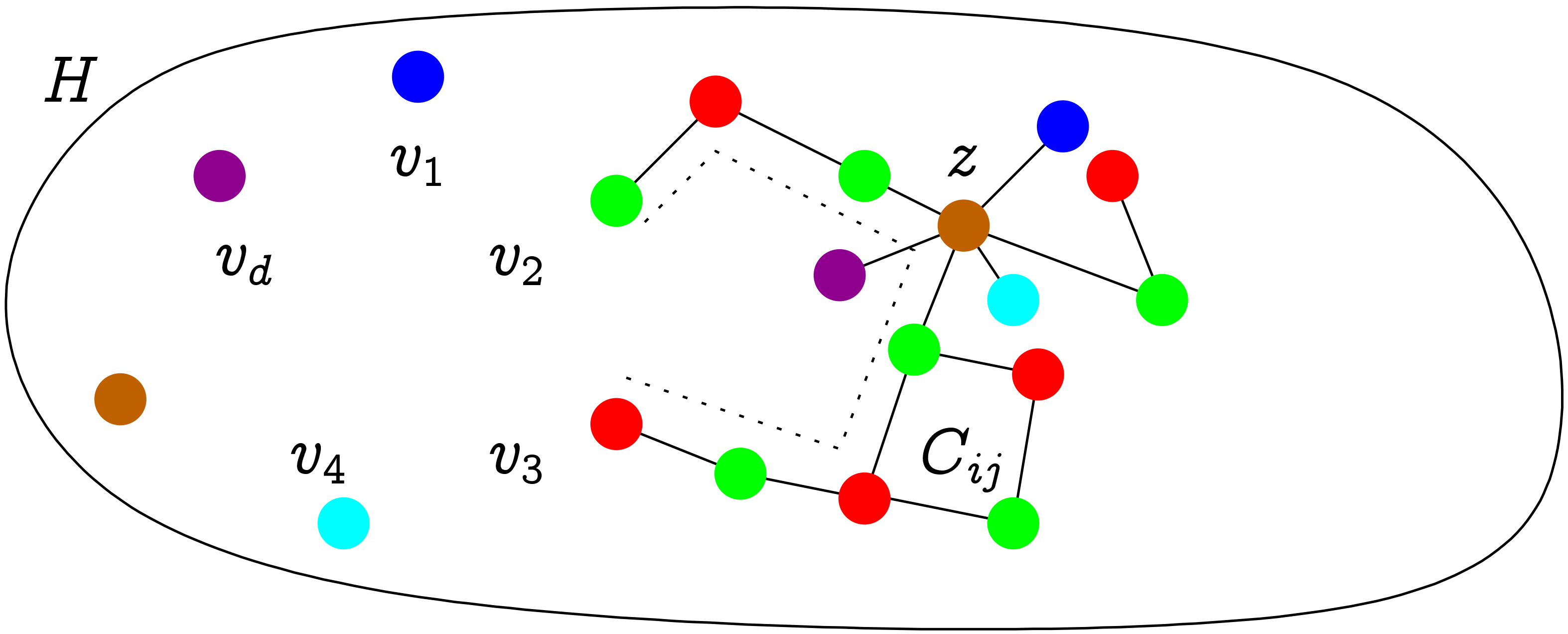
Seega $\deg_{C_{ij}}(v_j) = 1$.

Vaatame mingit teed v_j-st v_i-sse. Olgu z esimene tipp sel teel, mille aste C_{ij}-s on ≥ 3.



z-i naabrite hulgas esineb $\leq d-2$ erinevat värvi (kuni d naabrit, neist vähemalt kolmel sama värv).

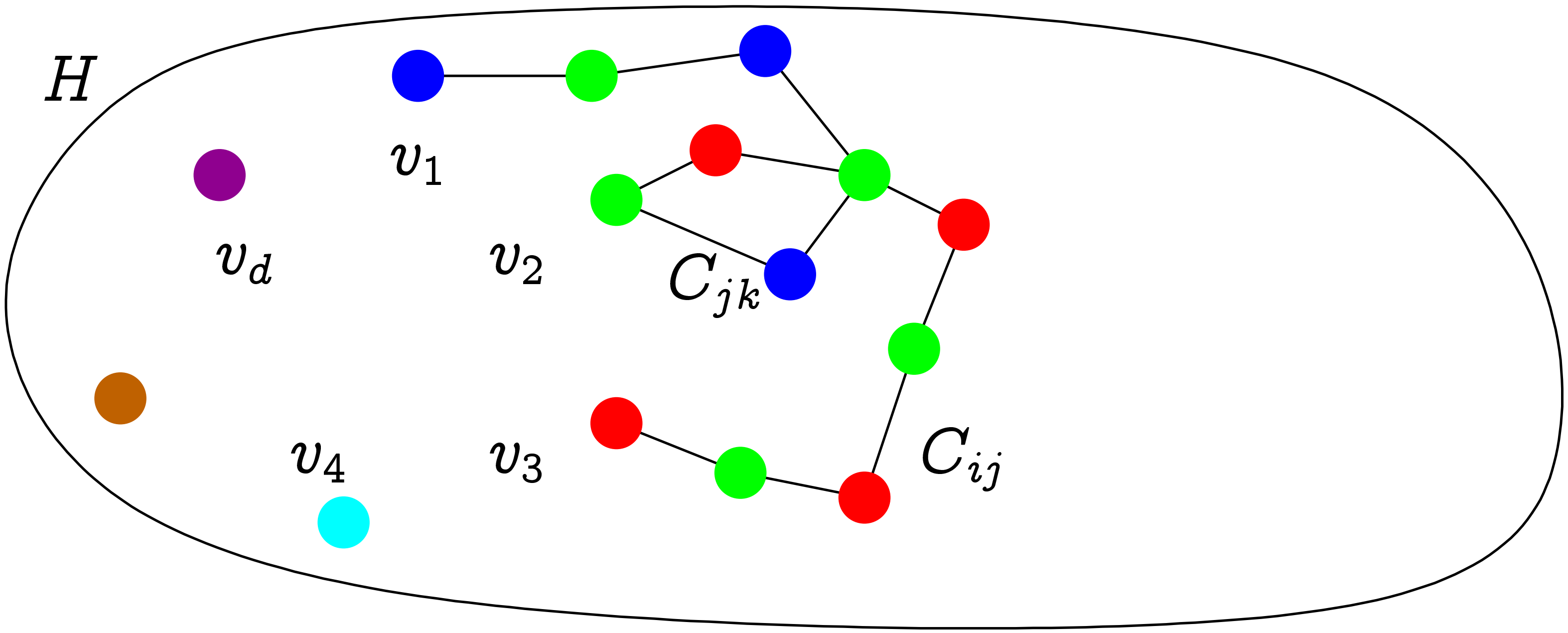
z-i värvi saab valida kahel viisil. Üks neist on i või j, aga leidub ka teine.



Siis C_{ij} laguneb kaheks (või enamaks) komponendiks, seejuures v_i ja v_j jäävad erinevatesse komponentidesse.

Järelikult on C_{ij} ahel.

Järgmisena näitame, et ahelad C_{ij} ja C_{jk} lõikuvad ainult tipus v_j.



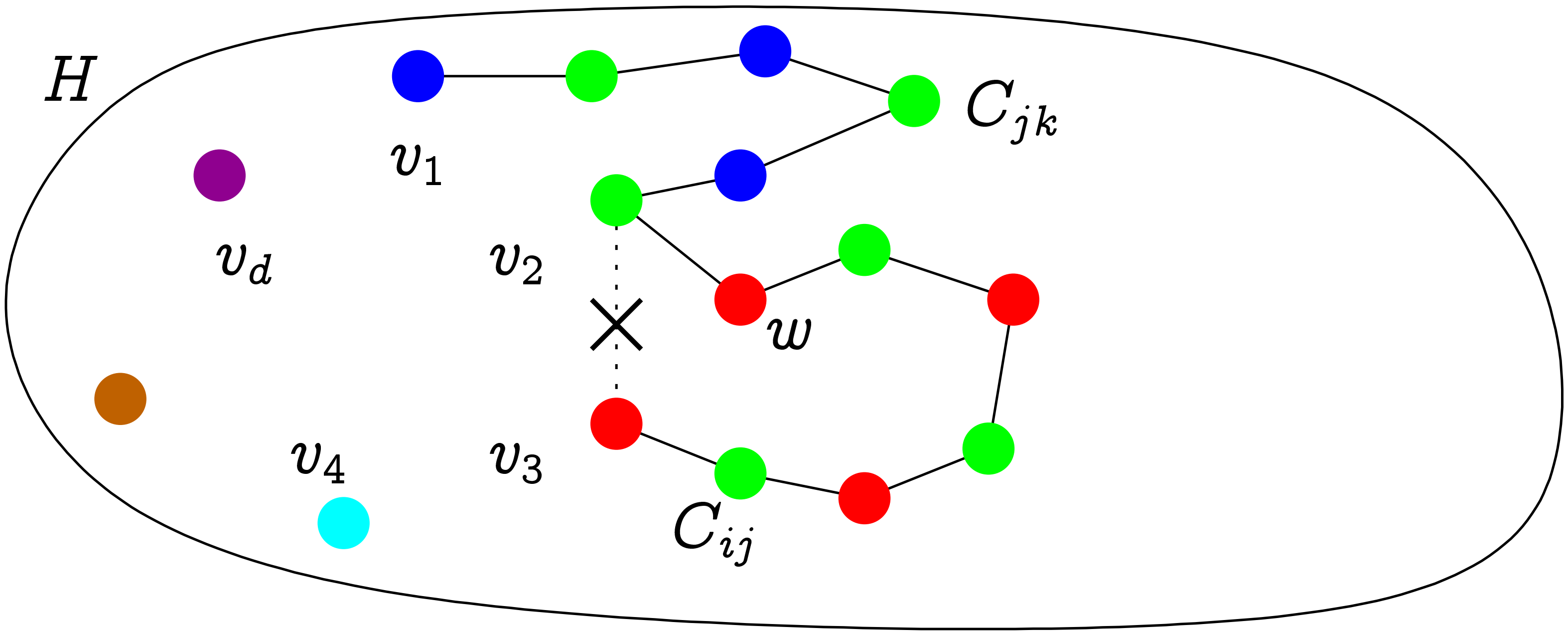
Vastasel korral oleks ühise tipu naabritel jälle ülimalt $d-2$ erinevat värvi ja selle tipu saaks ümber värvida.

Seega:

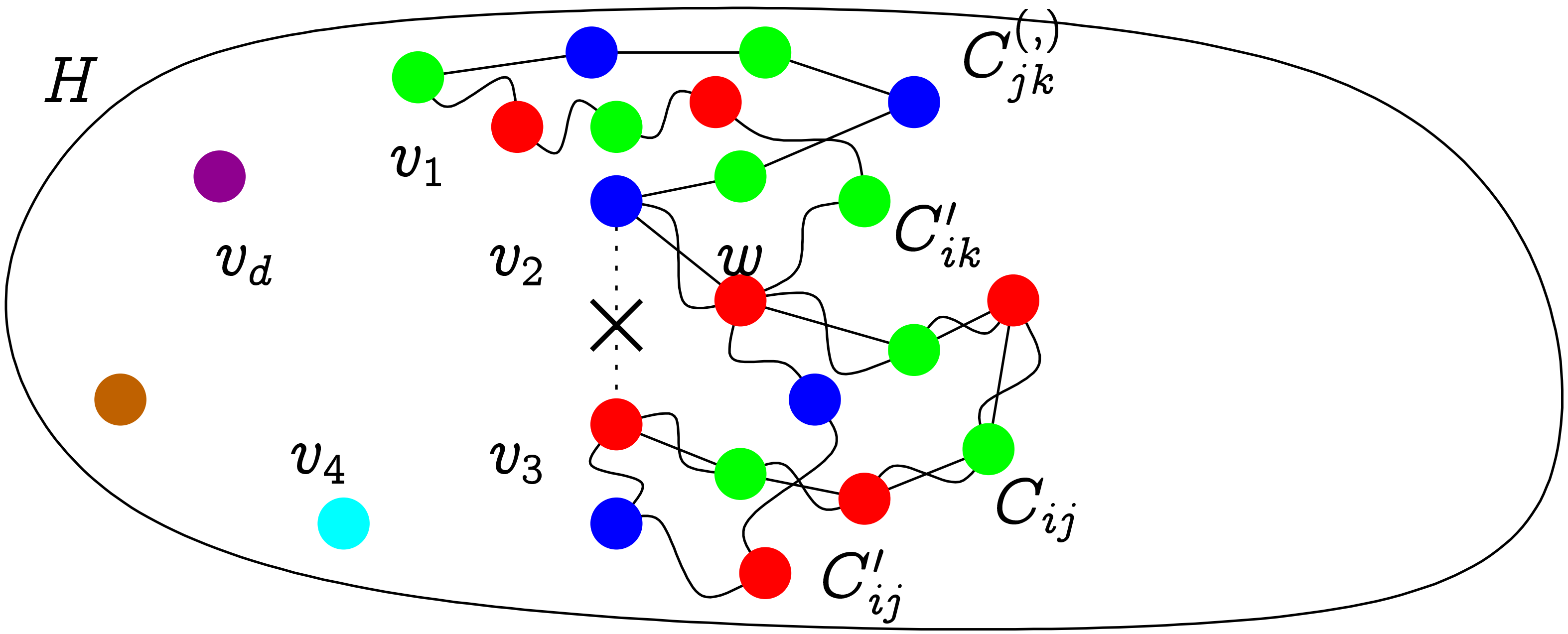
- Iga kahe tipu v_i ja v_j jaoks leidub täpselt üks lihtahel C_{ij} tipust v_i tippu v_j, kus tipud on vaheldumisi värvi i ja j.
  - Kui v_i ja v_j on servaga ühendatud, siis see serv ongi selleks lihtahelaks.
- Need lihtahelad ei lõiku üksteisega mujal kui oma ots-tippudes.

Leiduvad mingid tipud v_i ja v_j, mis pole omavahel servaga ühendatud (sest G-s polnud $(d+1)$-elemendilist klikki).

Olgu w tipu v_j naaber, mis on värvi i.



Graafis C_{jk} vahetame värvid j ja k. Saame uue värvimisviisi c' ja uued ahelad C'_{ij}.



Aga nüüd kuulub w nii C'_{ij}-le kui ka C'_{ik}-le. Me näitasime ennem, et see viib vastuoluni. $\square$

Teoreem. Tasandiline lihtgraaf $G = (V, E)$ on värvitav kuue värviga.

Tõestus. Induktsioon üle tippude arvu.

Baas. $|V| = 1$. Ilmne.

Samm. $|V| > 1$. Olgu $v \in V$ selline, et $\deg(v) \leq 5$, selline v leidub G tasandilisuse tõttu. Induktsiooni eelduse kohaselt on $G \backslash v$ värvitav kuue värviga.

Olgu c graafi $G \backslash v$ värvimisviis kuue värviga. Leidub värv i, nii et ükski tipu v naabritest pole seda värvi. Värvime tipu v täiendavalt värviga i. $\square$

Teoreem. Tasandiline lihtgraaf $G = (V, E)$ on värvitav viie värviga.

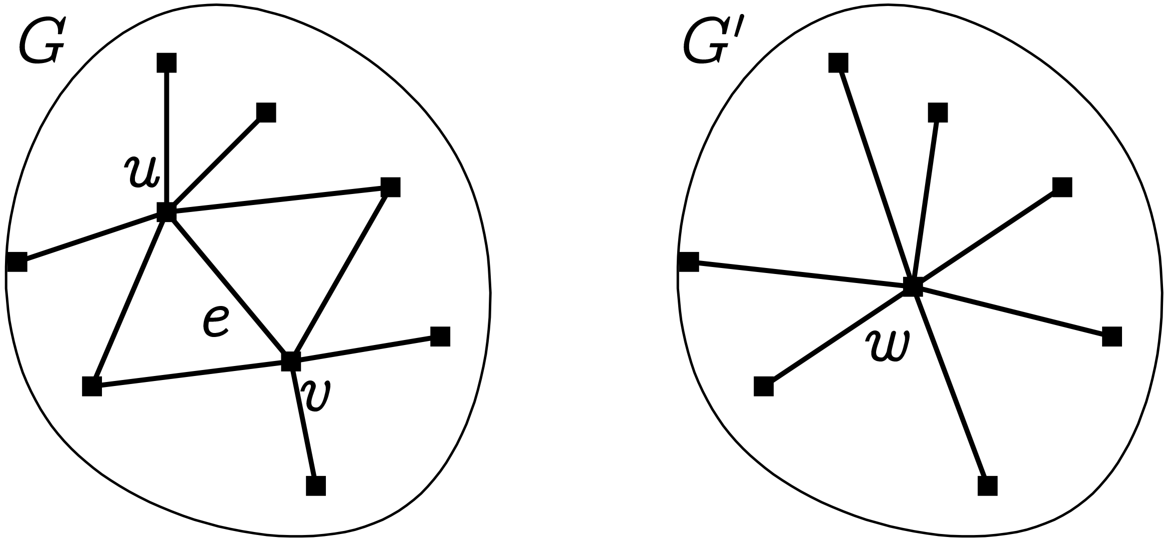
Tõestus. Induktsioon üle tippude arvu.

Baas. $|V| = 1$. Ilmne.

Samm. $|V| > 1$. Olgu $v \in V$ selline, et $\deg(v) \leq 5$. Kui $\deg(v) \leq 4$, siis järeldub G värvitavus viie värviga $G \backslash v$ värvitavusest viie värviga. See järeldumine on analoogiline kahe eelmise tõestusega.

Olgu $\deg(v) = 5$. Olgu $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Serva *kokkutõmbamise* operatsioon ($G \Longrightarrow G'$):



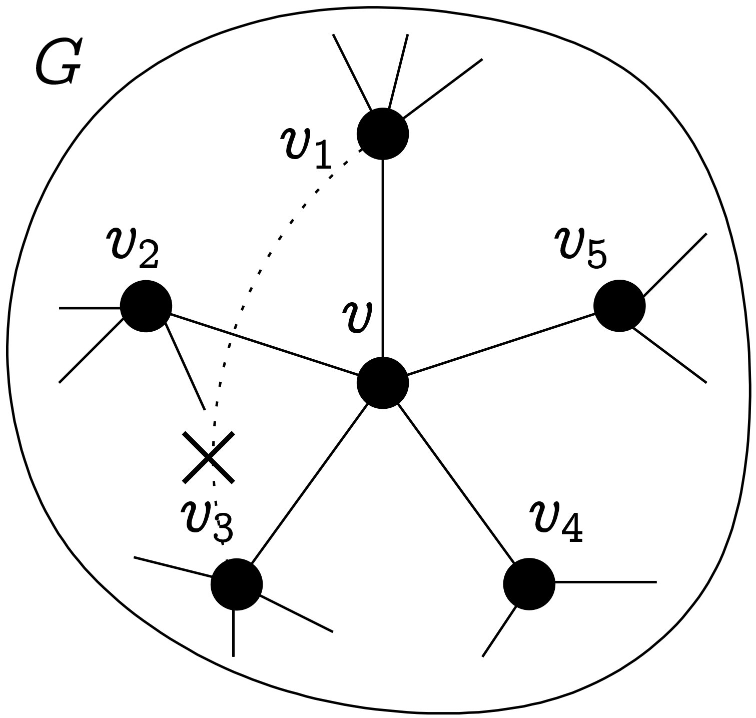
Graafi G' tähistame G/e.

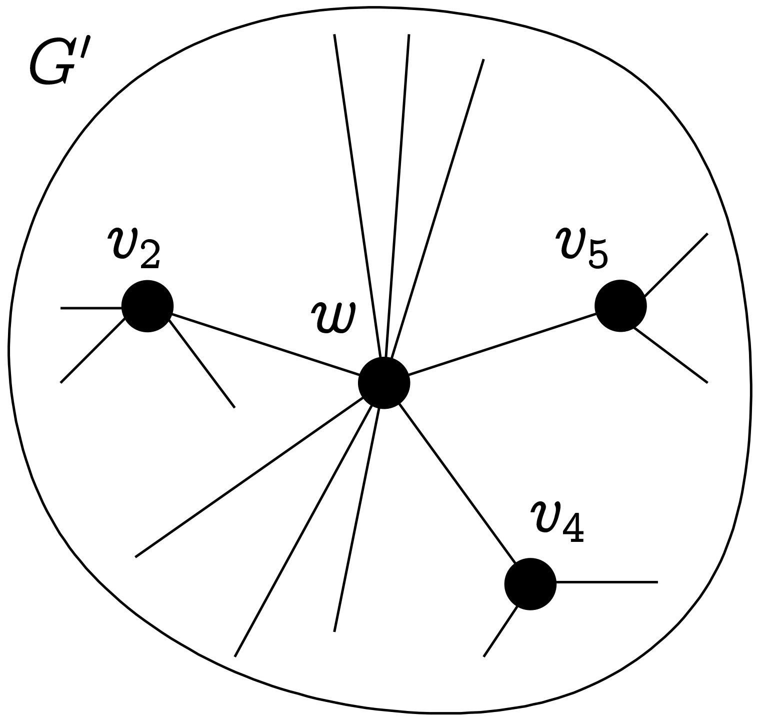
Leiduvad $v_i, v_j \in \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, mis pole naabertipud.

Muidu oleks $K_5 \leq G$, seega poleks G tasandiline.

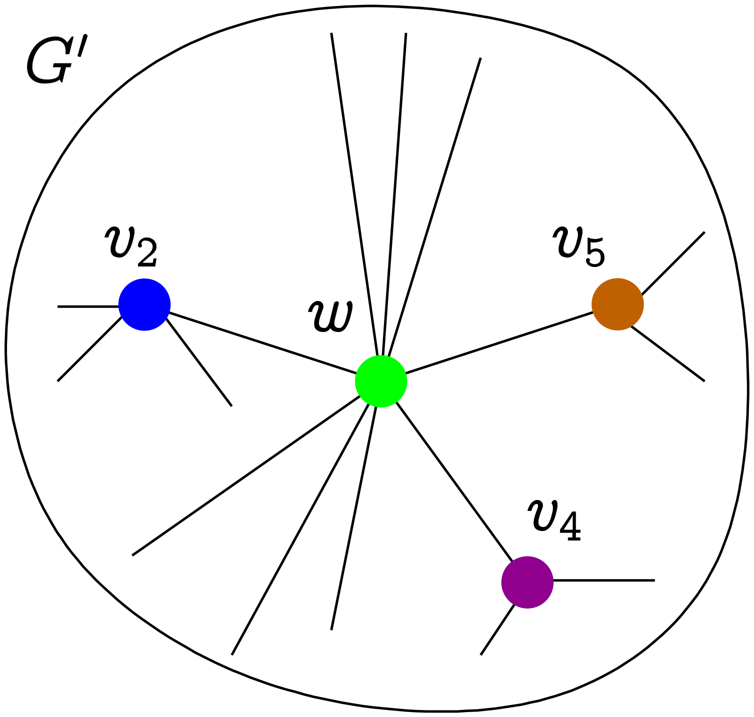
Olgu $G' = \big(G/(v, v_i)\big)/(v, v_j)$.

G' näeb välja nagu G, ainult et tippude v, v_i, v_j asemel on üksainus tipp w.

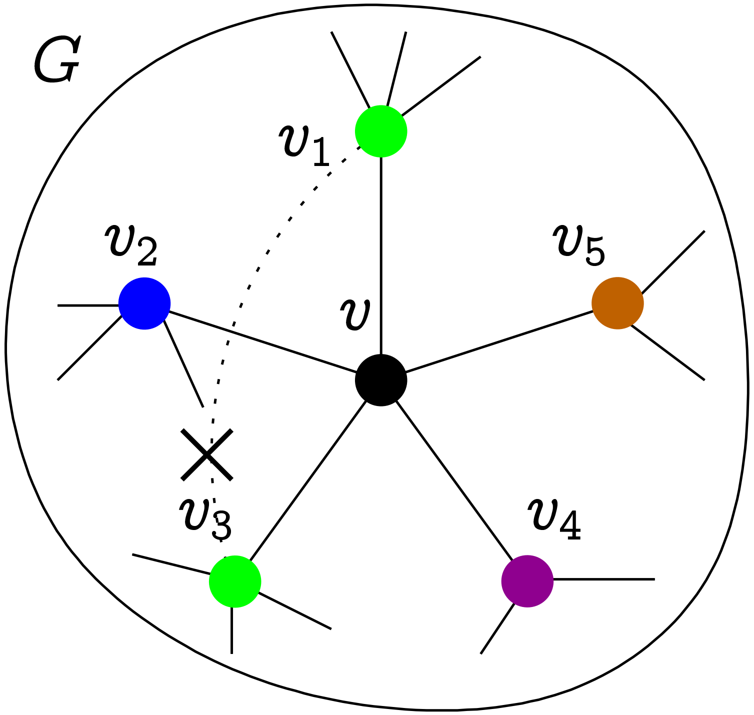




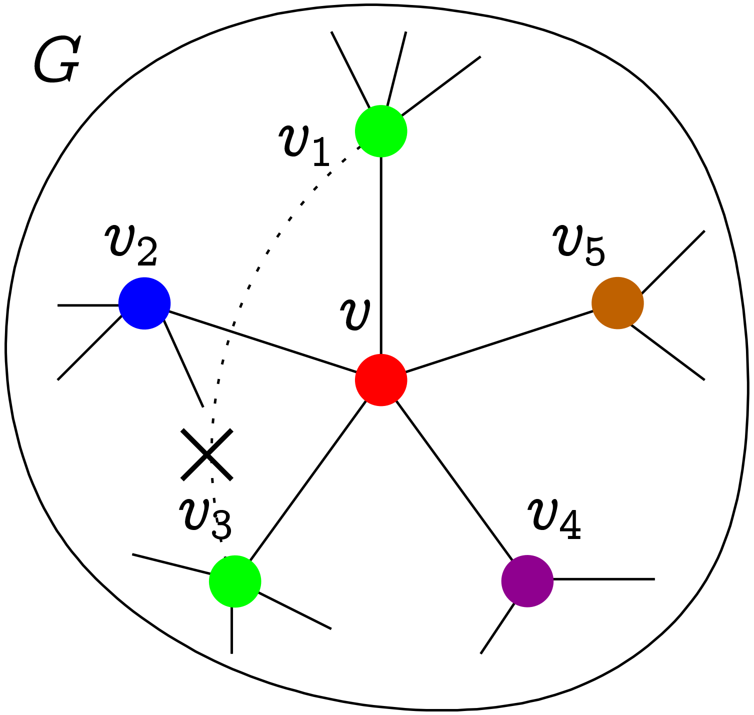
G'-le rakendame induktsiooni eeldust. Olgu c graafi G' värvimisviis viie värviga.



Graafi G tippudest värvime v_i ja v_j sama värviga kui w...



ja v värvime värviga, mida ükski tema naabertipp ei ole.



□

Definitsioon:

(i) K_k on *k-konstrueeritav*.

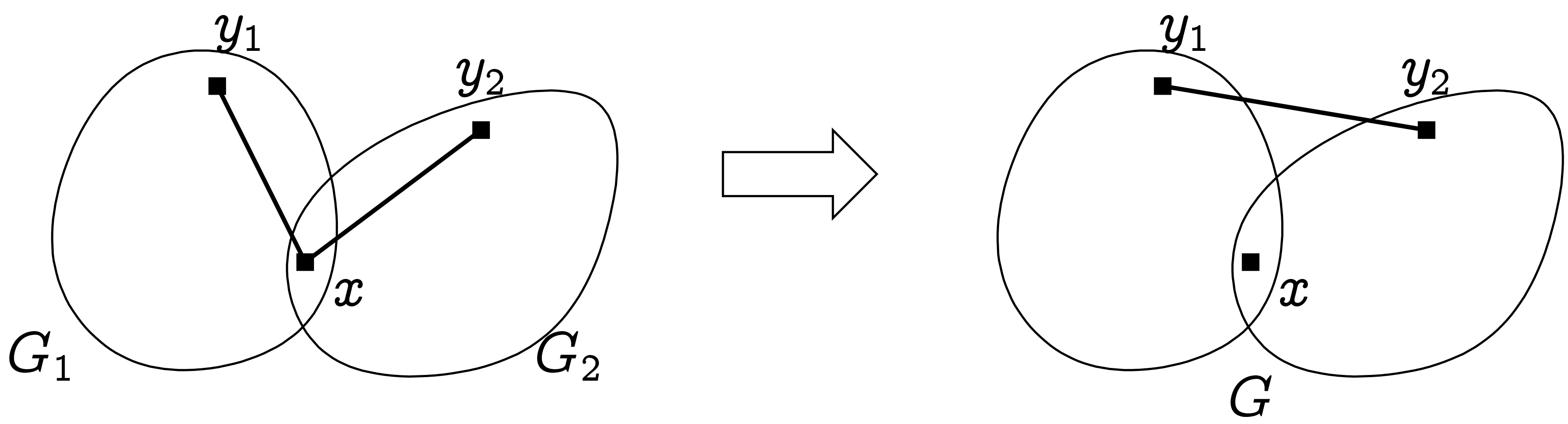
(ii) Kui G on k-konstrueeritav ja $x, y \in V(G)$ pole naabertipud, siis $(G + (x, y))/(x, y)$ on *k-konstrueeritav*.

(iii) Olgu $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ k-konstrueeritavad graafid, olgu $V_1 \cap V_2 = \{x\}$. Olgu $y_1 \in V_1$ ja $y_2 \in V_2$ tipu x naabrid. Siis

$$G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{(y_1, y_2)\} \setminus \{(x, y_1), (x, y_2)\})$$

on *k-konstrueeritav*.

Teoreem. Mingi graafi kromaatiline arv on $\geq k$ parajasti siis, kui tal on mõni k-konstrueeritav alamgraaf.



y_1
y_2
x
G_1
G_2
y_1
y_2
x
G

Tõestus.

$\Leftarrow$. Näitame, et kui G on k-konstrueeritav, siis $\chi(G) \geq k$.

Juht (i): ilmne.

Juht (ii): oletame vastuväiteliselt, et graafil $(G+(x,y))/(x,y)$ on värvimisviis γ $k' < k$ värviga. Siis γ on ka G värvimisviis, kui defineerime, et $\gamma(x) = \gamma(y) =$ selle tipu värv, milleks x ja y kokku tõmmati.

Juht (iii): oletame vastuväiteliselt, et graafil G on värvimisviis γ $k' < k$ värviga. Kuna $\gamma(y_1) \neq \gamma(y_2)$, siis leidub i nii, et $\gamma(y_i) \neq \gamma(x)$. Seega on γ ka graafi G_i värvimisviis.

$\Rightarrow$. Olgu G mingi graaf, kus $\chi(G) \geq k$. Oletame vastuväiteliselt, et ei leidu k-konstrueeritavat graafi $H \leq G$.

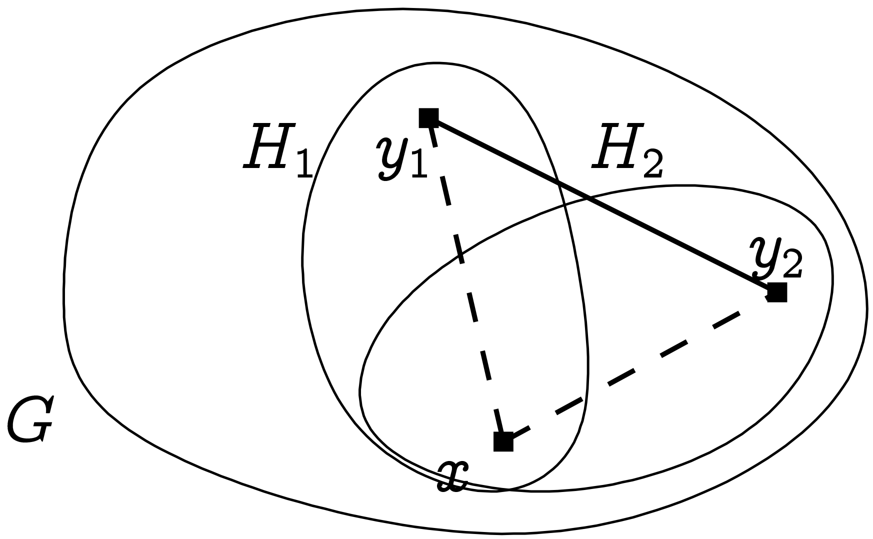
Siis $k \geq 3$, sest K_2 on 2-konstrueeritav.

Lisame G-sse nii palju servi, et temas ei oleks veel k-konstrueeritavat alamgraafi, aga suvalise serva lisamisel juba tekiks selline alamgraaf.

G pole täielik r-aluseline (mingi $r \geq k$ jaoks), sest siis oleks $K_k \leq K_r \leq G$.

Seega leiduvad tipud x, y_1, y_2 nii, et $(y_1, y_2) \in E(G)$ ning x pole ei y_1 ega ka y_2 naaber.

Olgu $H_i \leq G + (x, y_i)$ mingi k-konstrueeritav graaf. Siis $(x, y_i) \in E(H_i)$.



Siin võib olla ka $y_i \in H_{3-i}$.

Lemma. Olgu

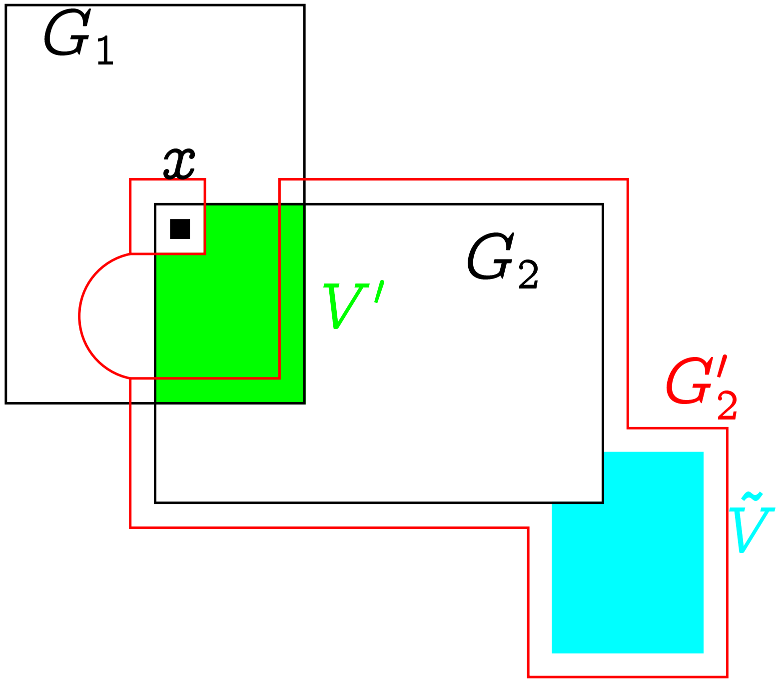
- $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ k-konstrueeritavad graafid;
- $x \in V_1 \cap V_2$;
- $y_i \in V_i$ tipu x mingi naabertipp graafis G_i ning mitte-naabertipp graafis G_{3-i} (juhul kui $y_i \in V_{3-i}$);
- $(G_1 - (x, y_1))[V_1 \cap V_2] = (G_2 - (x, y_2))[V_1 \cap V_2]$.

Siis

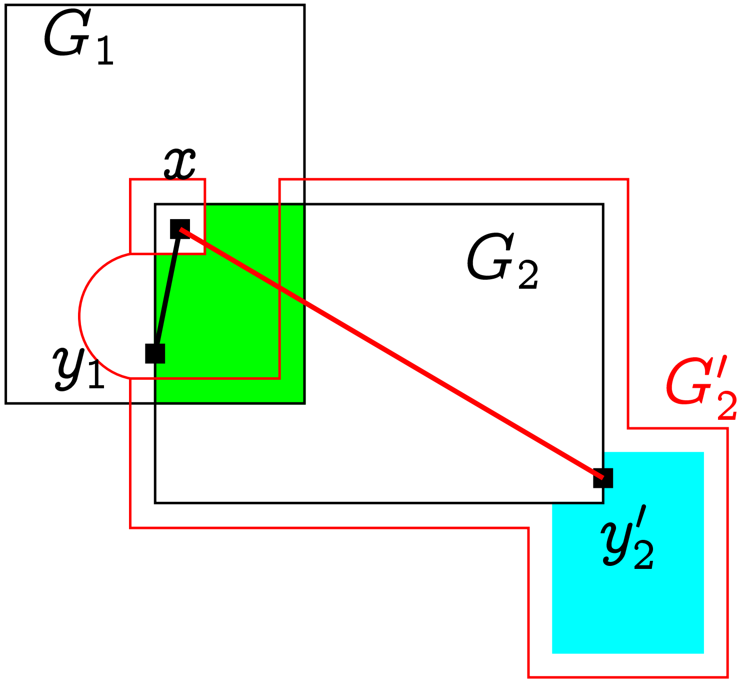
$$G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{(y_1, y_2)\} \backslash \{(x, y_1), (x, y_2)\})$$

on k-konstrueeritav.

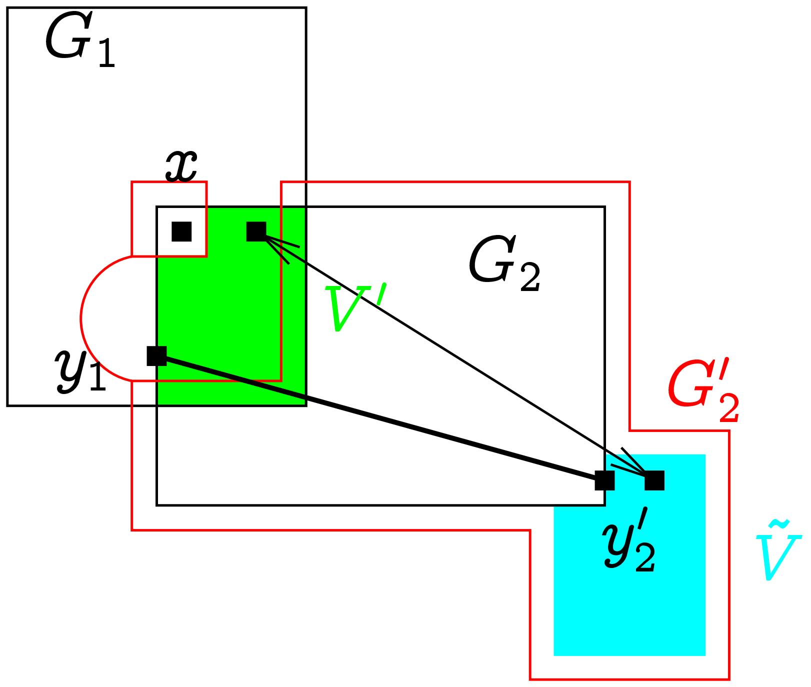
Tõestus. Olgu $V' = (V_1 \cap V_2) \setminus \{x\}$ ja olgu $\tilde{V}$ hulga V' koopia. Olgu G_2' graafi G_2 koopia tipuhulgaga $(V_2 \setminus V_1) \cup \{x\} \cup V'$.



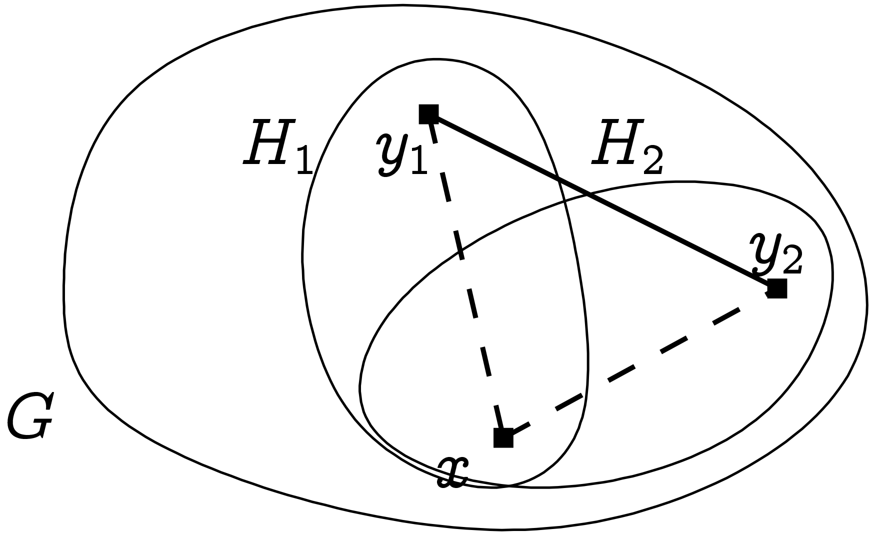
Olgu $y_2' \in V(G_2')$ tipule y_2 vastav tipp.



Kui me ühendame graafid G_1 ja G_2' k-konstrueeritavuse punktis (iii) toodud viisil, siis saame k-konstrueeritava graafi.



Samastame nüüd (ükshaaval) V' ja $\tilde{V}$ vastavad tipud. See on operatsioon (ii) k-konstrueeritavuse definitsioonist. Lõpuks saame graafi G lemma sõnastusest. Lemma on tõestatud.



Lemma järgi on graafide H_1 ja H_2 ühend koos servaga (y_1, y_2) ja ilma servadeta (x, y_1) ja (x, y_2) k-konstrueeritav.

□

Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf. Mitmel eri viisil on teda võimalik k värviga värvida?

S.t. kui palju leidub funktsioone $c : V \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$, mis on G tippude korrektsed värvimisviisid k värviga?

S.t., kui

- c on G värvimisviis k värviga;
- $\sigma : V \longrightarrow V$ on G mingi automorfism;
- $\varphi : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ on mingi bijektsioon,

siis c, $c \circ \sigma$ ja $\varphi \circ c$ loeme kõik erinevateks.

Värvimisviiside arvu tähistame sümboliga $\mathrm{P}_G(k)$.

Kehtivad:

$$\mathrm{P}_{O_n}(k) = k^n$$
$$\mathrm{P}_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

kui T on n-tipuline puu, siis

$$\mathrm{P}_T(k) = k(k-1)^{n-1} \quad .$$

Teoreem. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. Olgu $e \in E$. Siis $\mathrm{P}_G(k) = \mathrm{P}_{G-e}(k) - \mathrm{P}_{G/e}(k)$.

Tõestus. Olgu $u, v \in V$ serva e otstipud.

- Graafil $G - e$ on värvimisviise c, kus $c(u) \neq c(v)$, sama palju, kui graafil G on värvimisviise.
- Graafil $G - e$ on värvimisviise c, kus $c(u) = c(v)$, sama palju, kui graafil G/e on värvimisviise.

Seega $\mathrm{P}_{G-e}(k) = \mathrm{P}_G(k) + \mathrm{P}_{G/e}(k)$. $\square$

Järeldus. P_G on polünoom.

Tõestus. Induktsioon üle servade arvu.

Baas. $G = O_n$. Siis $\mathrm{P}_G(k) = k^n$.

Samm. G-s on servi. Olgu e graafi G mõni serv. Siis $\mathrm{P}_G(k) = \mathrm{P}_{G-e}(k) - \mathrm{P}_{G/e}(k)$. Induktsiooni eelduse järgi on P_{G-e} ja $\mathrm{P}_{G/e}$ polünoomid, seega on P_G kahe polünoomi vahe, s.t. polünoom. $\square$

Funktsiooni P_G nimetatakse graafi G *kromaatiliseks polünoomiks*.

Mingi graafi kromaatilist polünoomi saab leida viimase teoreemi abil.

Olgu G n tipu ja m servaga lihtgraaf. Olgu $G_1, \ldots, G_t$ tema sidususkomponendid. Siis

- $\mathrm{P}_G(k)$ on n-nda astme polünoom.
- k^n kordaja $\mathrm{P}_G(k)$-s on 1.
- k^{n-1} kordaja $\mathrm{P}_G(k)$-s on $-m$.
- $\mathrm{P}_G(k)$ kordajad on vahelduvate märkidega.
- $\mathrm{P}_G(k) = \prod_{i=1}^{t} \mathrm{P}_{G_i}(k)$.
- Kui G on sidus, siis $\mathrm{P}_G(k)$ vabaliige on null ja lineaarliige on nullist erinev.

Tõestus (enamasti) induktsiooniga üle servade arvu, kasutades viimast teoreemi ning (baasina) seda, et $\mathrm{P}_{O_n}(k) = k^n$.

Kodune ülesanne.