Algoritmid maksimaalse kooskõla ja minimaalse hinnaga täieliku kooskõla leidmiseks

Maksimaalse kooskõla leidmiseks graafis $G = (V, E)$ alustame lihtsalt mingist kooskõlast M.

Järgnevas anname algoritmi, mille abil konstrueerida kooskõla M', kus on ühe võrra rohkem servi.
(kui selline M' leidub)

M võib olla $\emptyset$, võib ka olla ahne algoritmiga koostatud:

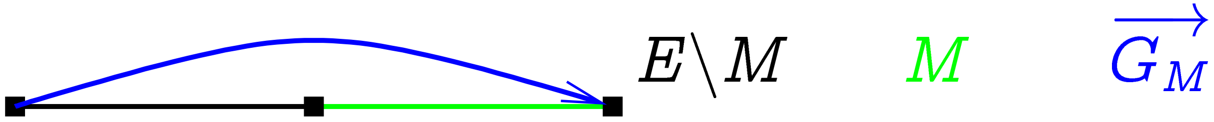
- Olgu $M := \emptyset$.
- Iga $e \in E$ jaoks
  - kui M ei kata e kumbagi otstippu, siis lisa e hulka M.

Kooskõla M suurendamiseks tuleb meil leida M-laienev tee.

Selle hõlbustamiseks defineerime suunatud graafi $\overrightarrow{G_M}$:

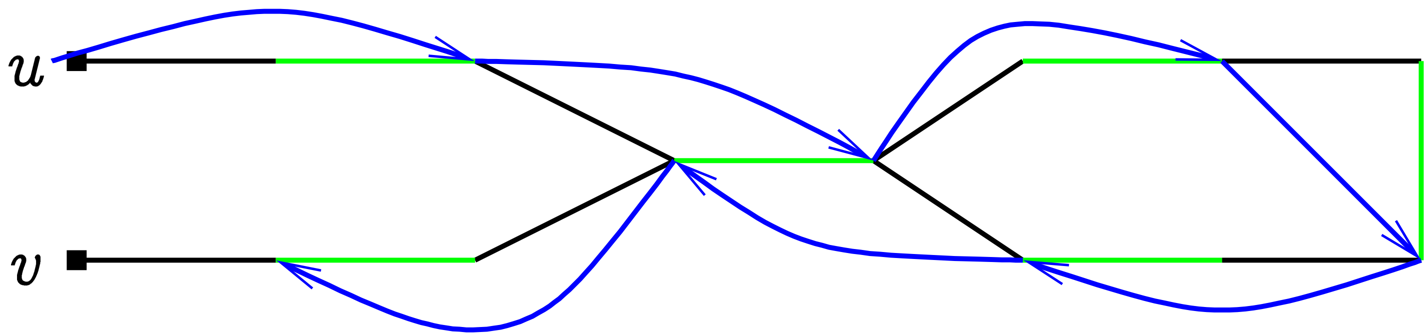
$$V(\overrightarrow{G_M}) = V$$

$$E(\overrightarrow{G_M}) = \{(u,w) \mid \exists v \in V : (u,v) \in E\backslash M, (v,w) \in M\} \ .$$



Kui $\deg_M(u) = \deg_M(v) = 0$, siis G-s leidub M-laienev *mitte tingimata lihtne* (MTL) tee u-st v-sse parajasti siis, kui $\overrightarrow{G_M}$-s leidub (suunatud) ahel u-st $N(v)$-sse.
$(\ldots$s.t. mingisse tippu $w \in N(v))$

M-laienev mittelihtne tee u-st v-sse:



Olgu $W \subseteq V$ kõigi selliste tippude hulk, mida M ei kata.

Lemma. Olgu $P = v_0 — v_1 — \cdots — v_m$ minimaalse pikkusega M-vahelduv MTL tee W-st (s.t. $v_0 \in W$) mingisse tippu $v = v_m$. Siis kehtib üks järgmistest väidetest:

- P on lihtne.
- P ei ole lihtne, leiduvad sellised i, j, et

  (i) $0 \leqslant i < j \leqslant m$;

  (ii) $v_i = v_j$;

  (iii) i on paaris, j on paaritu;

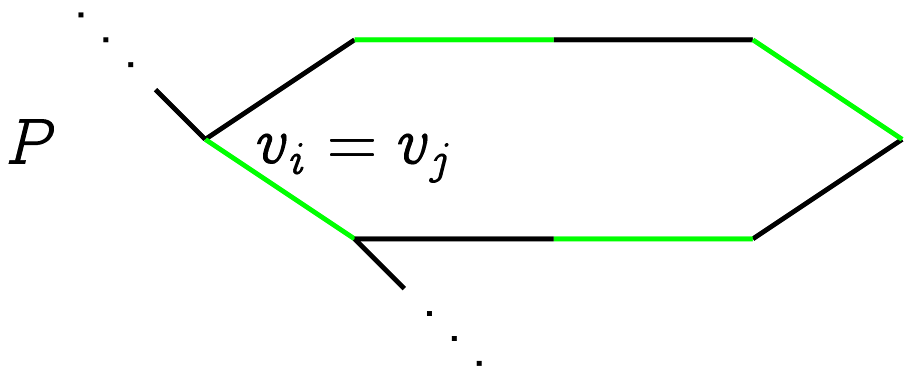
    – s.t. servad $v_i — v_{i+1}$ ja $v_{j-1} — v_j$ ei kuulu M-i;

  (iv) $v_0, \ldots, v_{j-1}$ on kõik erinevad.

Tõestus. Kui P on lihtne, siis pole midagi tõestada.

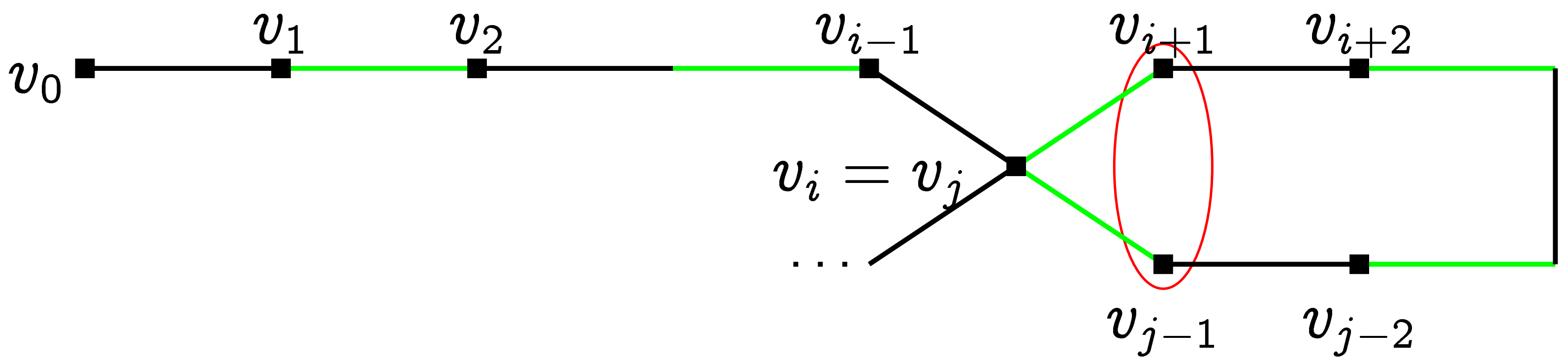
Oletame, et P ei ole lihtne, olgu $j \in \{1, \ldots, m\}$ vähim selline, et leidub $i < j$ nii, et $v_i = v_j$. Selline i ja j valik rahuldab triviaalselt tingimusi (i), (ii), ja (iv).

Kui $j - i$ oleks paaris, siis...



poleks P minimaalse pikkusega.

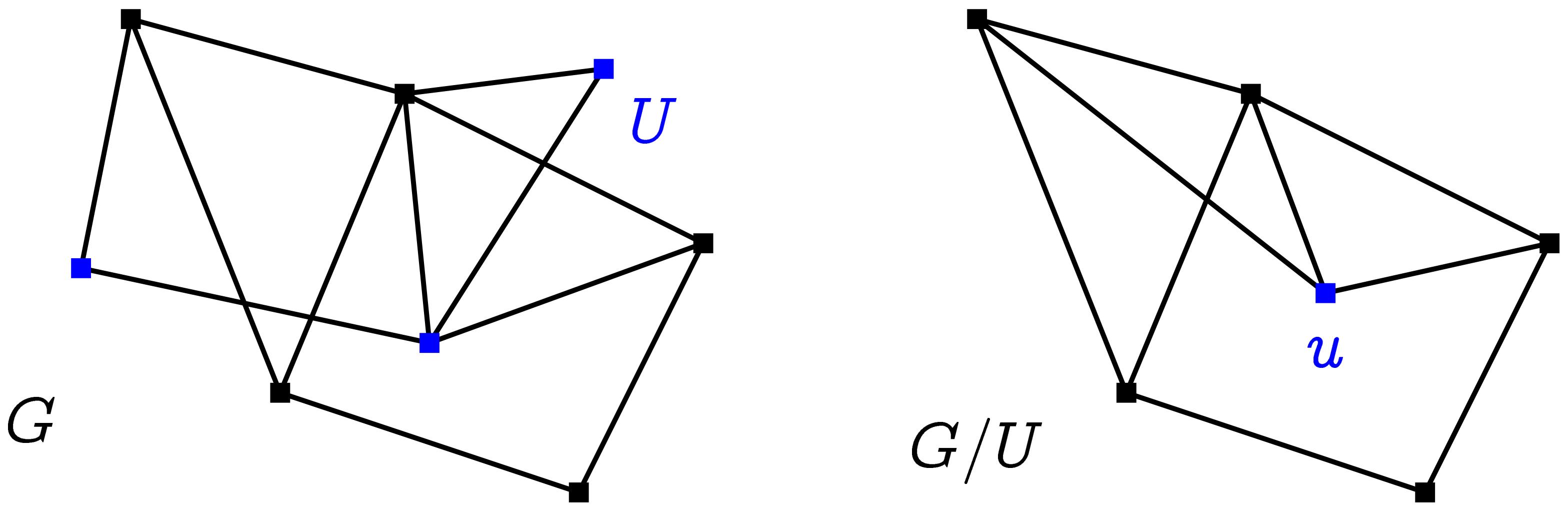
Kui j oleks paaris (ja i paaritu), siis. . .



oleks juba v_{j-1} mingi varasema tipuga võrdne (v_{i+1}-ga). $\square$

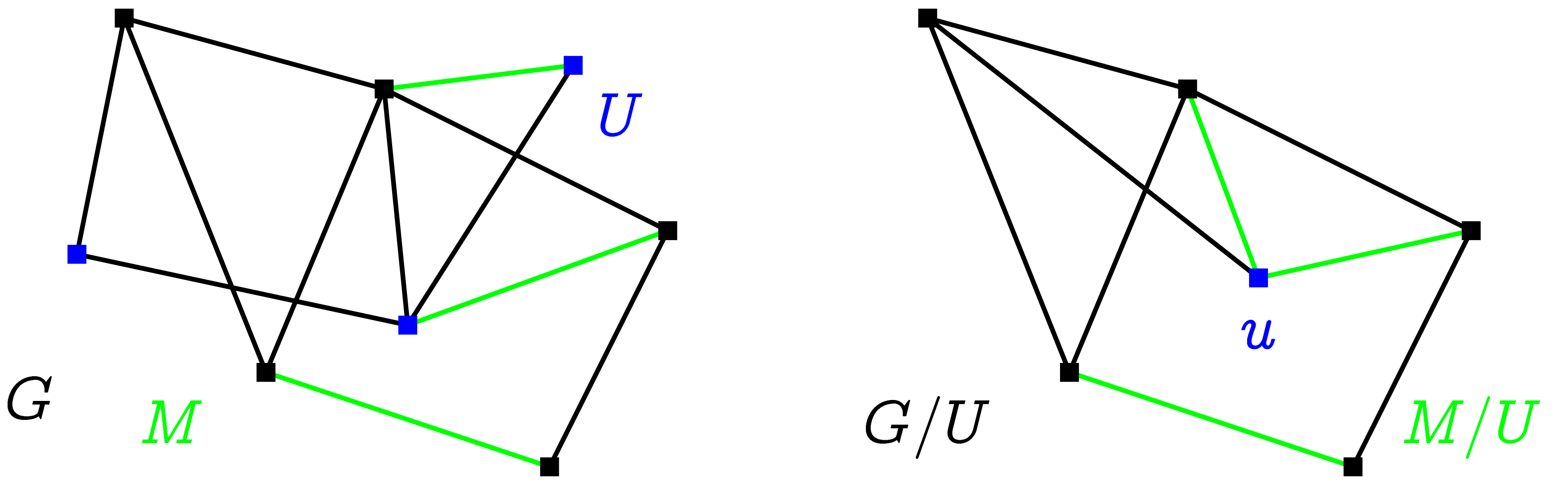
Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf ja olgu $U \subseteq V$. Tipuhulga U *kokkutõmbamine* G-s annab lihtgraafi G/U, kus

- kõik U-sse kuuluvad tipud on kustutatud, nende asemel on graafi lisatud üks uus tipp u;
- u on ühendatud kõigi tippudega $N_G(U) \setminus U$-st.



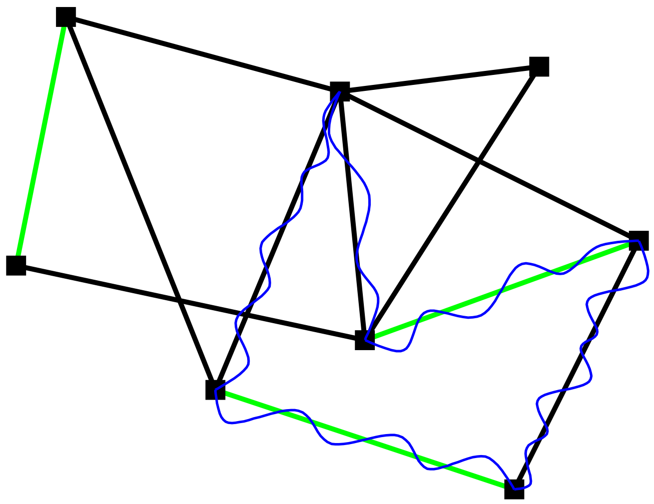
Defineerime veel:

- Kui $H \leqslant G$, siis $G/H = G/V(H)$.
- Kui $M \subseteq E(G)$ ja $U \subseteq V(G)$, siis M/U on graafi $(V(G), M)/U$ servade hulk.



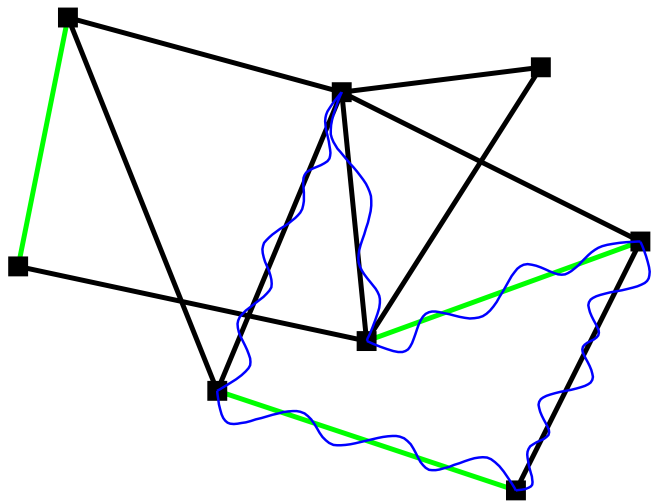
Olgu $G = (V, E)$ ja olgu M mingi kooskõla G-s. Tsükkel $C \subseteq G$ on *M-õis*, kui

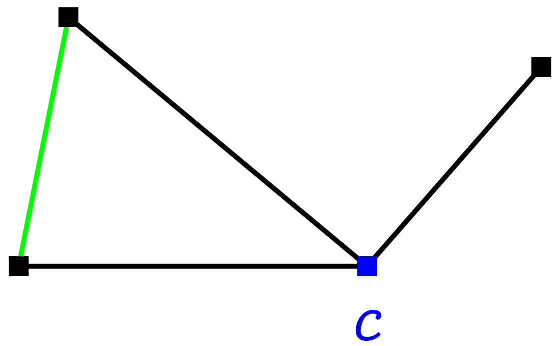
- $|C| = 2k + 1$ mingi $k \in \mathbb{N}$ jaoks;
- $|C \cap M| = k$.
- C sisaldab tippu, mida M ei kata.



Teoreem. Olgu $G = (V, E)$ ja olgu M mingi kooskõla G-s. Olgu C mingi M-õis. Siis M on maksimaalne kooskõla G-s parajasti siis, kui M/C on maksimaalne kooskõla G/C-s.

Tõestus. Olgu $c \in V(G/C)$ tipp, milleks C kokku tõmmati. Paneme tähele, et kui C on M-õis, siis M/C ei kata c-d, sest ükski M-i kuuluv serv pole C-sse kuuluva ja mittekuuluva tipu vahel.

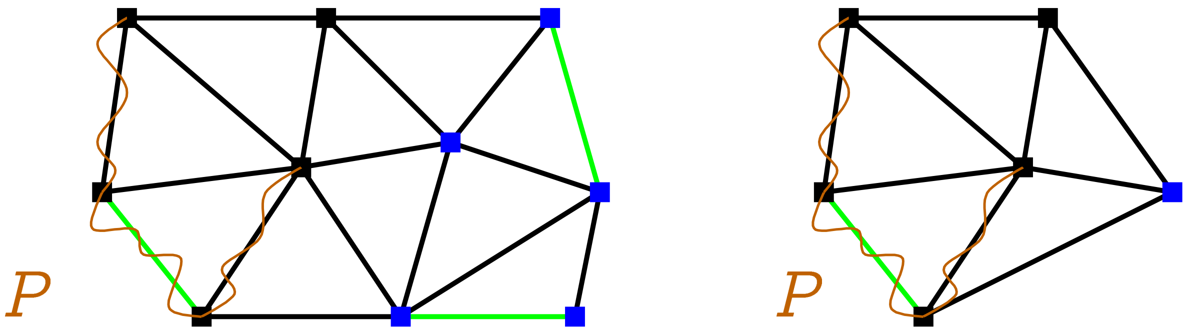




Tõestame pöördvastandteoreemi.

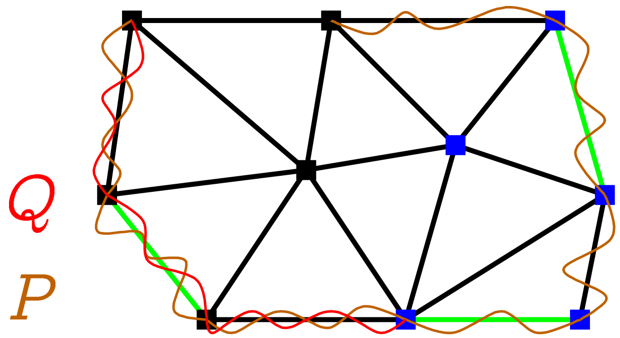
M **pole maksimaalne** $\Rightarrow$ M/C **pole maksimaalne.**

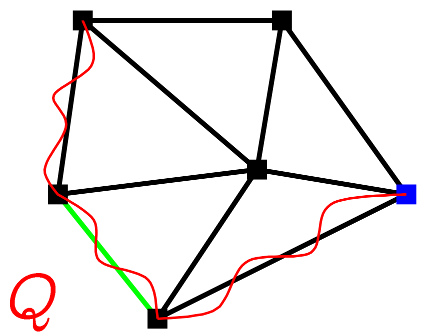
Olgu P M-laienev tee graafis G. Kui P ei sisalda C tippe, siis on ta ka M/C-laienev tee G/C-s.



Kui P sisaldab C tippe, siis vähemalt üks tema otstippudest ei kuulu C-sse (sest C-s on üksainus M-i poolt katmata tipp).

Olgu Q P alamahel tema C-s mitteolevast otstipust kuni esimese C-s oleva tipuni. Siis Q on M/C-laienev G/C-s.

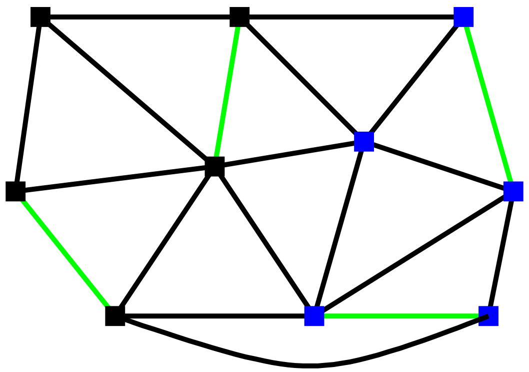


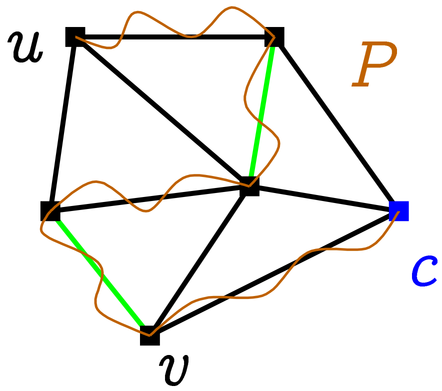


M/C pole maksimaalne $\Rightarrow$ M pole maksimaalne.

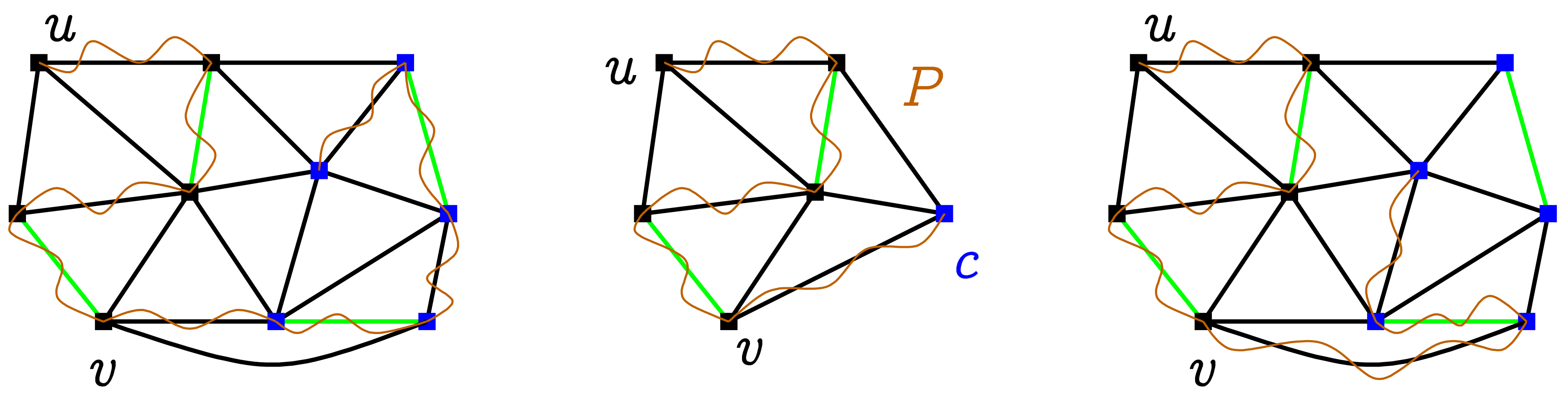
Olgu P M/C-lainenev tee graafis G/C. Kui ta ei sisalda tippu c (milleks C kokku tõmmati), siis on ta ka M-laienev G-s.

Kui P sisaldab c-d, siis on c üks tema otstippudest. Olgu v tipu c naabertipp P-l ja olgu u P teine otstipp.





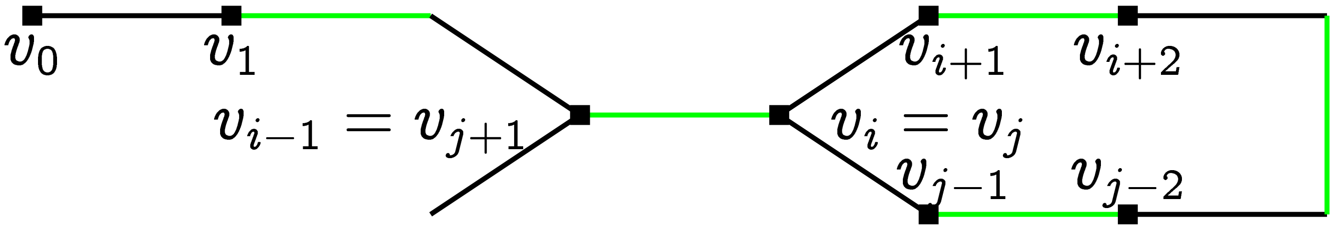
M-laieneva tee graafis G saame, liikudes tipust u mööda teed P tippu v, sealt mõnele tsüklis C asuvale tipule ja edasi mööda tsüklit M-i poolt katmata tipuni. $\square$



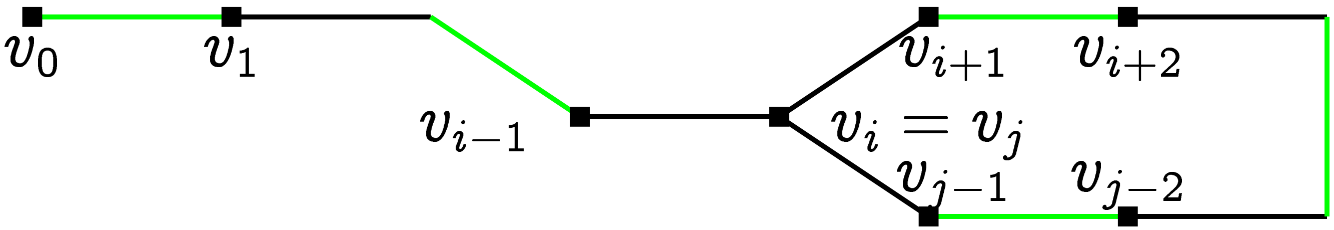
Algoritm kooskõla M graafis G suurendamiseks ühe serva võrra (kui M pole veel maksimaalne):

1. Leia lühim M-vahelduv MTL tee P W-st W-sse.
   - Leia lühim suunatud tee W-st $N(W)$-sse graafis $\overrightarrow{G_M}$.
     – See leitakse $\overrightarrow{G_M}$-i laiuti läbides.
2. Kui sellist P-d ei leidunud, siis ei leidu ka M-laienevaid teid. Tagasta „M on maksimaalne“.
3. Kui P on lihtne, siis on ta M-laienev tee. Tagasta $M \triangle E(P)$.
   - $\triangle$ — sümmeetriline vahe.

4. Kui $P = v_0 — v_1 — \cdots — v_m$ pole lihtne, siis olgu j vähim selline, et leidub $i < j$ nii, et $v_i = v_j$.



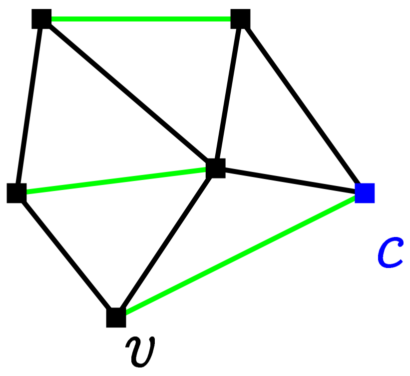
5. Olgu $M := M \triangle \{v_0 — v_1, v_1 — v_2, \ldots, v_{i-1} — v_i\}$.

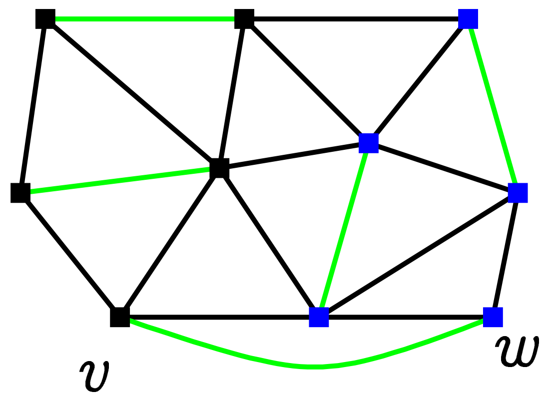


Siis M on ikka kooskõla (suurenes ainult $\deg_M(v_0)$, mis ennem oli 0) ja $C = v_i — v_{i+1} — \cdots — v_j$ on M-õis.

6. Kutsu algoritm rekursiivselt välja M/C ja G/C jaoks.
7. Kui M/C oli maksimaalne, tagasta „M on maksimaalne“.
8. Kui tagastati kooskõla N, siis
   - Kui N ei kata tippu c, milleks C kokku tõmmati, siis tagasta $(N \cap E(G \backslash C)) \cup (M \cap E(C))$.

- Kui N katab tippu c, siis olgu v tipu c paariline N järgi ning $w \in V(C)$ mingi tipu v naabertipp graafis G. Tagasta $(N \cap E(G \backslash C)) \cup \{v — w\} \cup M_C^w$, kus M_C^w on maksimaalne kooskõla C-l, mis w katmata jätab.

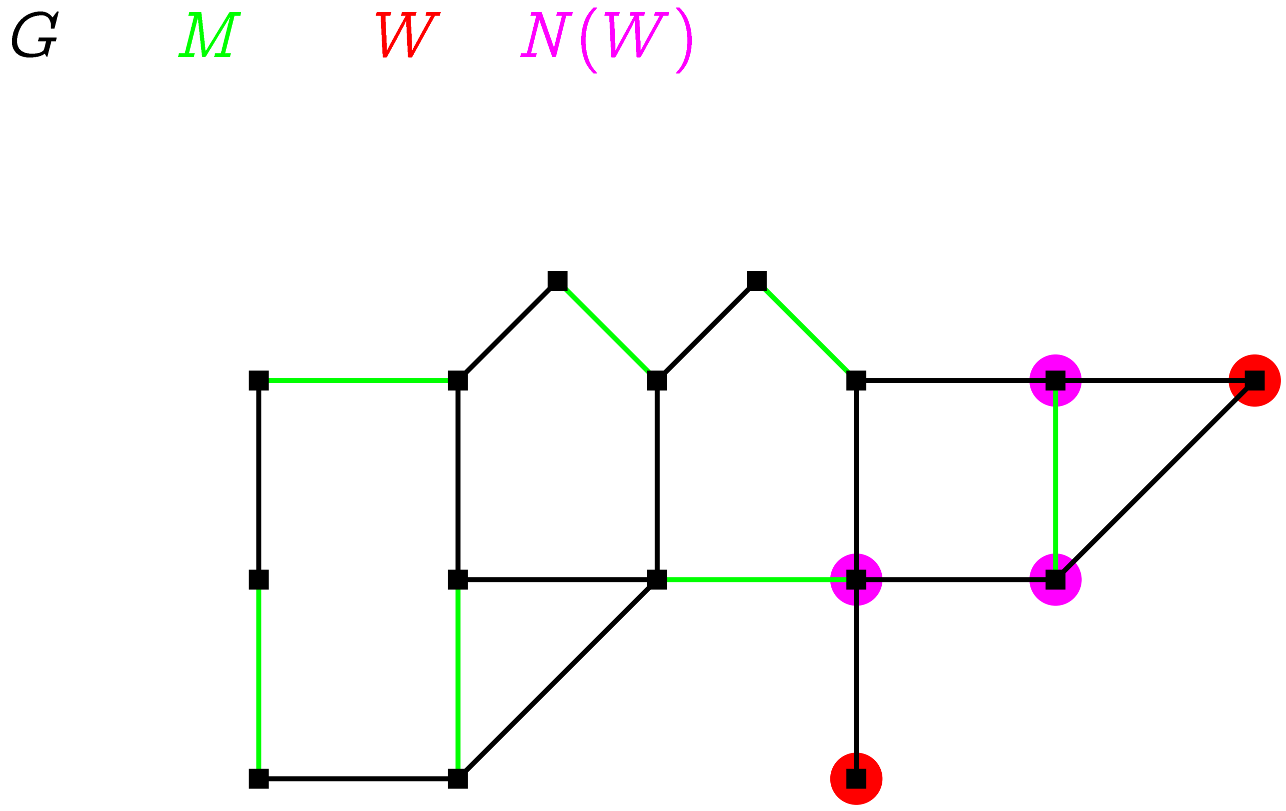




Keerukus:

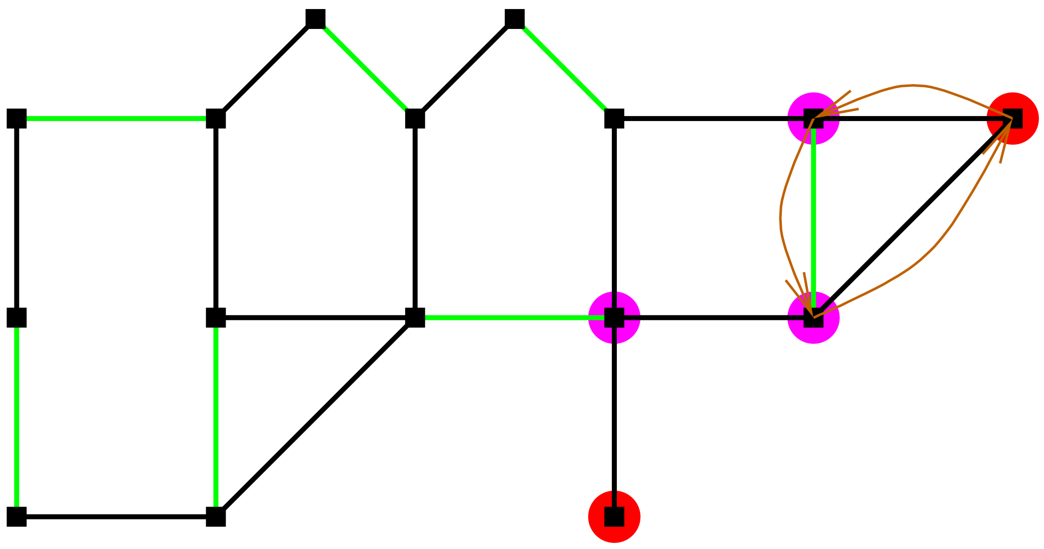
- Maksimaalse kooskõla leidmiseks tuleb eelnevat algoritmi välja kutsuda kuni $|V|/2$ korda.
- Ühel väljakutsel:
  - Tee P on leitav ajas $O(|E|)$. Samuti on M-i parandamine tehtav ajas $O(|E|)$.
  - Rekursiooni sügavus on $O(|V|)$.

  Kokku kulub aega $O(|V| \cdot |E|)$.
- Maksimaalne kooskõla on leitav ajas $O(|V|^2 \cdot |E|)$.


G
M
W
N(W)

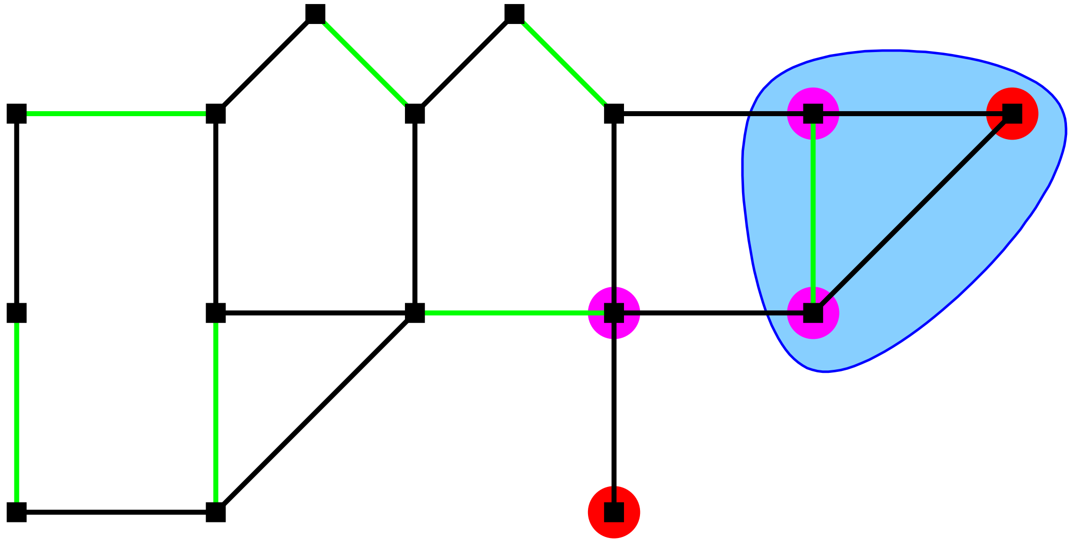
G $\quad$ M $\quad$ W $\quad$ $N(W)$

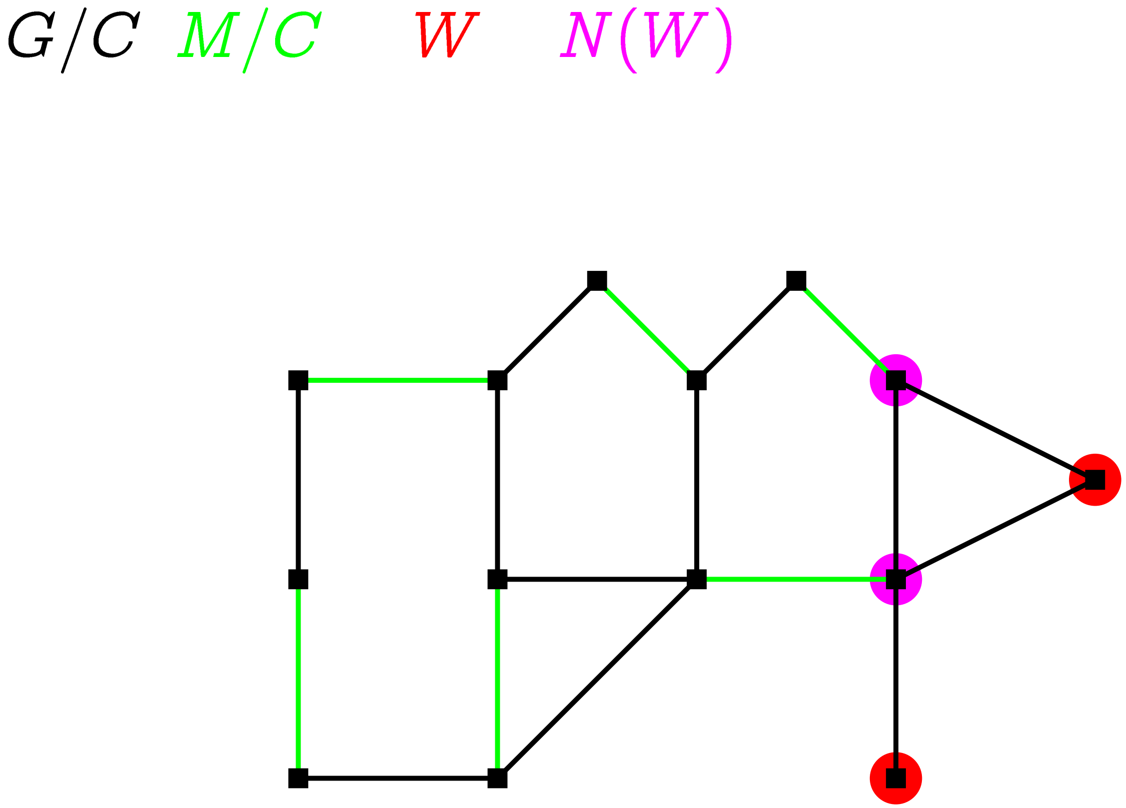
Lühim M-laienev MTL tee



G M W $N(W)$

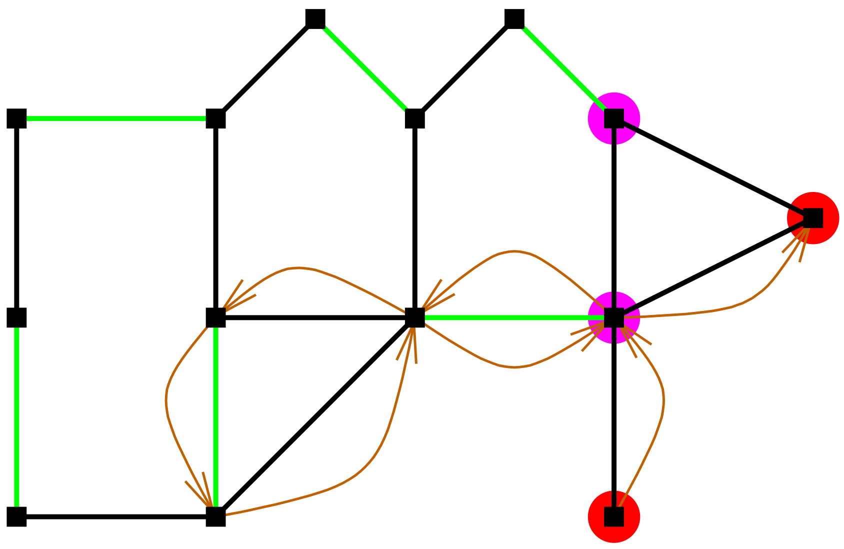
M-õis




G/C
M/C
W
$N(W)$

G $\quad M \quad W \quad N(W)$

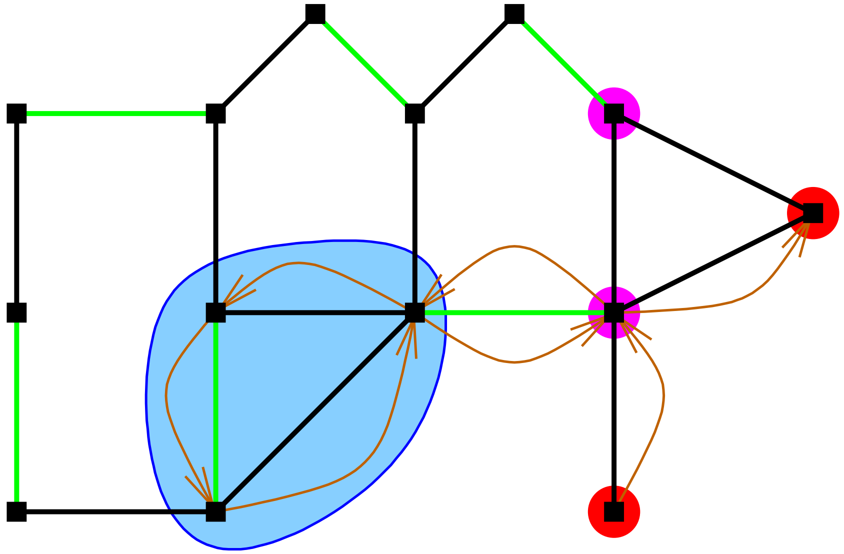
Lühim M-laienev MTL tee



G M W $N(W)$

Lühim M-laienev MTL tee

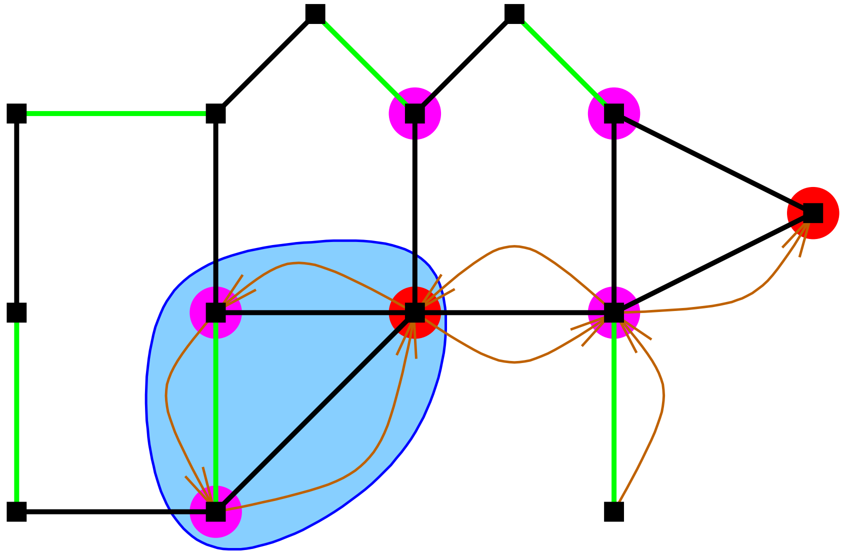
tsükkel M-laieneval teel



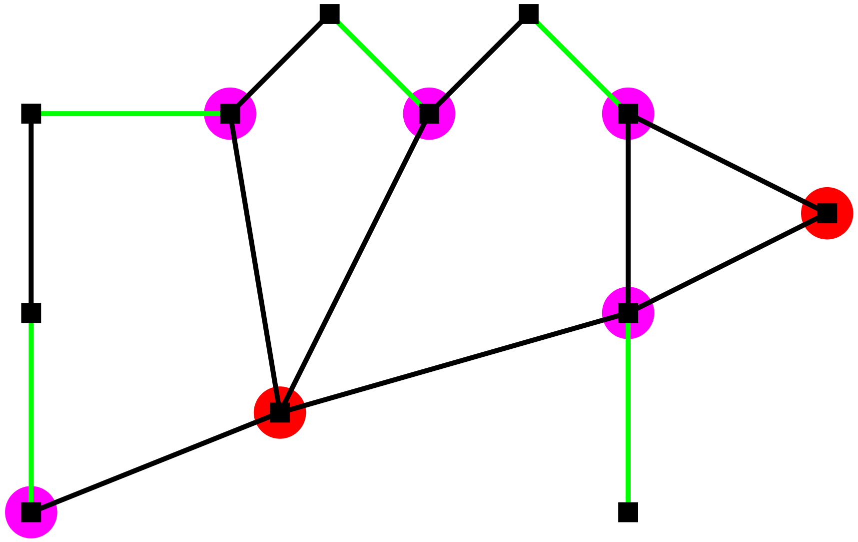
G M W $N(W)$

Lühim M-laienev MTL tee

M-õis

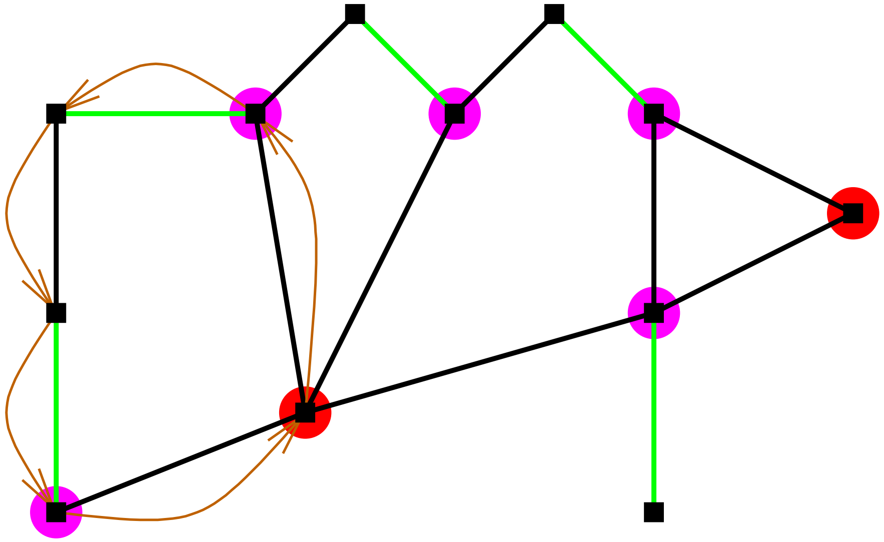


G/C M/C W $N(W)$



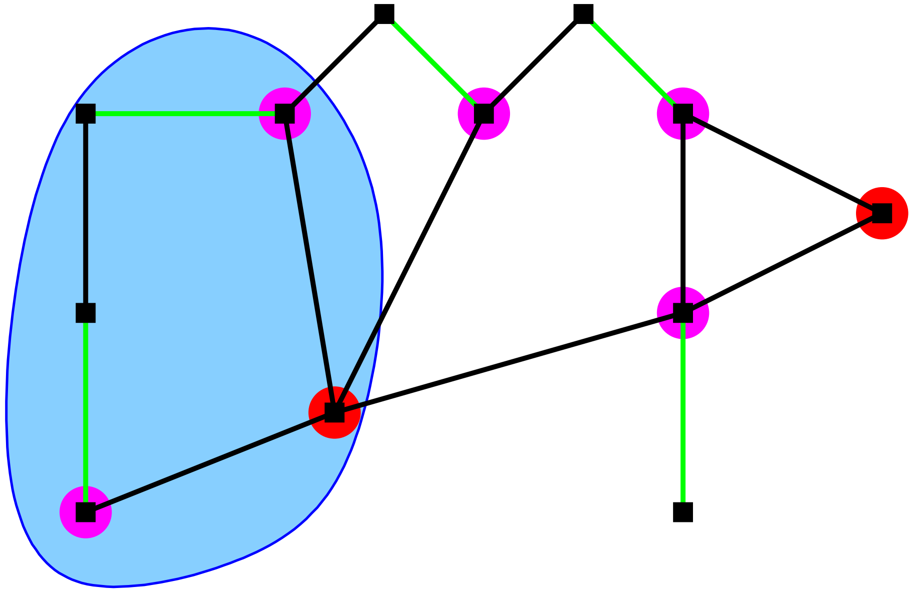
G M W $N(W)$

Lühim M-laienev MTL tee

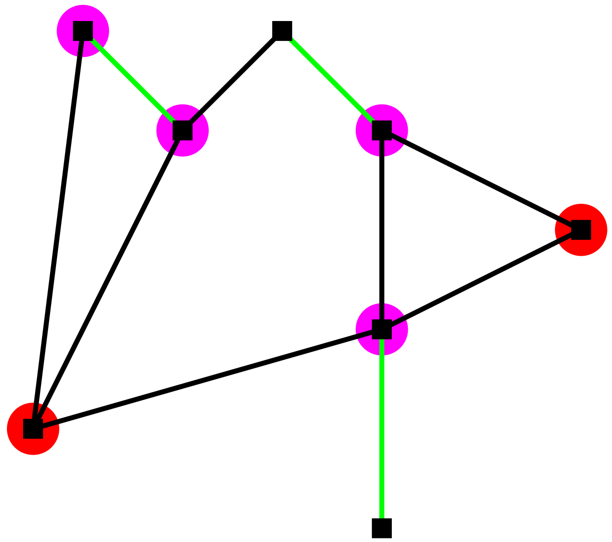


G M W $N(W)$

M-õis

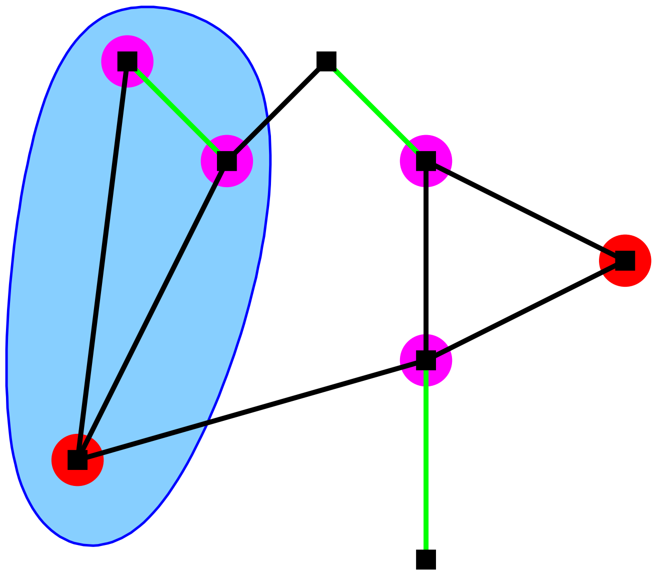


G/C M/C W $N(W)$

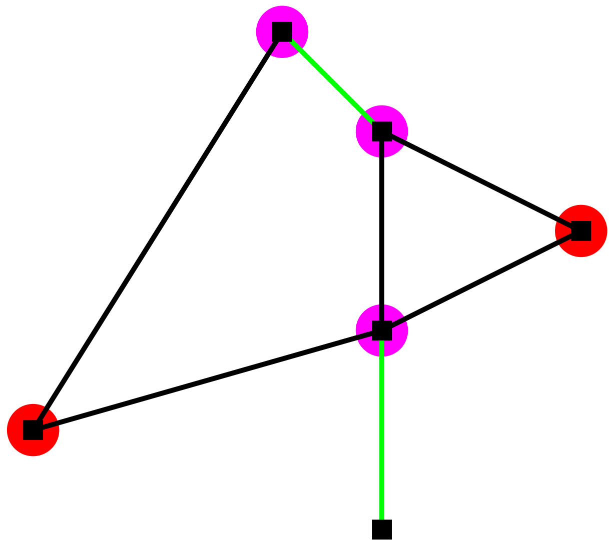


G M W $N(W)$

M-õis

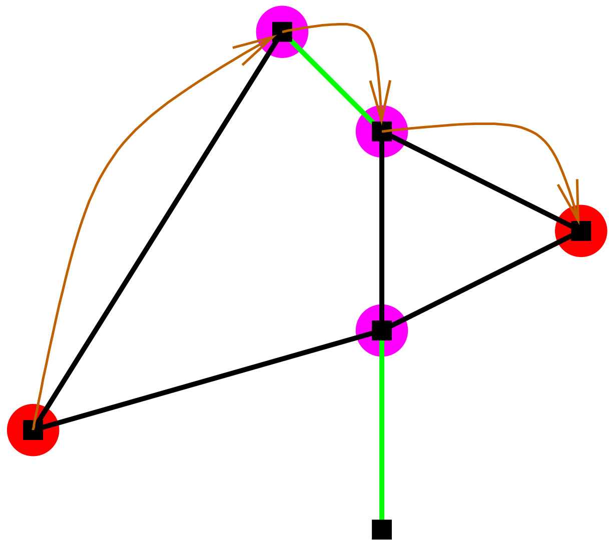


G/C M/C W $N(W)$

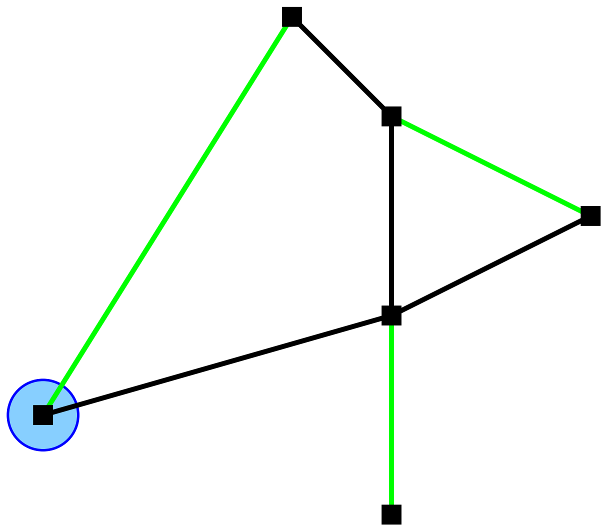


G M W $N(W)$

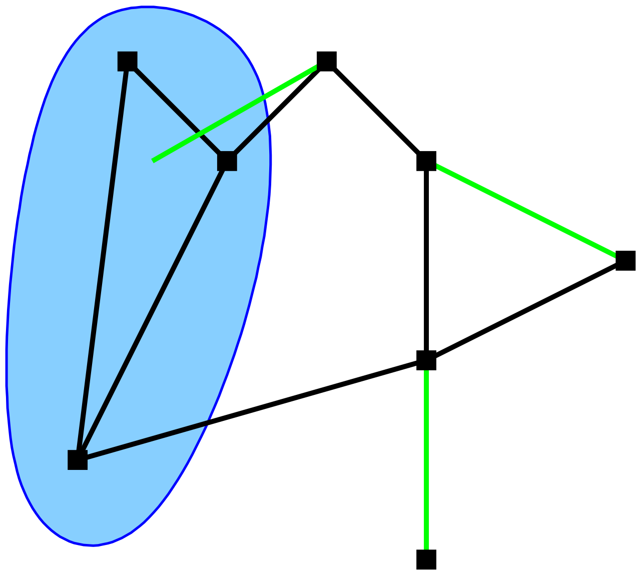
Lühim M-laienev tee



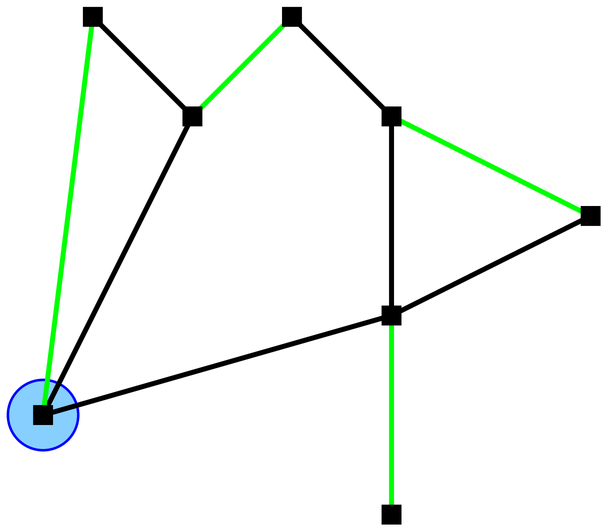
G M



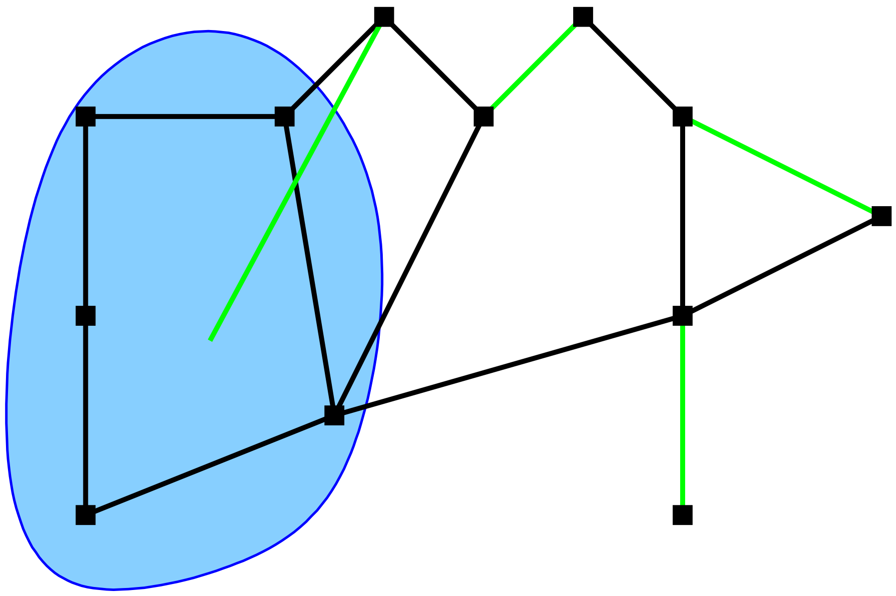
G M



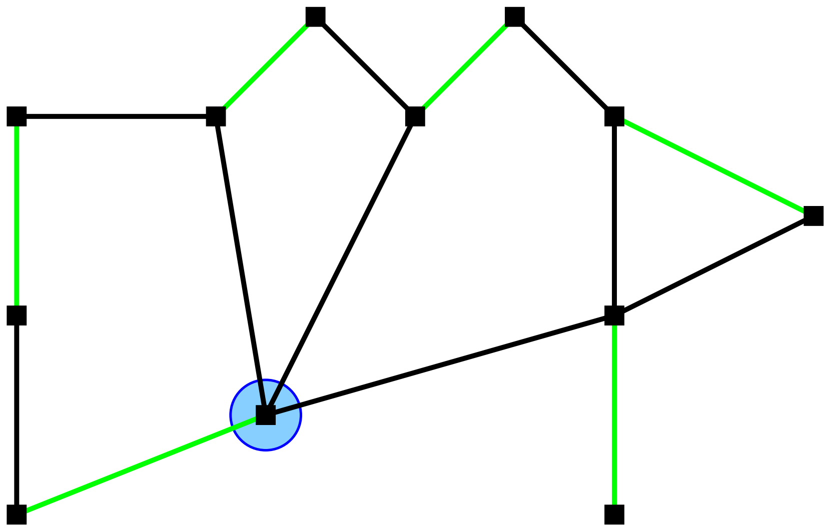
G M

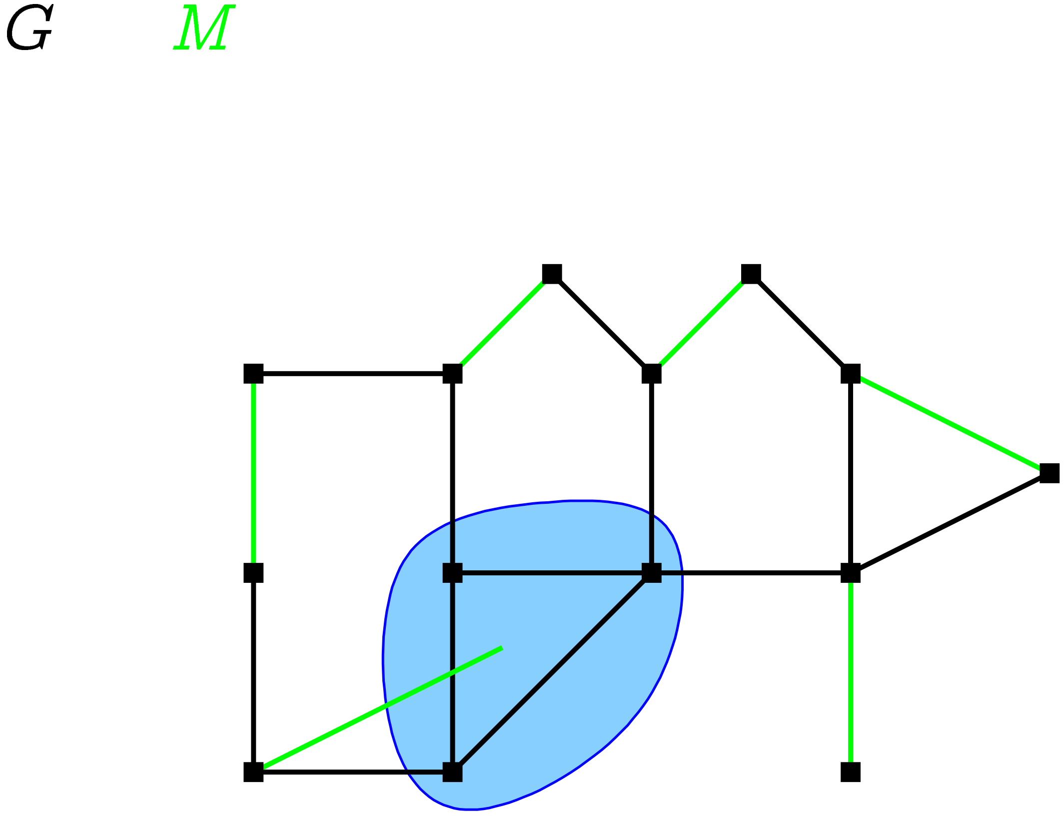


G M

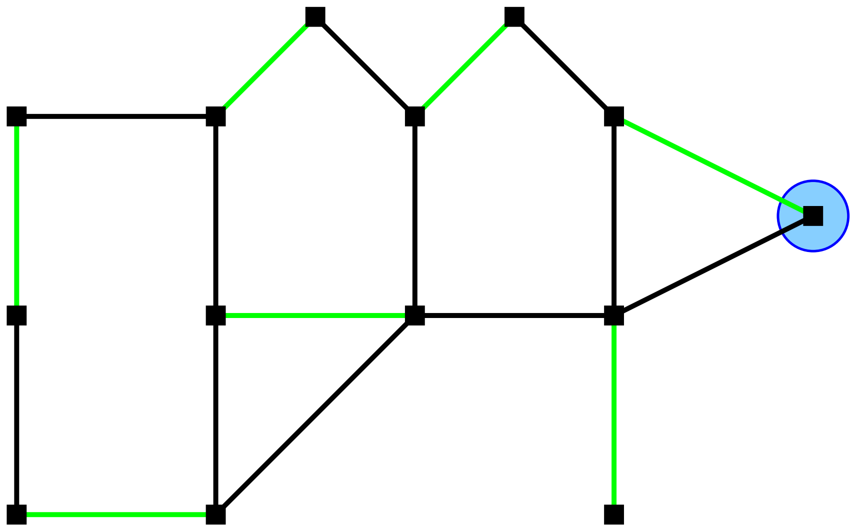


G M

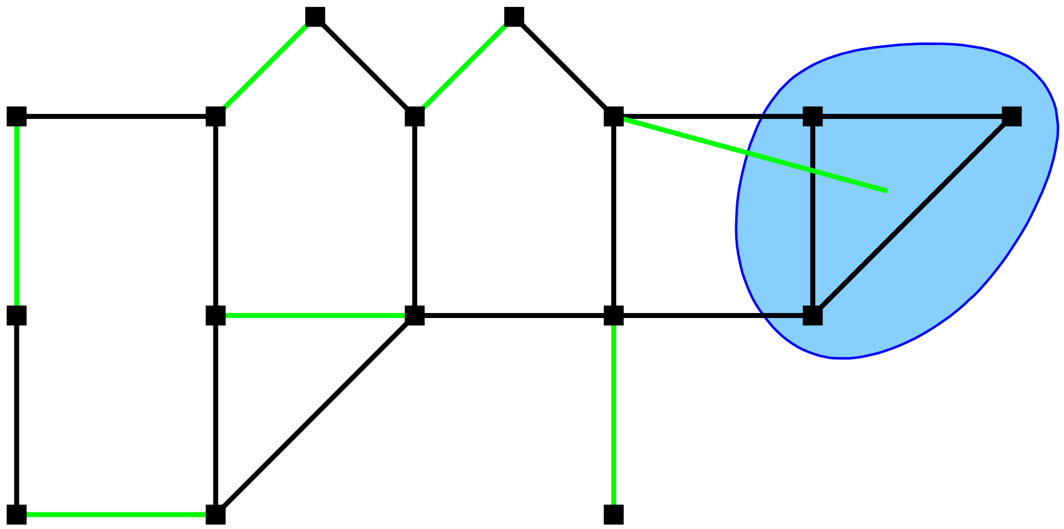


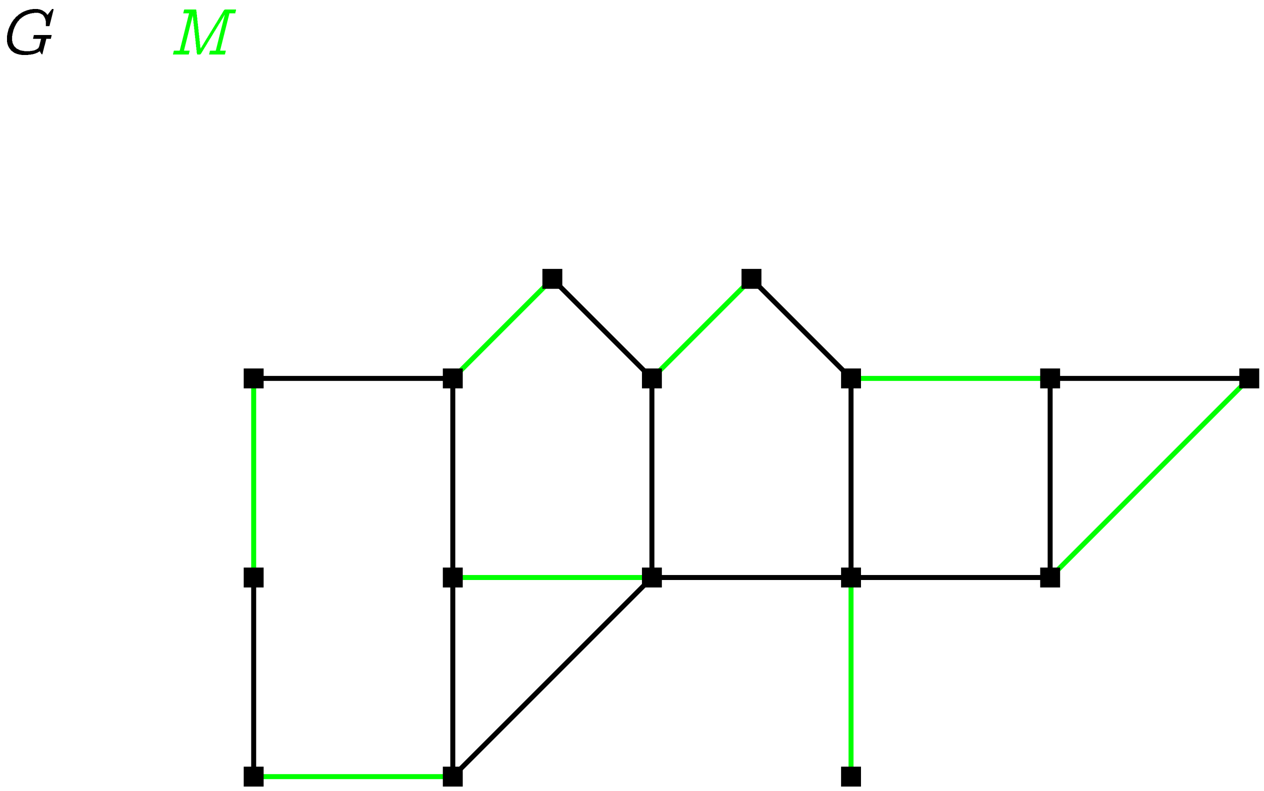

G
M

G M



G M




G
M

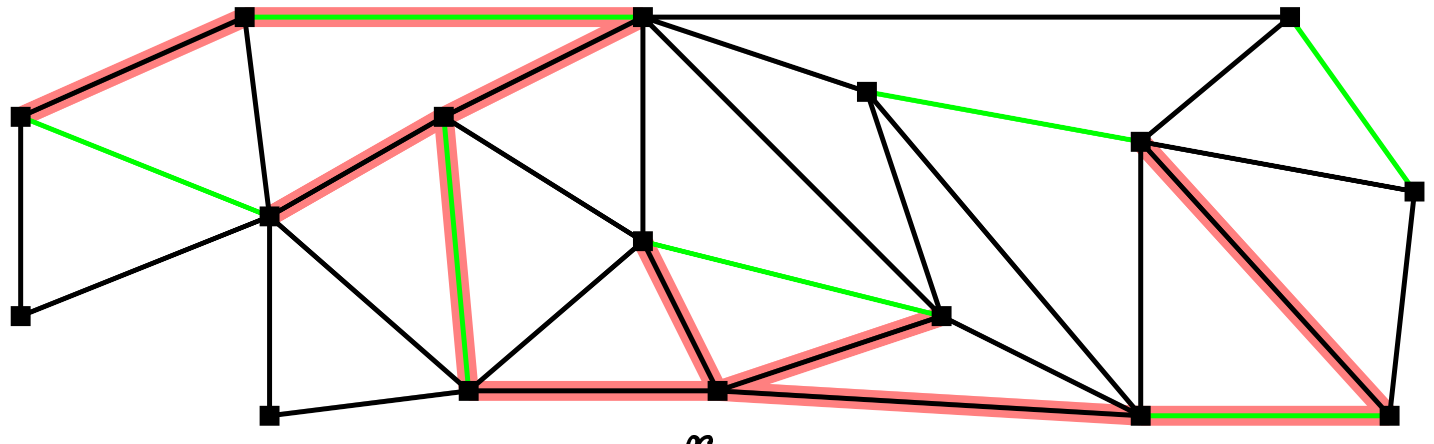
Vaatame nüüd järgmist ülesannet:

Antud graaf $G = (V, E)$ ja servade kaalud $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Leida selline täielik kooskõla M, et $\sum_{e \in M} w(e)$ oleks minimaalne võimalik.

Eeldame, et G-s leidub täielik kooskõla.

Eeldame, et iga $e \in E$ jaoks $w(e) \geqslant 0$. Kui nii ei ole, siis liidame kõigi servade kaaludele mingi küllalt suure konstandi c. Sellega suurenevad kõigi täielike kooskõlade kaalud $c|V|/2$ võrra, s.t. minimaalse kaaluga täielikud kooskõlad jäävad samaks.

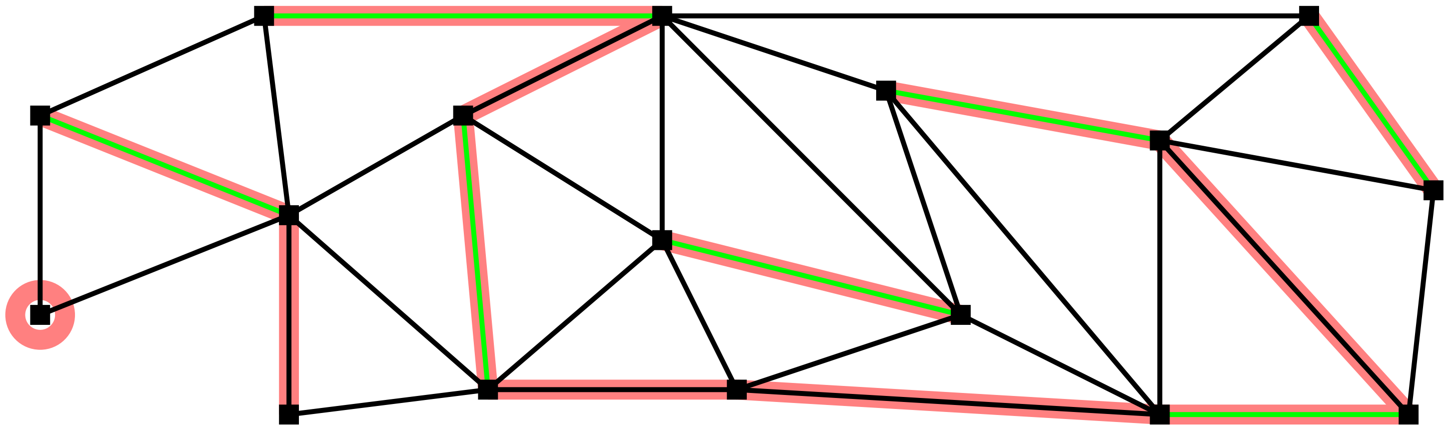
Olgu $G = (V, E)$ ja M kooskõla G-l. Siis $T \leqslant G$ on *M-laienev puu*, kui T on juurega puu, mille juurt r_T M ei kata (aga kõiki teisi tippe katab), ja kõik juurest algavad lihtahelad T-s on M-vahelduvad.



Olgu

- $V^+(T) = \{v \in V(T) \mid d(r_T, v) \text{ on paaris}\}$;
- $V^-(T) = \{v \in V(T) \mid d(r_T, v) \text{ on paaritu}\}$;

$F \leqslant G$ on *M-laienev mets*, kui $V(F) = V$, $M \subseteq E(F)$ ja F-i iga sidususkomponent on kas M-laienev puu või M-i kuuluv serv.



$V^+(F)$ ja $V^-(F)$ olgu F-i kuuluvate M-laienevate puude T vastavate hulkade ühendid.

Kui M ei kata v-d, siis $v \in V^+(F)$.

Tähistame:

- $\wp(X)$ on hulga X kõigi alamhulkade hulk.
- Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf. Kui $U \subseteq V$, siis olgu $\delta(U) \subseteq E$ nende servade hulk, mille üks otstipp on U-s ja teine $V \setminus U$-s.

Algoritm kasutab abistruktuurina paari (Ω, π), kus $\Omega \subseteq \wp(V)$ ja $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Nad rahuldavad järgmisi omadusi:

- Ω on alamhulkade *pesastatud* hulk.
- Ω kõik elemendid on paarituarvulise võimsusega.
- Kui $U \in \Omega$ ja $|U| \geqslant 3$, siis $\pi(U) \geqslant 0$.
- Iga $e \in E$ jaoks $\sum\limits_{\substack{U \in \Omega \\ e \in \delta(U)}} \pi(U) \leqslant w(e)$.

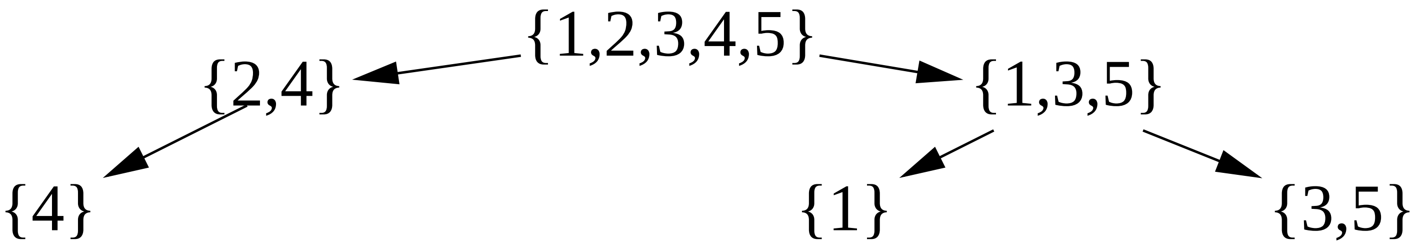
Hulk $\Xi \subseteq \wp(X)$ on *pesastatud*, kui iga $Y, Z \in \Xi$ jaoks kas $Y \subseteq Z$, $Z \subseteq Y$ või $Y \cap Z = \emptyset$.

Näide: Kui $X = \{1, \ldots, 5\}$, siis $\big\{\{1\}, \{4\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\big\}$ on pesastatud hulk.

Lause. Kui $\Xi \subseteq \wp(X)$ on pesastatud ja $\emptyset \notin \Xi$, siis $|\Xi| \leqslant 2|X| - 1$.

Tõestus. Vaatame graafi T_Ξ, mille tippudeks on Ξ elemendid ning milles on kaar $Y \to Z$ parajasti siis, kui $Y \supset Z$ ning ei leidu sellist elementi $W \in \Xi$, et $Y \supset W \supset Z$.

<u>Näide:</u>



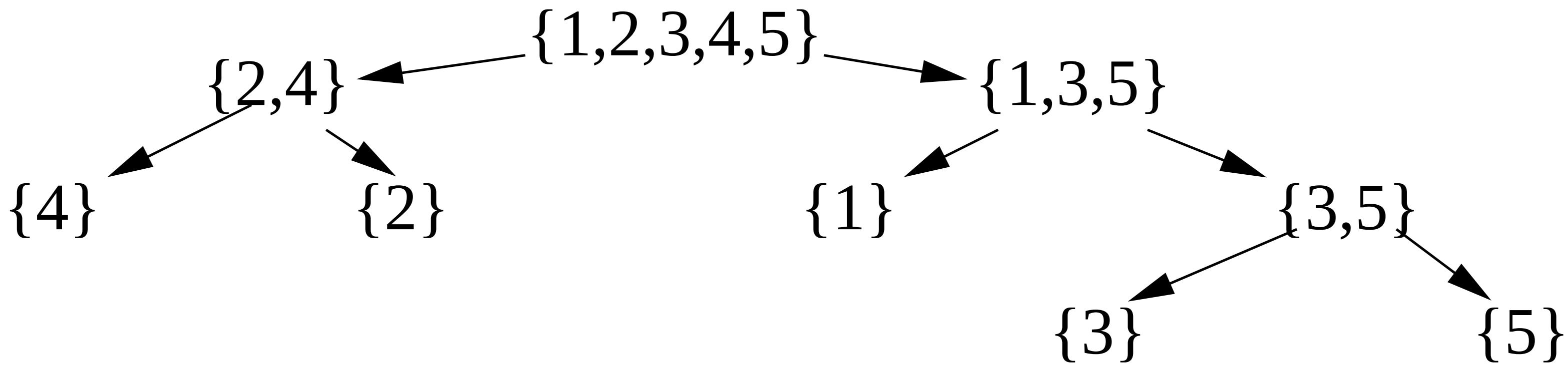
Siis T_Ξ on mets, tema igal sidususkomponendil on juur — suurim element selles komponendis.

Täiendame hulka Ξ (ja ka metsa T_Ξ) järgmiselt:

- Lisame elemendi X hulka Ξ (kui seda seal veel ei ole). Siis T_Ξ-st saab puu juurega X.
- Iga $x \in X$ jaoks lisame $\{x\}$ hulka Ξ. Neist saavad puu T_Ξ lehed.
- Seni kuni mingil elemendil $Y \in \Xi$ on puus T_Ξ vähemalt kolm alluvat $Z_1, \ldots, Z_k$, lisame Ξ-sse elemendi $Z_1 \cap Z_2$.

Need täiendused ei muuda Ξ-d mittepesastatuks.

Näide:



Nüüd on T_Ξ-s $|X|$ lehte ja iga sisemise tipu aste on 2. Kokku on tippe seega $2|X| - 1$. $\square$

Algoritm kasutab hulka Ω, et meeles pidada, millised tsüklid on kokku tõmmatud.

Suvalise täieliku kooskõla $M \subseteq E$ jaoks kehtib

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \geqslant \sum_{e \in M} \sum_{\substack{U \in \Omega \\ e \in \delta(U)}} \pi(U) = \sum_{U \in \Omega} \sum_{\substack{e \in M \\ e \in \delta(U)}} \pi(U) = \sum_{U \in \Omega} \pi(U) \sum_{\substack{e \in M \\ e \in \delta(U)}} 1 = \sum_{U \in \Omega} \pi(U) \cdot |M \cap \delta(U)| \geqslant \sum_{U \in \Omega} \pi(U) \ .$$

Seega kui Ω, π ja M on sellised, et

- iga $e \in M$ jaoks $w(e) = \sum_{\substack{U \in \Omega \\ e \in \delta(U)}} \pi(U)$;
- iga $U \in \Omega$ jaoks $|M \cap \delta(U)| = 1$;

siis $w(M) = \sum_{U \in \Omega} \pi(U)$ ja seega M on minimaalse kaaluga täielik kooskõla.

Tähistame: $w_\pi(e) = \sum_{\substack{U \in \Omega \\ e \in \delta(U)}} \pi(U)$.

Algoritm peab töö käigus meeles ka senini leitud kooskõla M. Sinna kooskõlla võtab ta ainult selliseid servi e, mille jaoks $w(e) = w_\pi(e)$.

Kui $U \in \Omega$, siis olgu $\Omega[U] = \{U' \in \Omega \,|\, U' \subset U\}$.

G/Ω tähistagu graafi G, kus Ω kõik maksimaalsed elemendid on kokku tõmmatud.

Ω elemendid vastavad tsüklitele — kui $U \in \Omega$ ja $|U| \geqslant 3$, siis graafis $G[U]/\Omega[U]$ leidub Hamiltoni tsükkel sellistest servadest e, kus $w(e) = w_\pi(e)$.
(algoritm rahuldab sellist invarianti)

Min. hinnaga täieliku kooskõla leidmise algoritm on iteratiivne. Tema olek koosneb järgmistest osadest:

- Ω;
  - iga $U \in \Omega$ jaoks, kus $|U| \geqslant 3$: eelmisel slaidil mainitud Hamiltoni tsükkel
- π, need rahuldavad eeltoodud omadusi;
- M — mingi kooskõla graafil G/Ω;
- F — mingi M-laienev mets graafil G/Ω
  - M ja F kasutavad ainult selliseid servi e, kus $w(e) = w_\pi(e)$.

Algseis:

- $\Omega = \big\{\{v\} \,|\, v \in V\big\}$;
- $\pi(\{v\}) = 0$ iga $v \in V$ jaoks;
- $F = \emptyset$ (F kui servade hulk);
- $M = \emptyset$.

Itereerime seni, kuni M pole täielik kooskõla G/Ω-l.

Iteratsioon:...

Iga $e \in E$ jaoks olgu

- $\varepsilon_e = w(e) - w_\pi(e)$, kui e üks otstipp (graafis G/Ω) on $V^+(F)$-s ja teine väljaspool $V^+(F) \cup V^-(F)$-i;
- $\varepsilon_e = (w(e) - w_\pi(e))/2$, kui e mõlemad otstipud on $V^+(F)$-s;
- $\varepsilon_e = \infty$ muudel juhtudel.

Leidub selline e, et $\varepsilon_e < \infty$, sest $|V^+(F)| > |V^-(F)|$ (nende vahe on võrdne tippude arvuga, mida M ei kata).

Olgu

$$\varepsilon = \min\Big(\min_{e \in E} \varepsilon_e, \min_{U \in \Omega \cap V^-(F), |U| \geqslant 3} \pi(U)\Big) \ .$$

Muudame π-d:

- Kui $U \in \Omega \cap V^+(F)$, siis $\pi(U) := \pi(U) + \varepsilon$.
- Kui $U \in \Omega \cap V^-(F)$, siis $\pi(U) := \pi(U) - \varepsilon$.

Kõik invariandid jäävad kehtima:

- $\pi(U) \geqslant 0$, kui $|U| \geqslant 3$;
- $w_\pi(e) \leqslant w(e)$;
- Hamiltoni tsükkel $G[U]/\Omega[U]$-s...

ε oli maksimaalne, mis π sellisel muutmisel need invariandid kehtima jättis.

Peab leiduma vähemalt üks järgmistest objektidest:

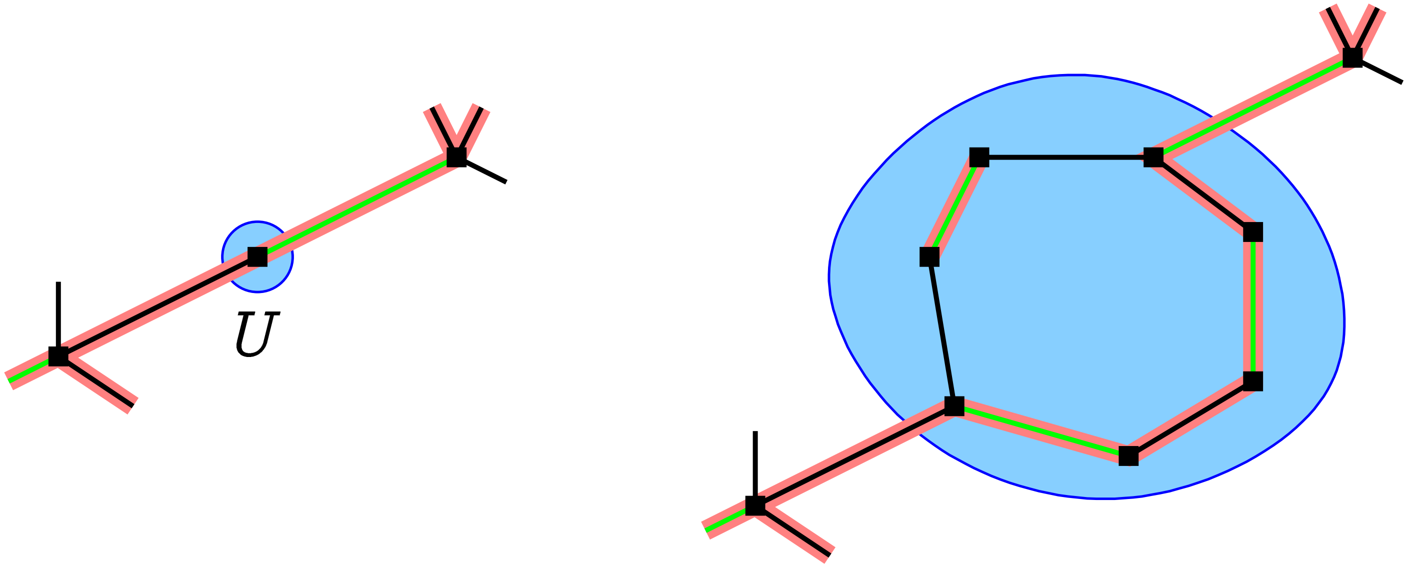
(i) $e \in E$, nii et $w_\pi(e) = w(e)$. Seejuures e mõni otstipp graafis G/Ω on $V^+(F)$-s ja kumbki pole $V^-(F)$-s.

(ii) $U \in \Omega \cap V^-(F)$, $|U| \geqslant 3$, $\pi(U)$=0.

Juht (i). Lisa e metsale F.

- Kui e üks otstipp kuulus $V^+(F)$-i ja teine ei kuulunud, siis F lihtsalt suurenes.
- Kui e mõlemad otstipud kuulusid $V^+(F)$-i, siis e lisamine ühendas F-i kaks M-laienevast puust sidususkomponenti või tekitas ühes komponendis tsükli.
  - Kui ühendati kaks sidususkomponenti, siis tekkis M-laienev tee P. Defineeri $M := M \triangle P$ ja $F := M$.
  - Kui tekkis tsükkel U, siis lisa U Ω-sse, defineeri $\pi(U) := 0$, $M := M/U$, $F := F/U$. Edasi töötame graafiga G/U.

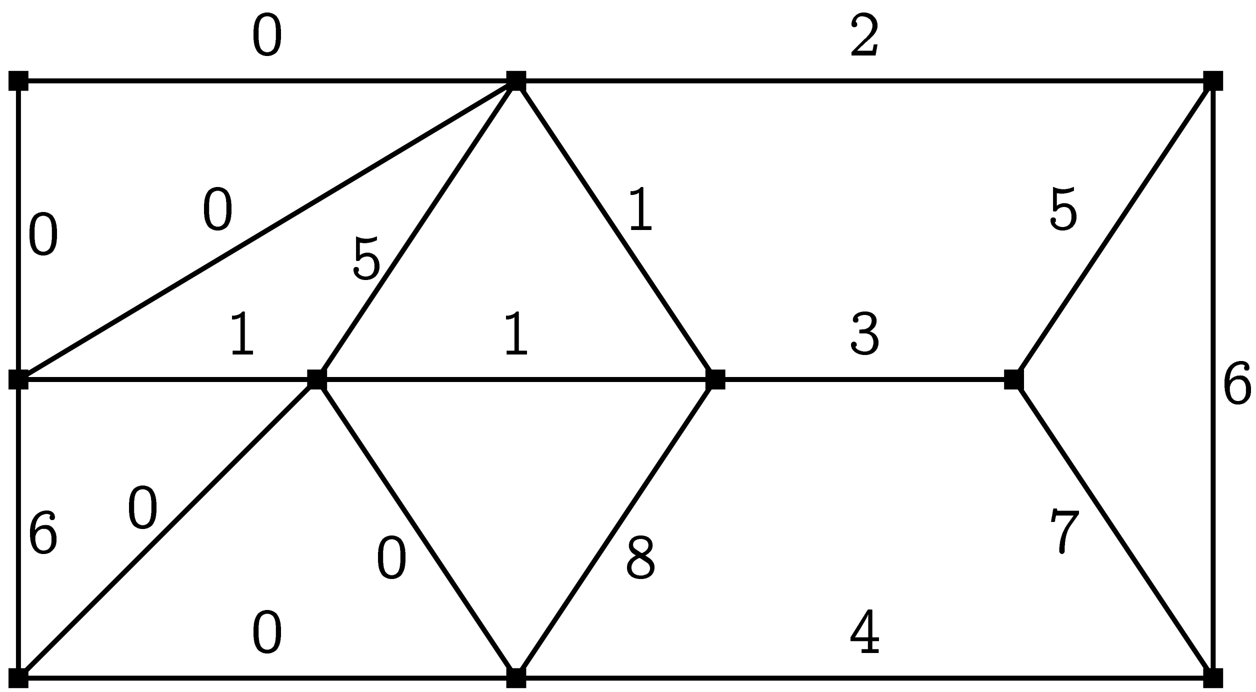
Juht (ii). Võta kokkutõmmatud tsükkel U tagasi lahti.

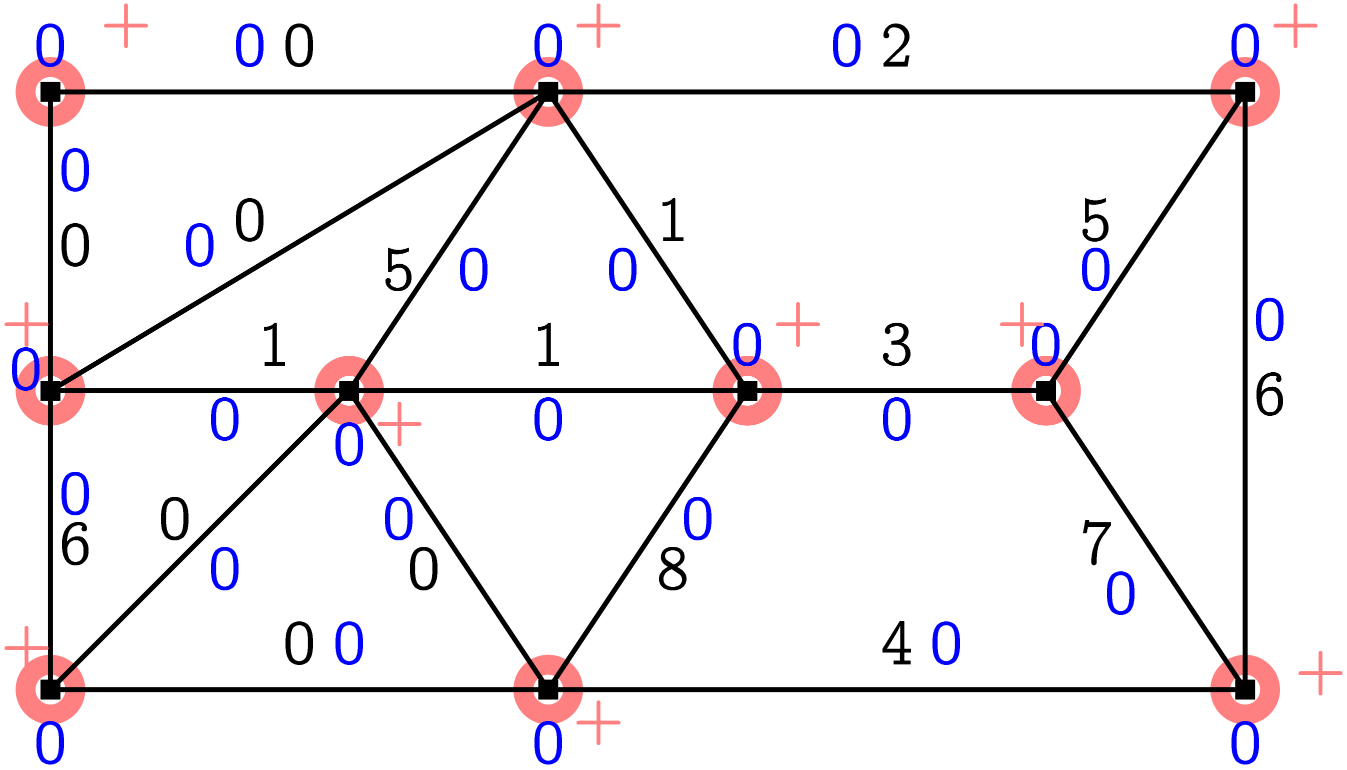


Eemalda U Ω-st, lisa M-i tsükli U servad nii, et kõik U tipud kaetud saaksid (kasutades servi e, kus $w(e) = w_\pi(e)$), lisa üks pool tsüklist F-i (nii, et $V^+(F)$ ja $V^-(F)$ väljaspool U-d ei muutuks), lisa tsükli teisest poolest F-i servad, mis kuuluvad M-i.

Kui oleme G/Ω-s jõudnud täieliku kooskõlani, siis võtame kokkutõmmatud tsüklid tagasi lahti.

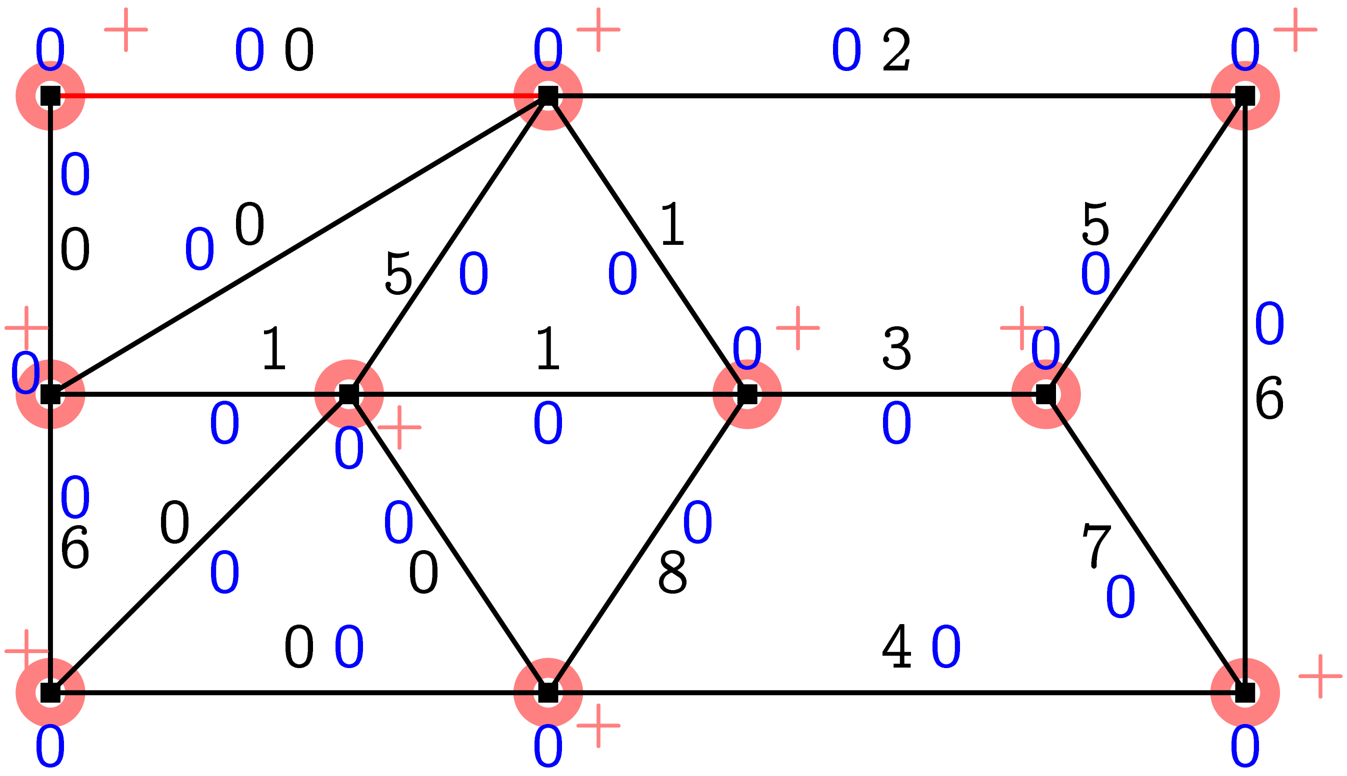
- Tsüklid leiame Ω-st.
- Alustame Ω suurematest elementidest.


0
2
0
0
5
1
5
1
1
3
6
6
0
0
8
7
0
4



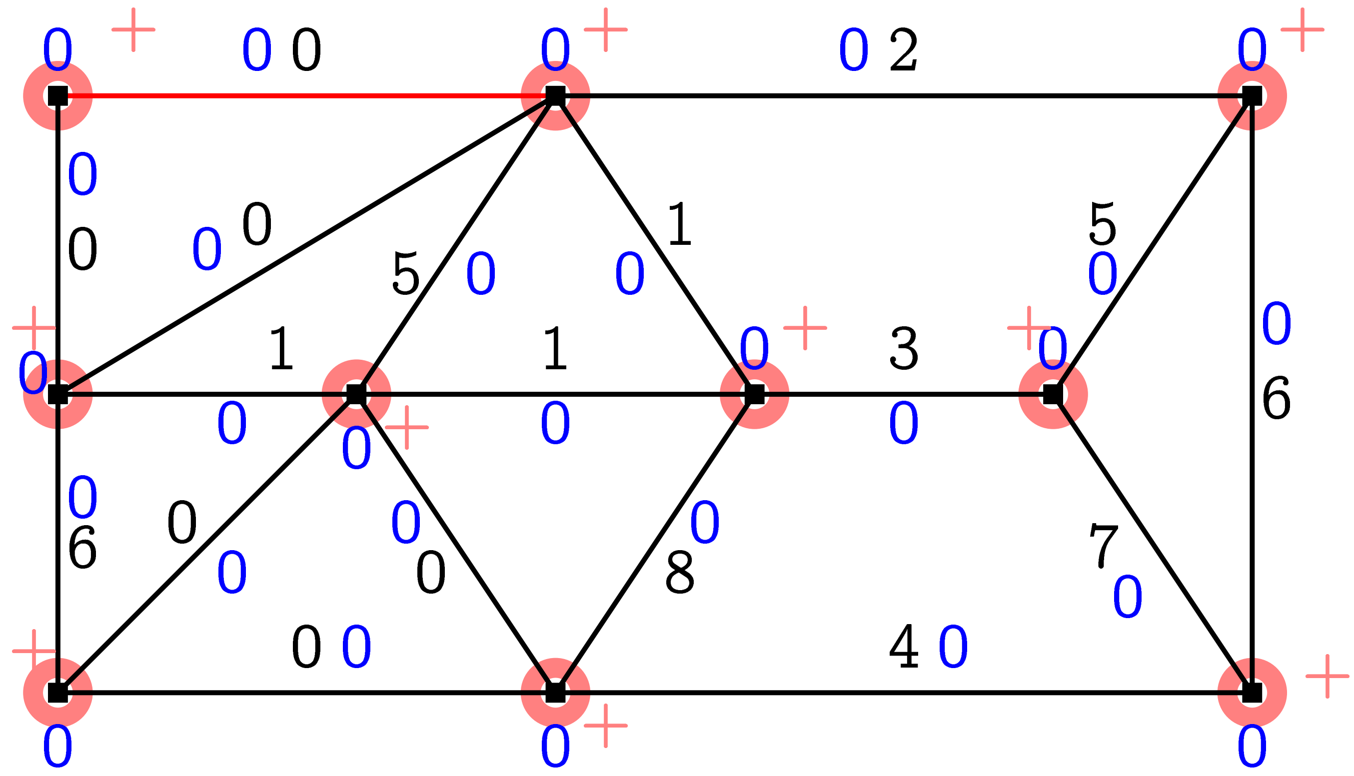
Ω π M F w w_π $V^?(F)$

Valime e või U

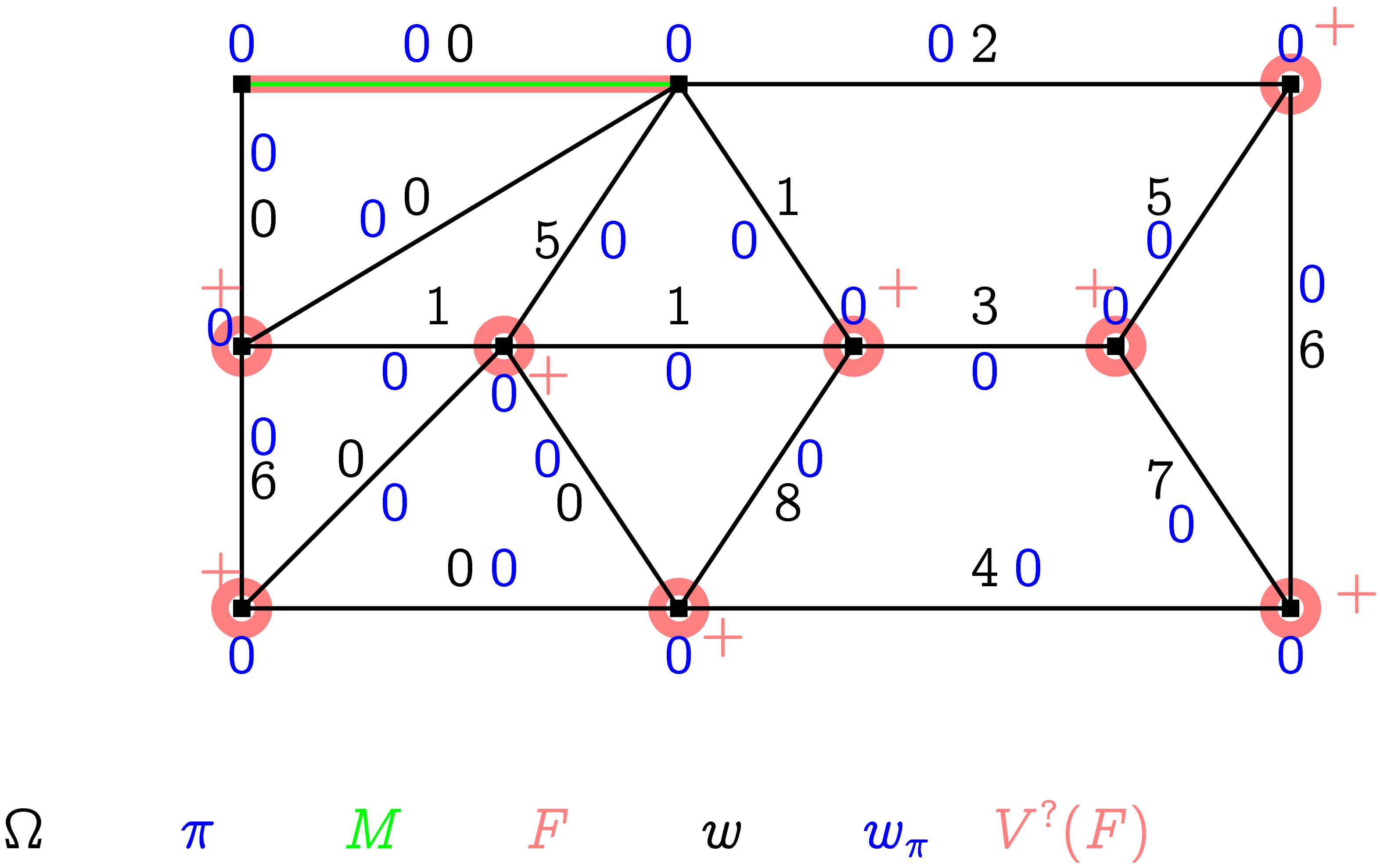


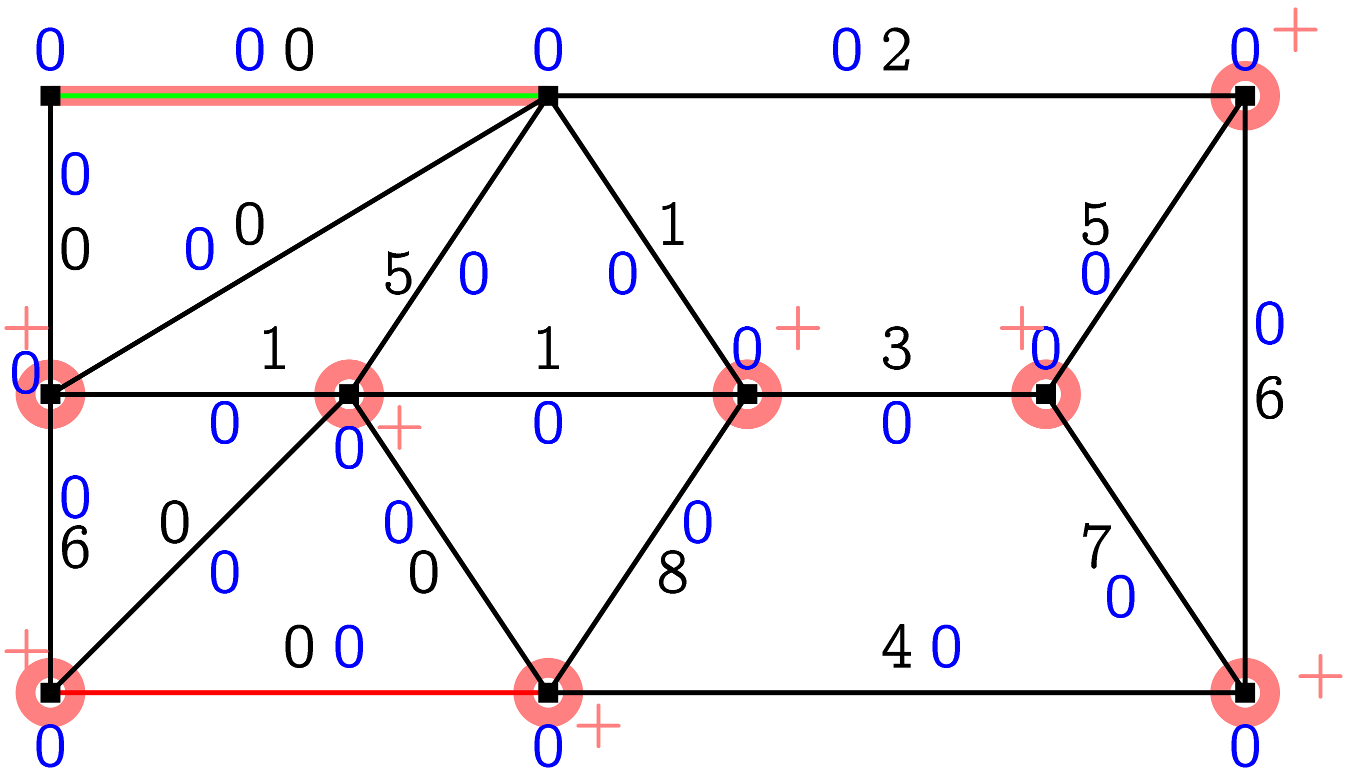
Ω π M F w w_π $V^?(F)$

Saame M-laieneva tee

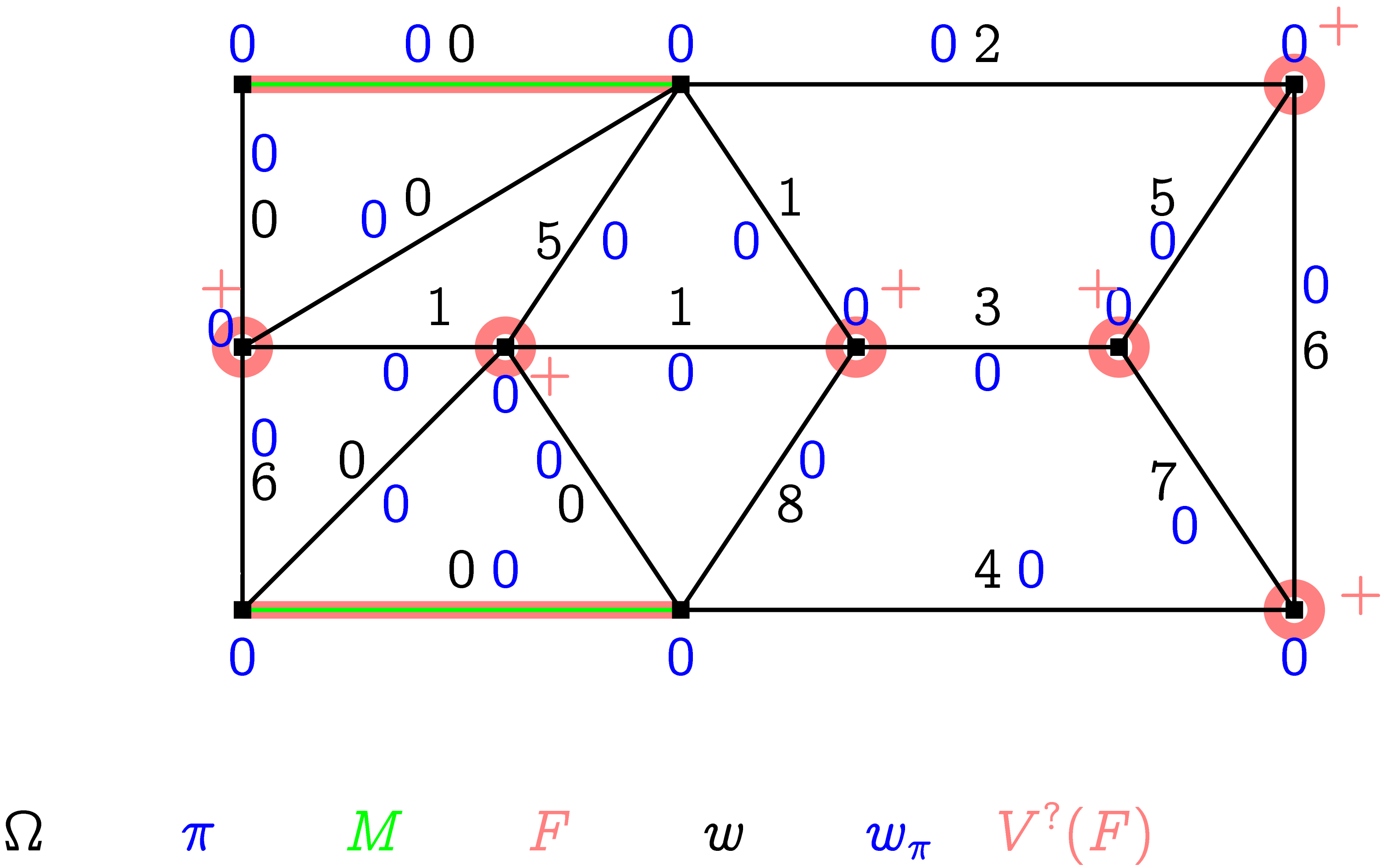


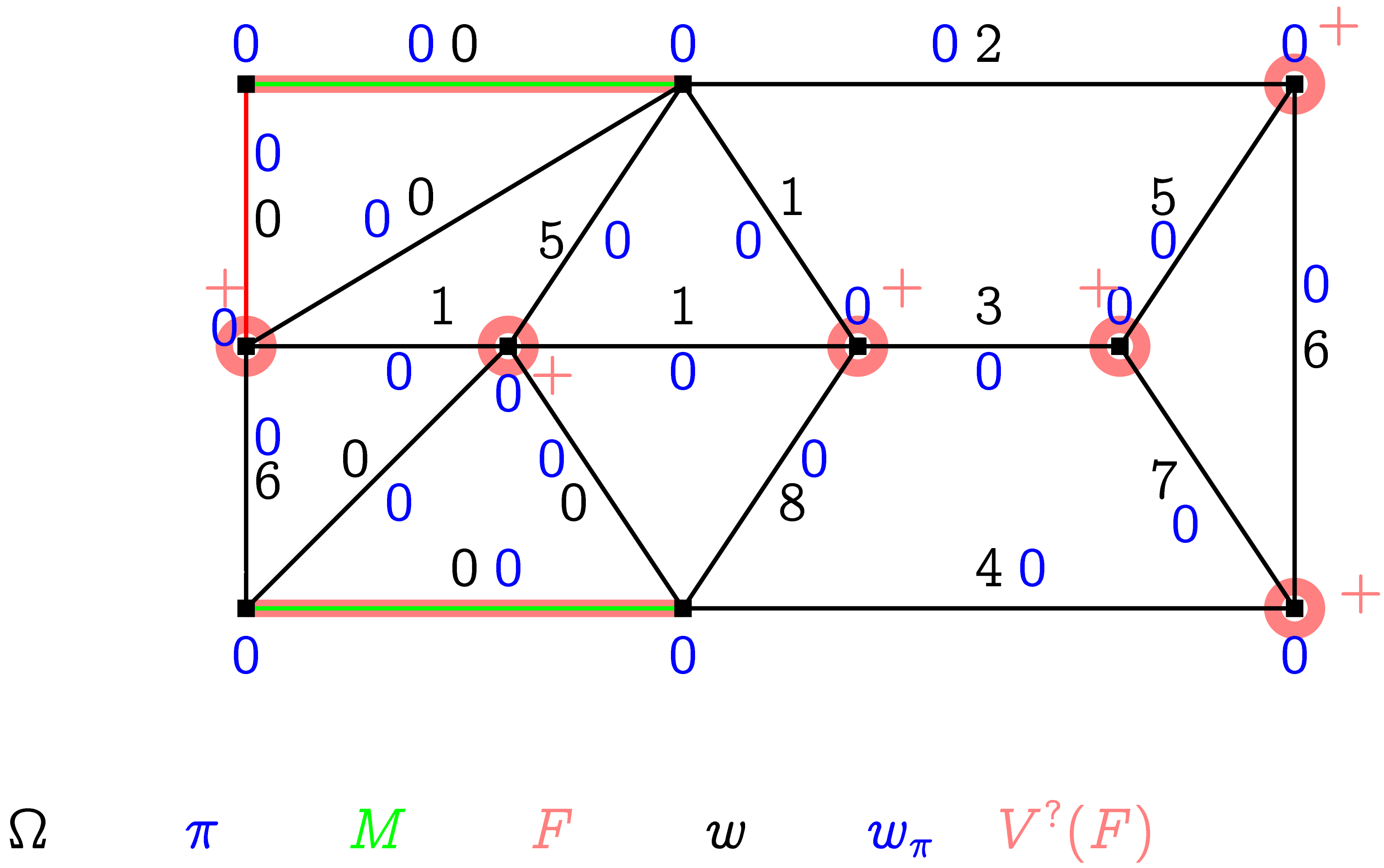
Ω π M F w w_π $V^?(F)$

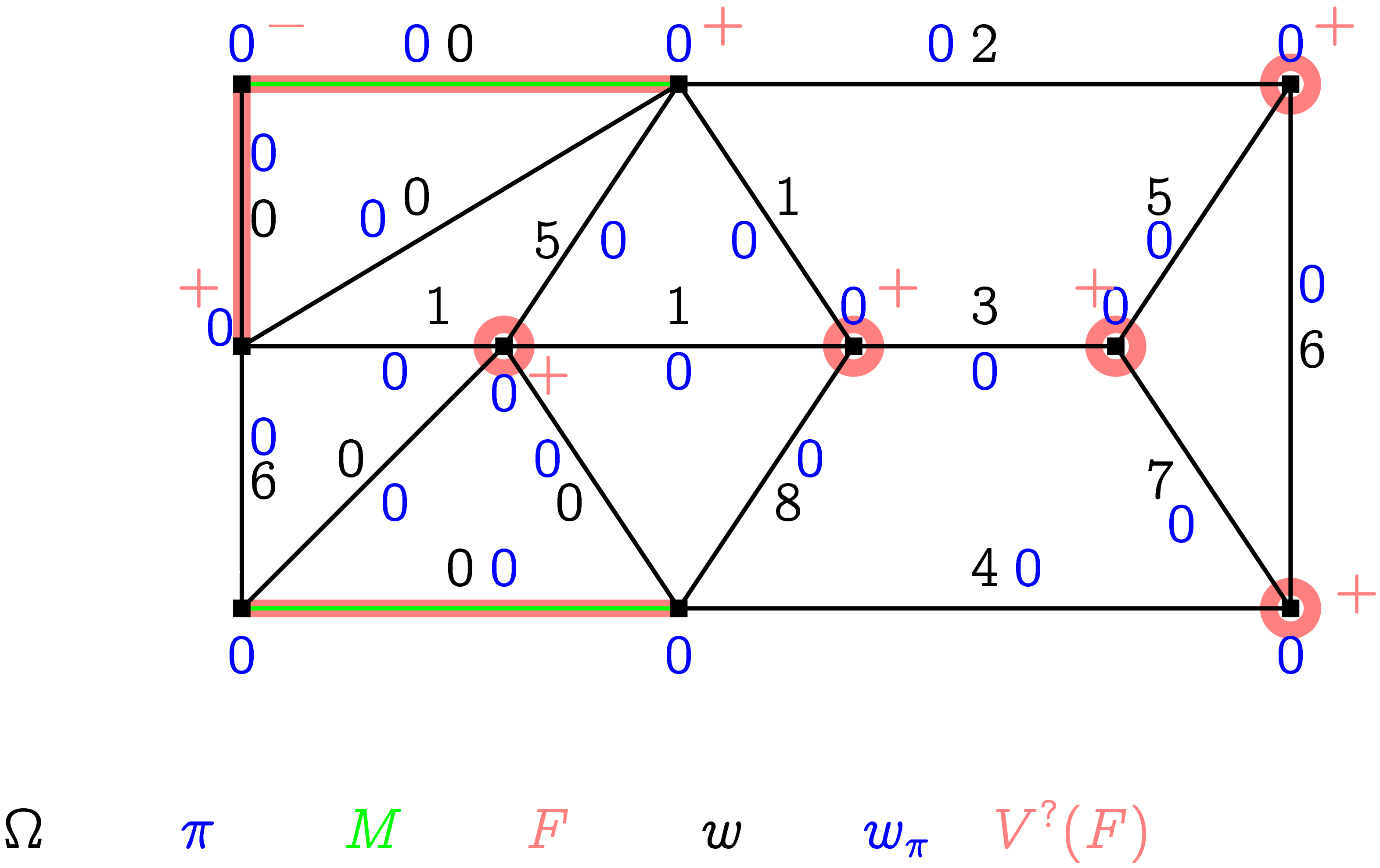

Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$

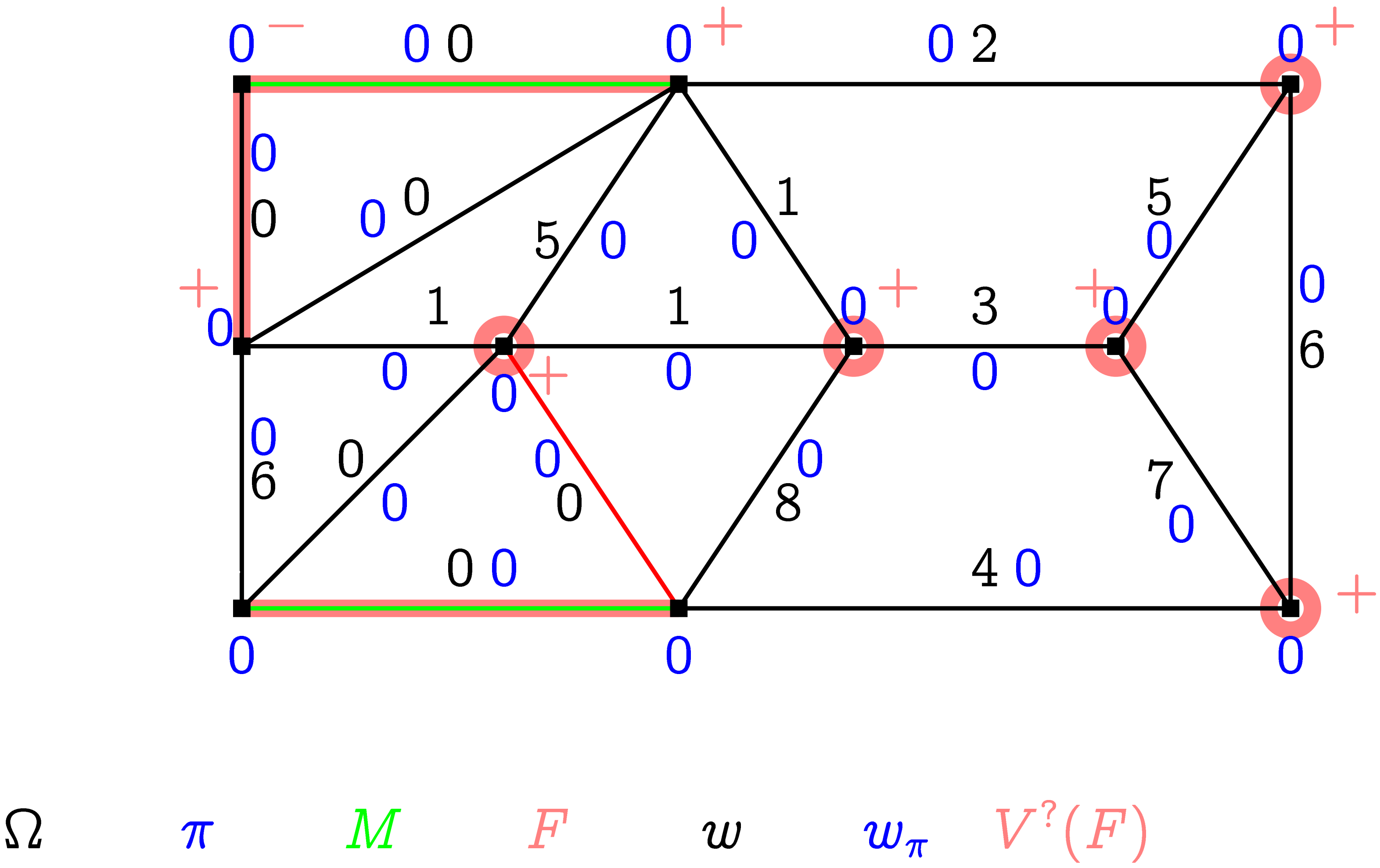


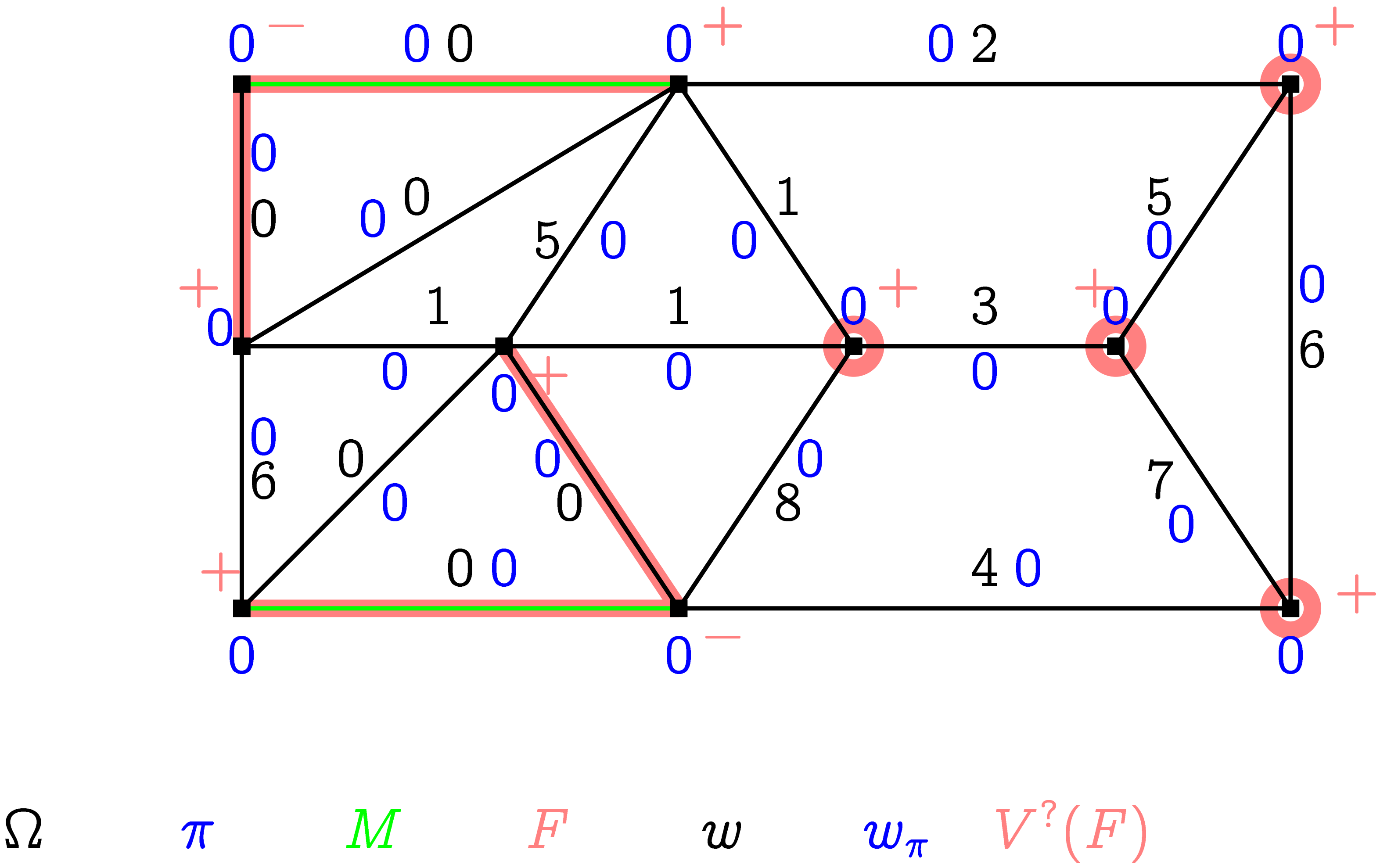
Ω π M F w w_π $V^?(F)$

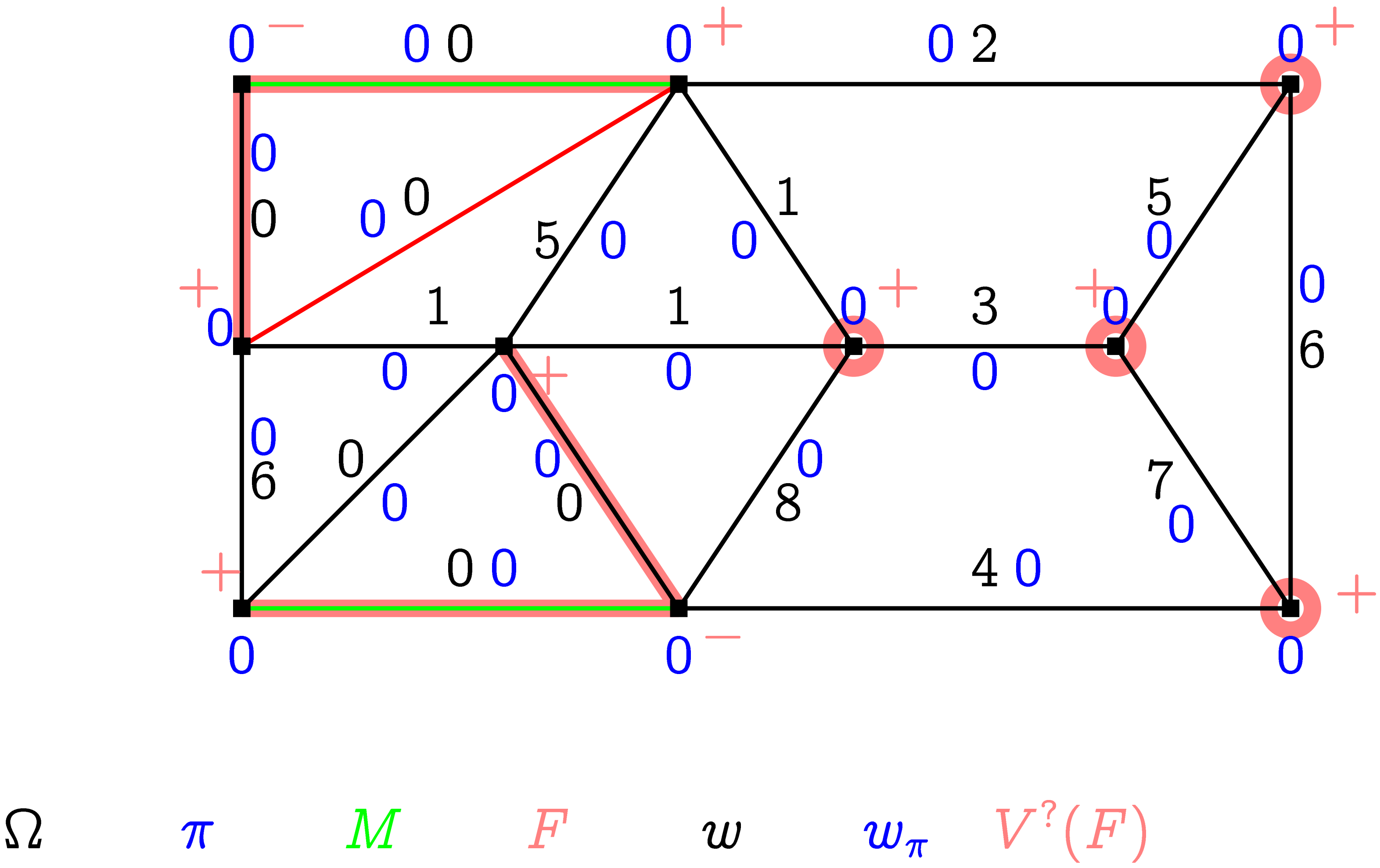

Ω π M F w w_π $V^?(F)$


Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$

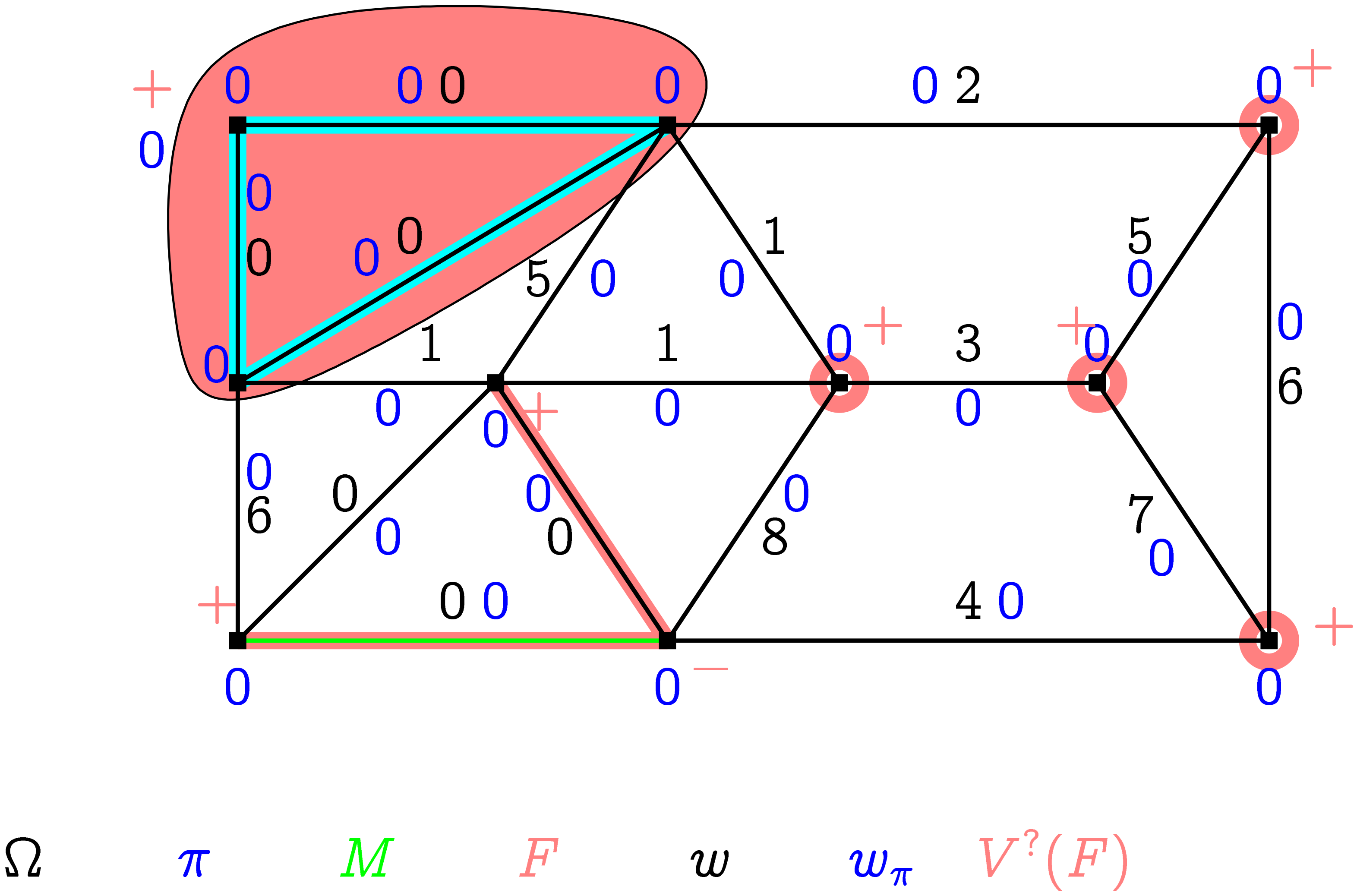

Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$


Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$

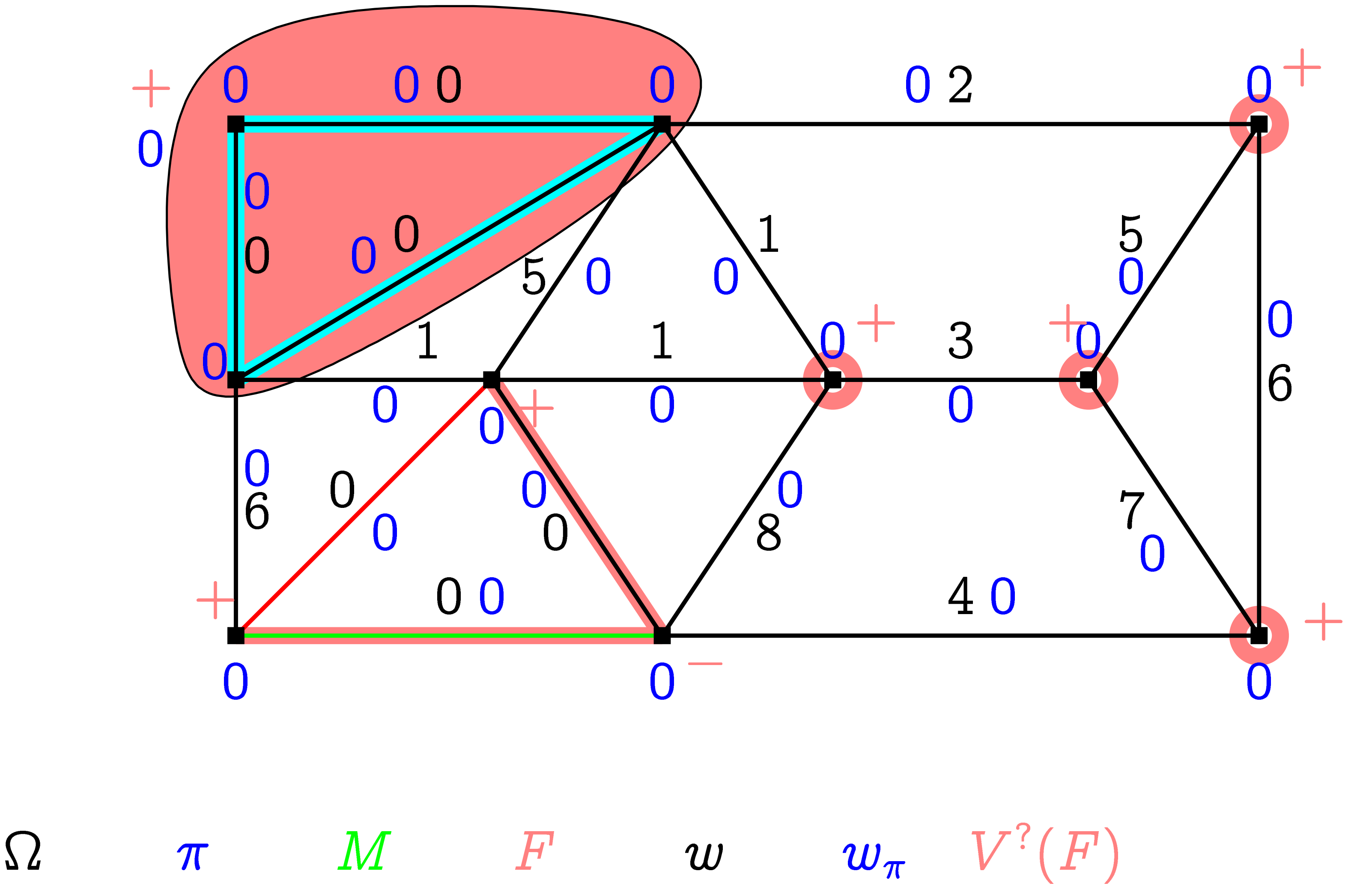

Ω π M F w w_π $V^?(F)$

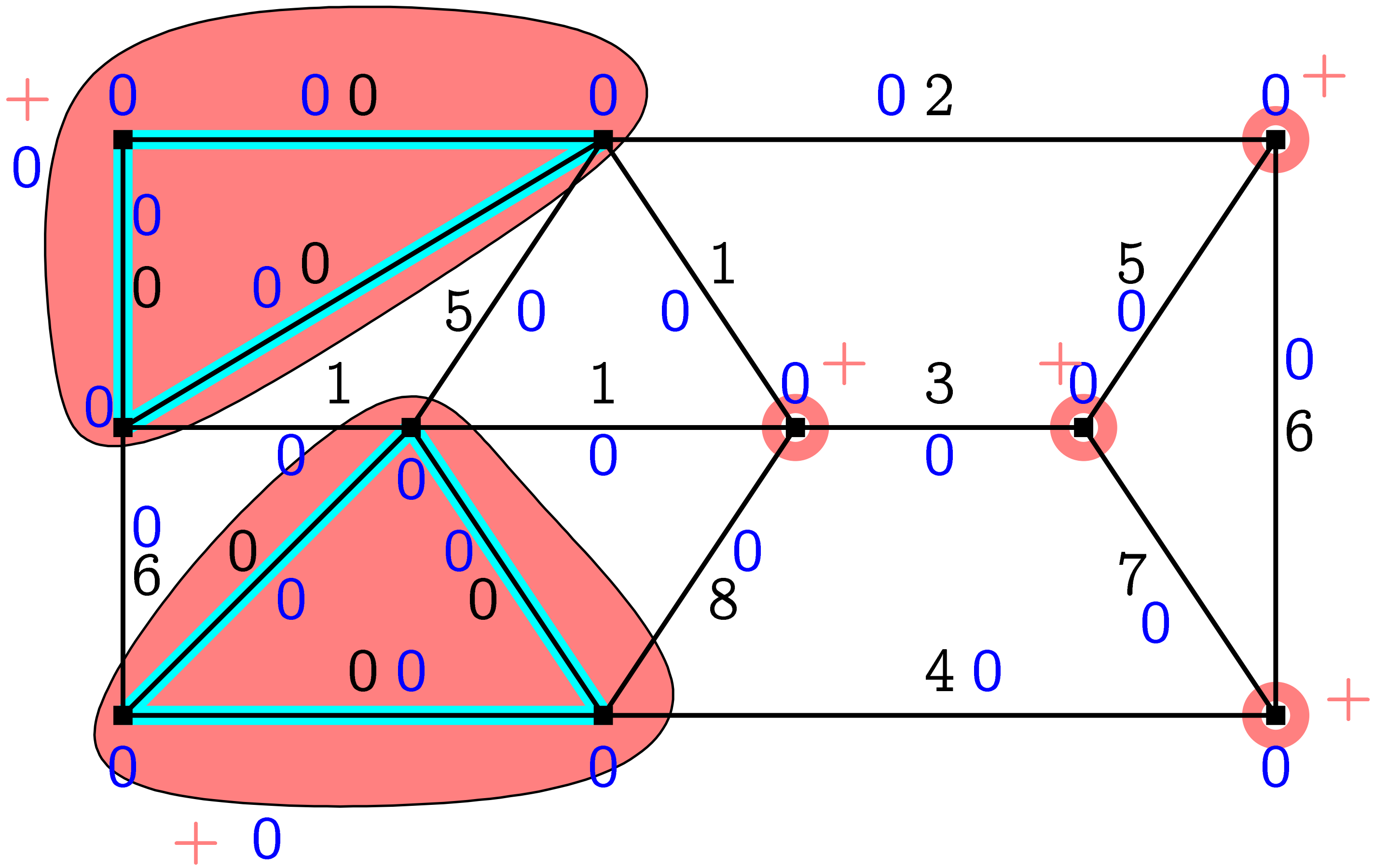


Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$



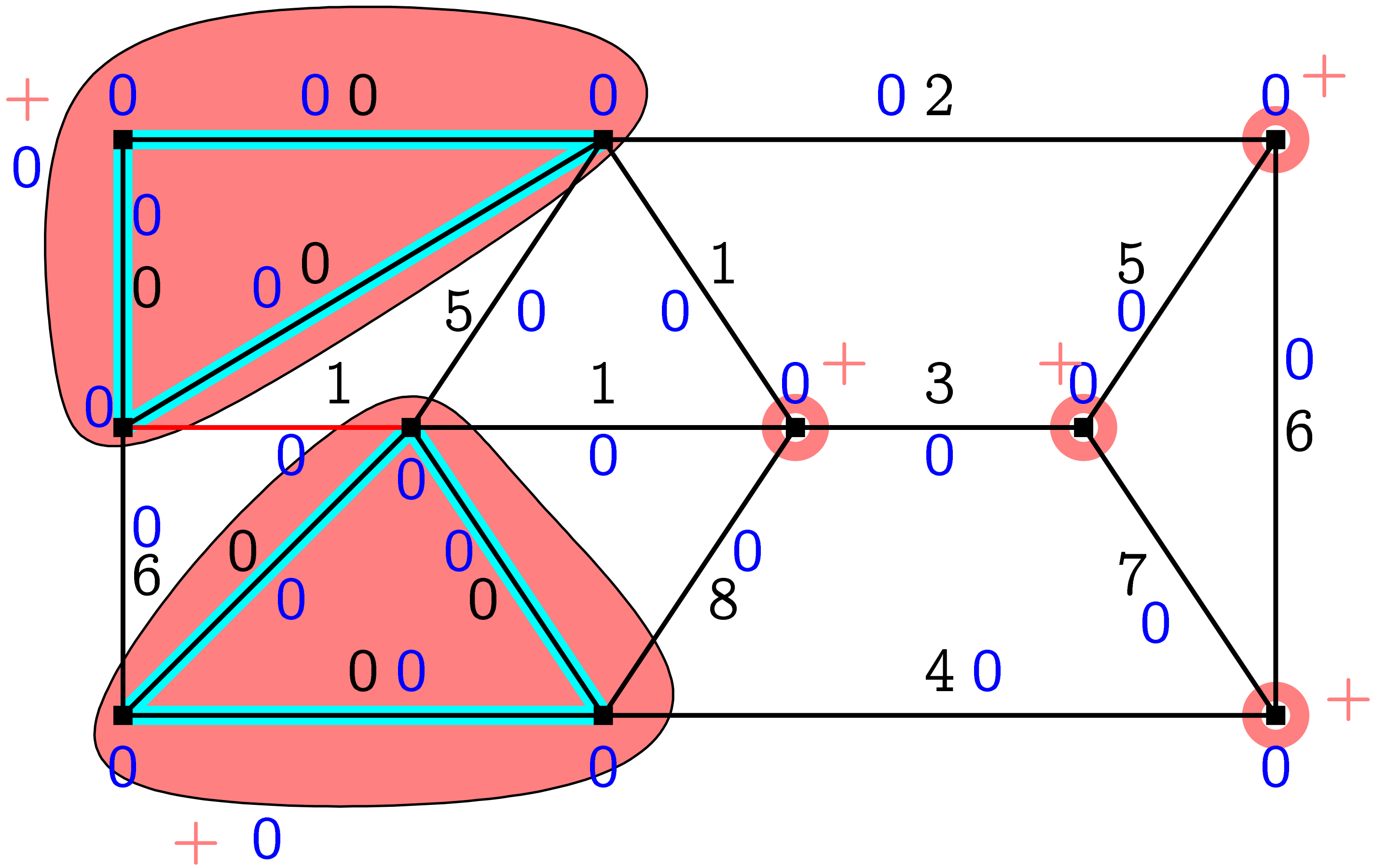
Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$


Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$

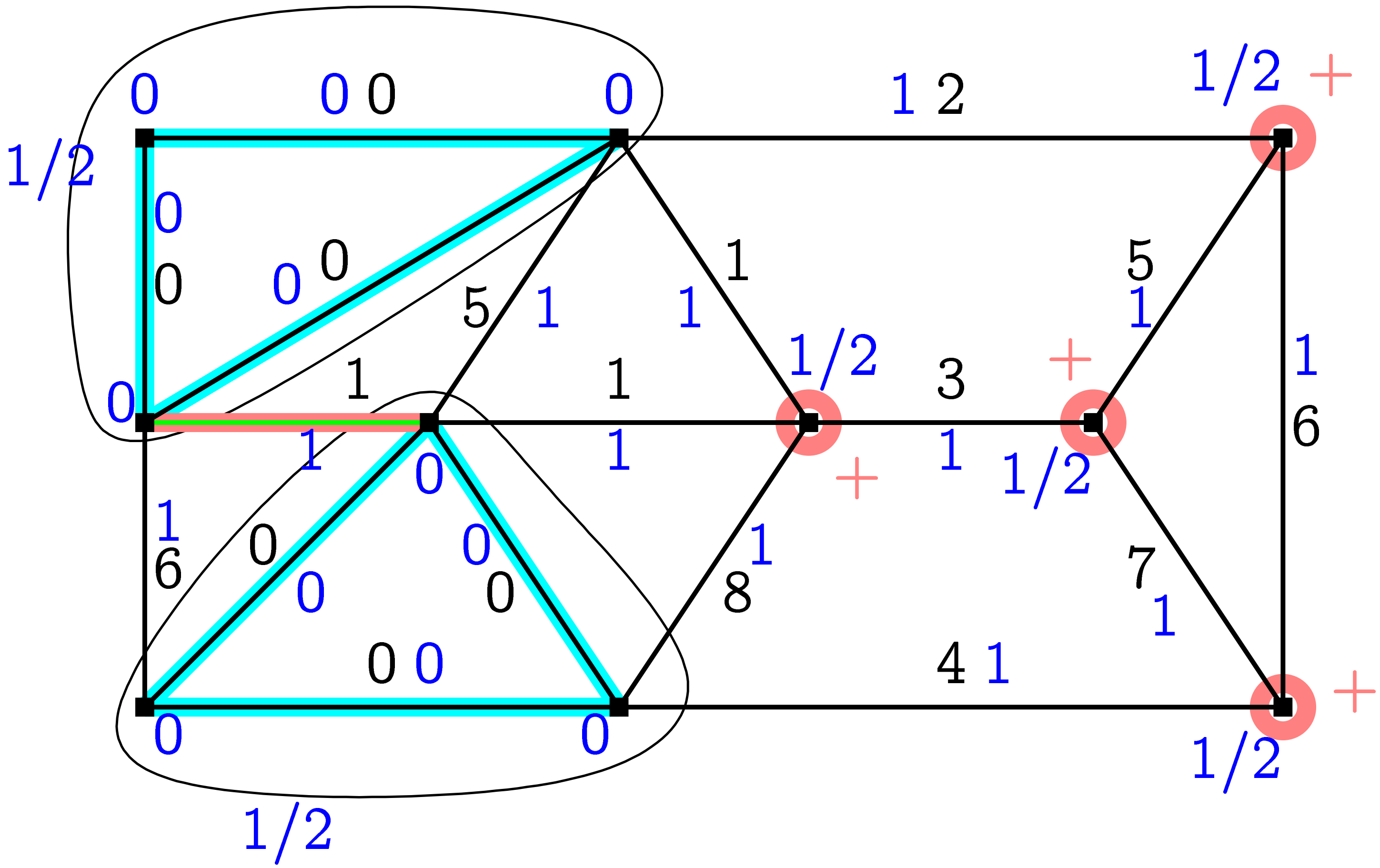


Ω π M F w w_{π} $V^{?}(F)$

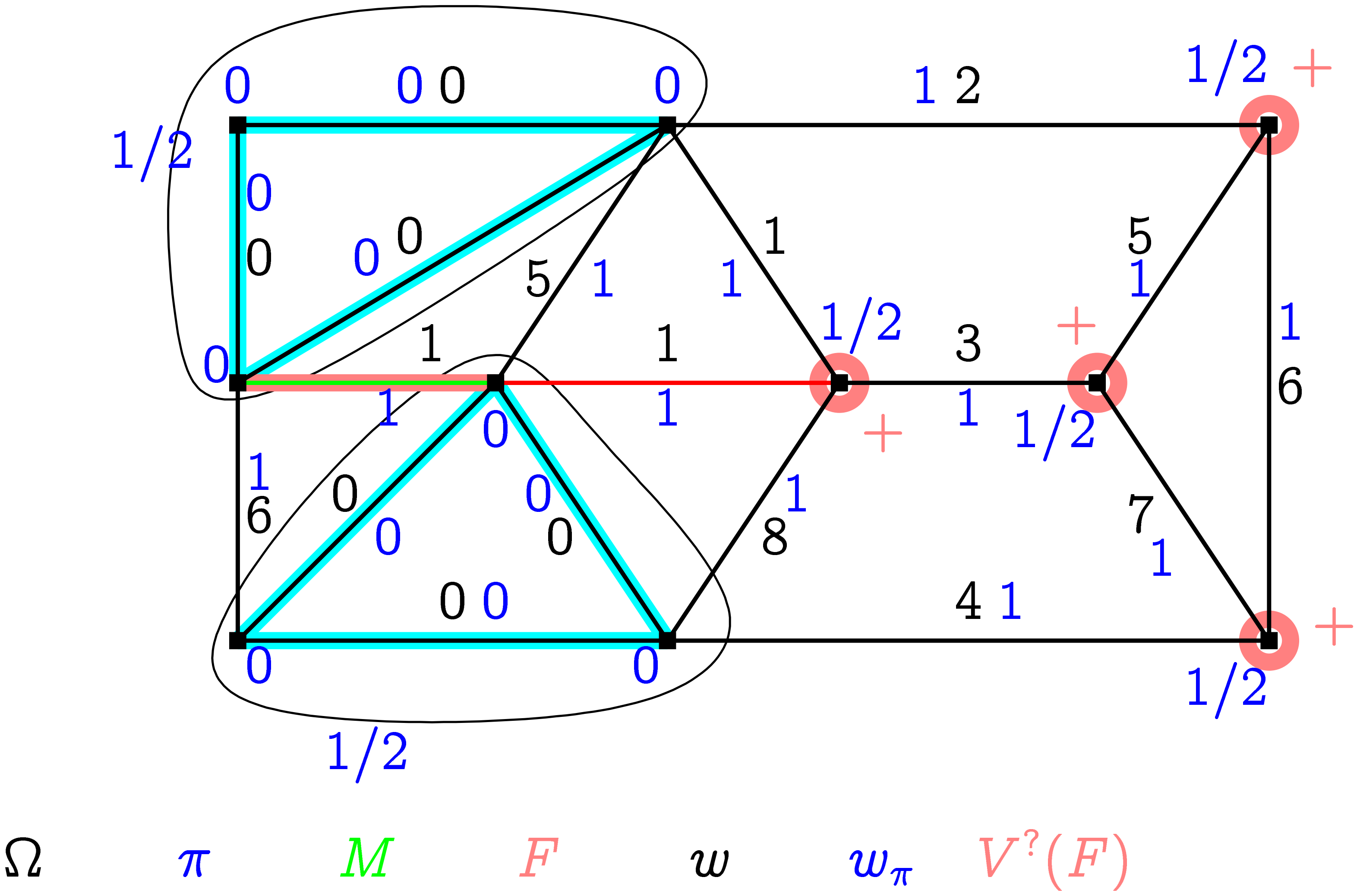
$\varepsilon = 1/2$

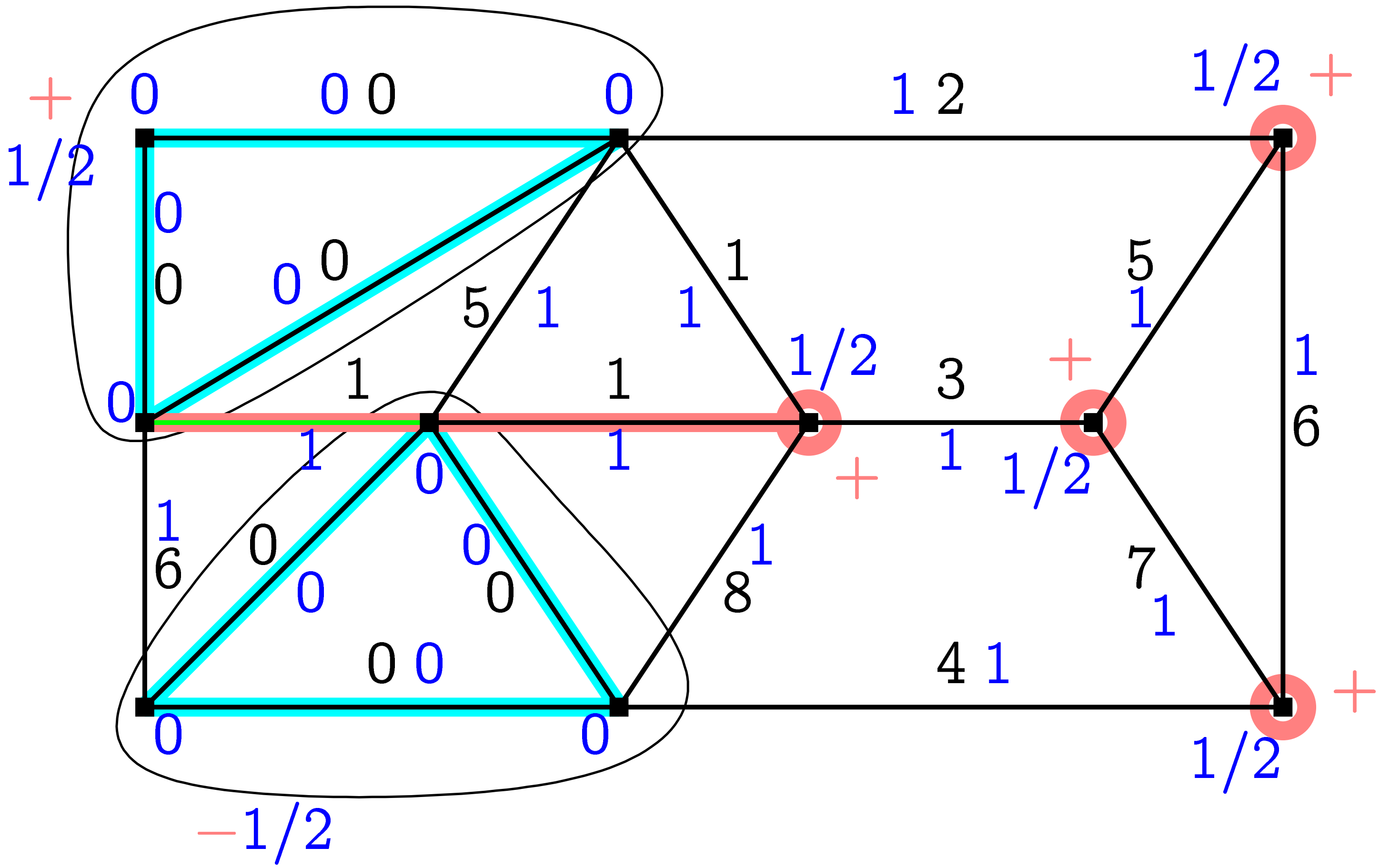


Ω π M F w w_π $V^?(F)$

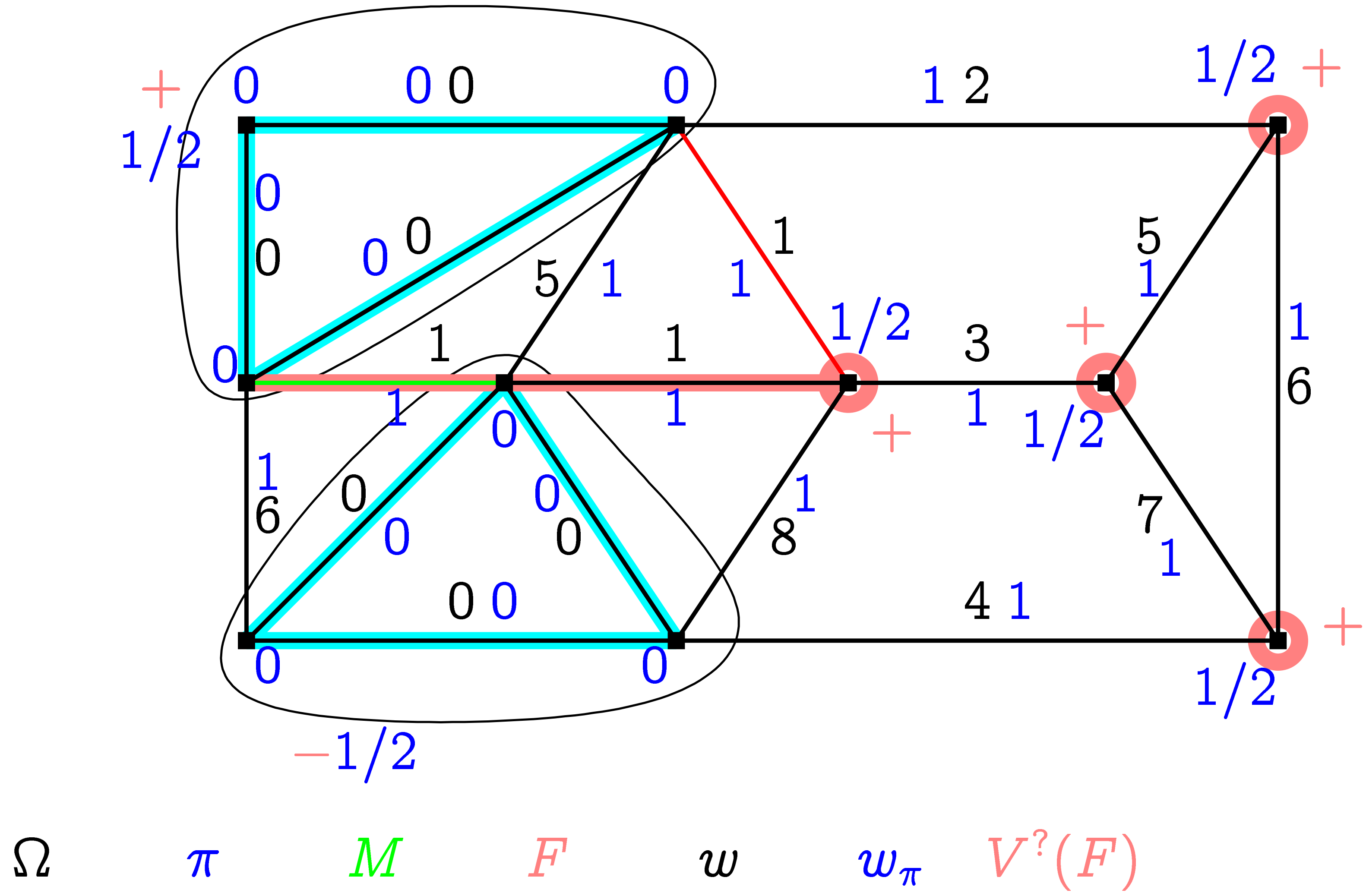


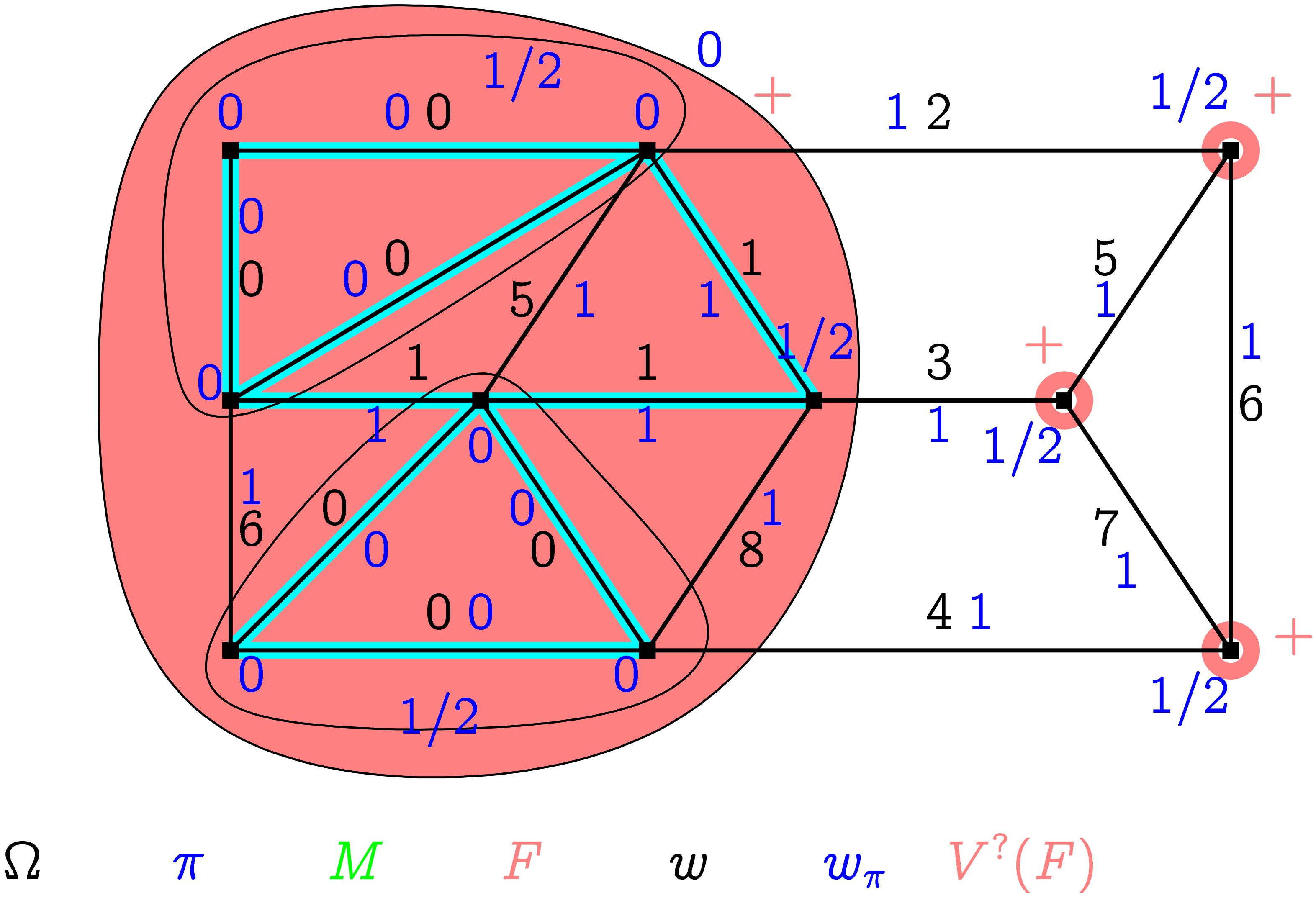
Ω π M F w w_π $V^?(F)$


Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$

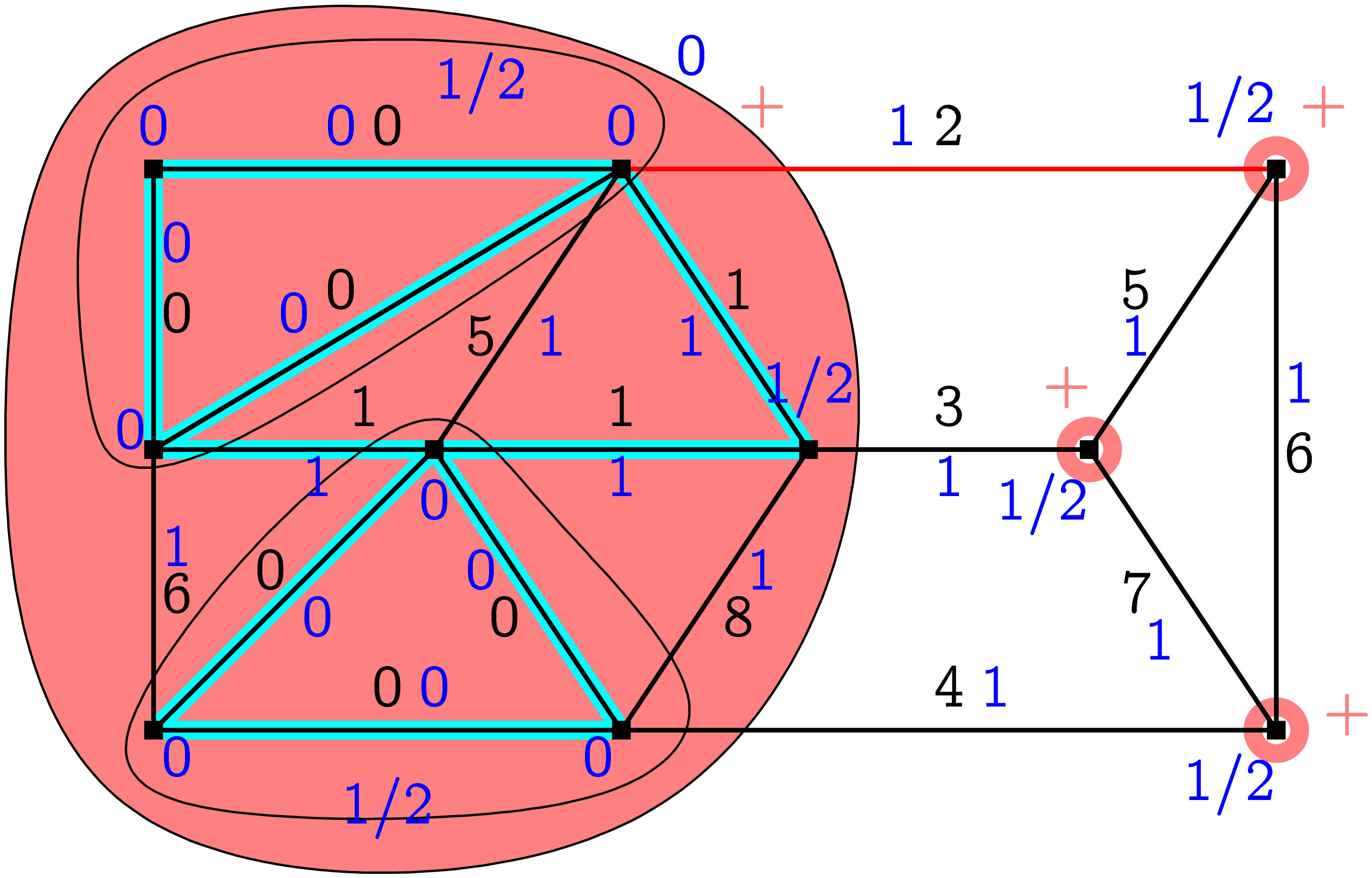


Ω π M F w w_π $V^?(F)$

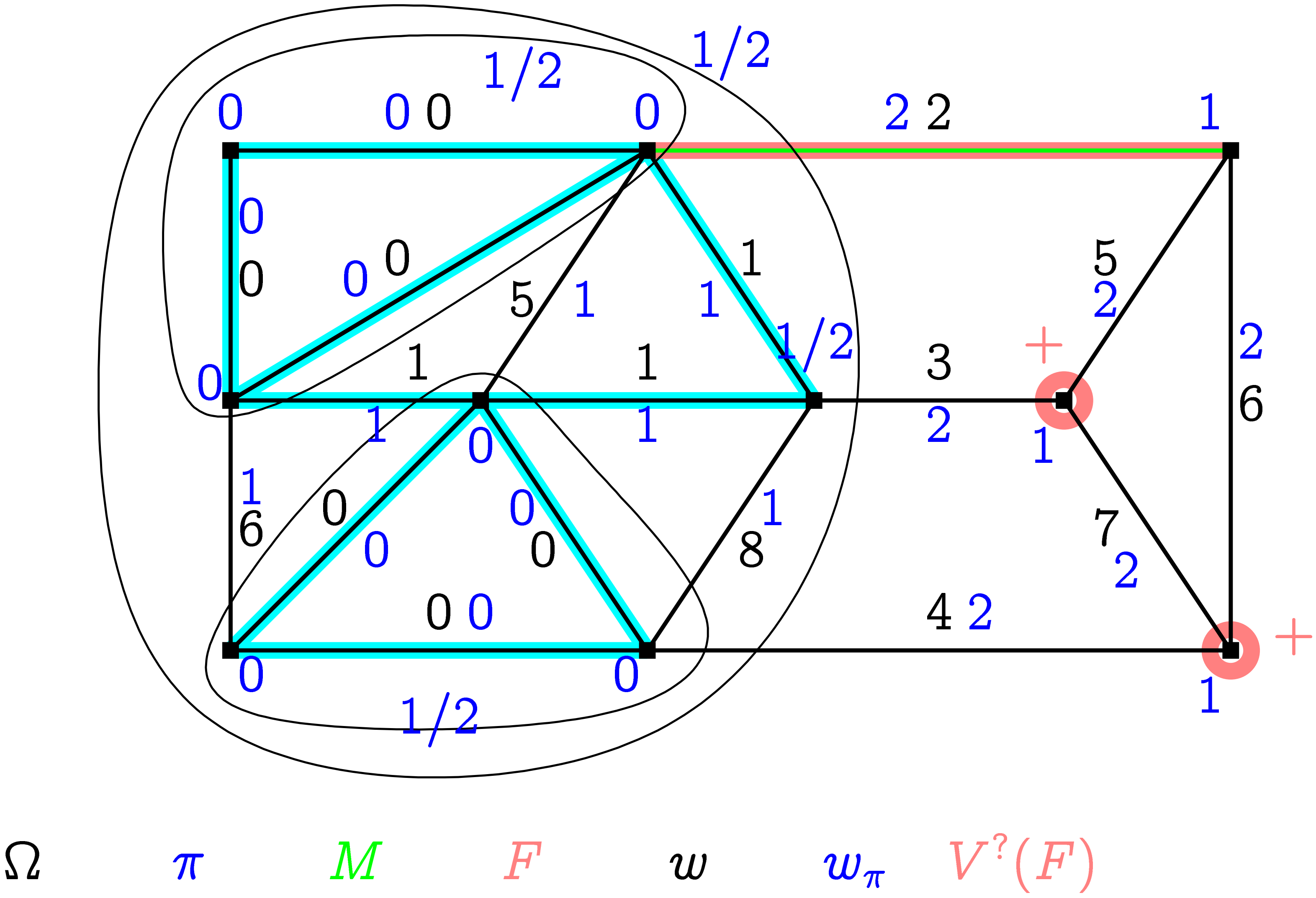

Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$


Ω π M F w w_π $V^?(F)$

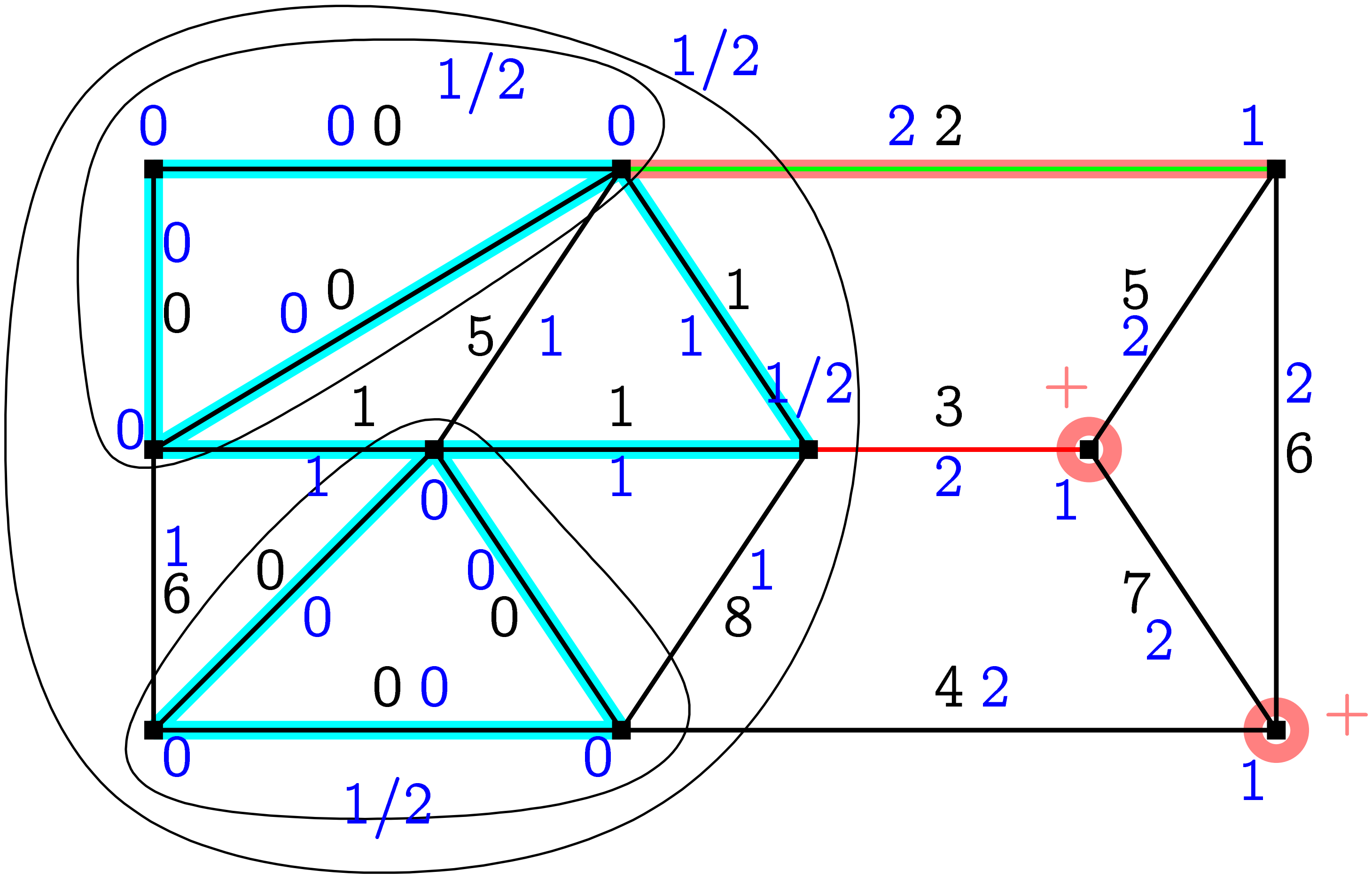
$\varepsilon = 1/2$



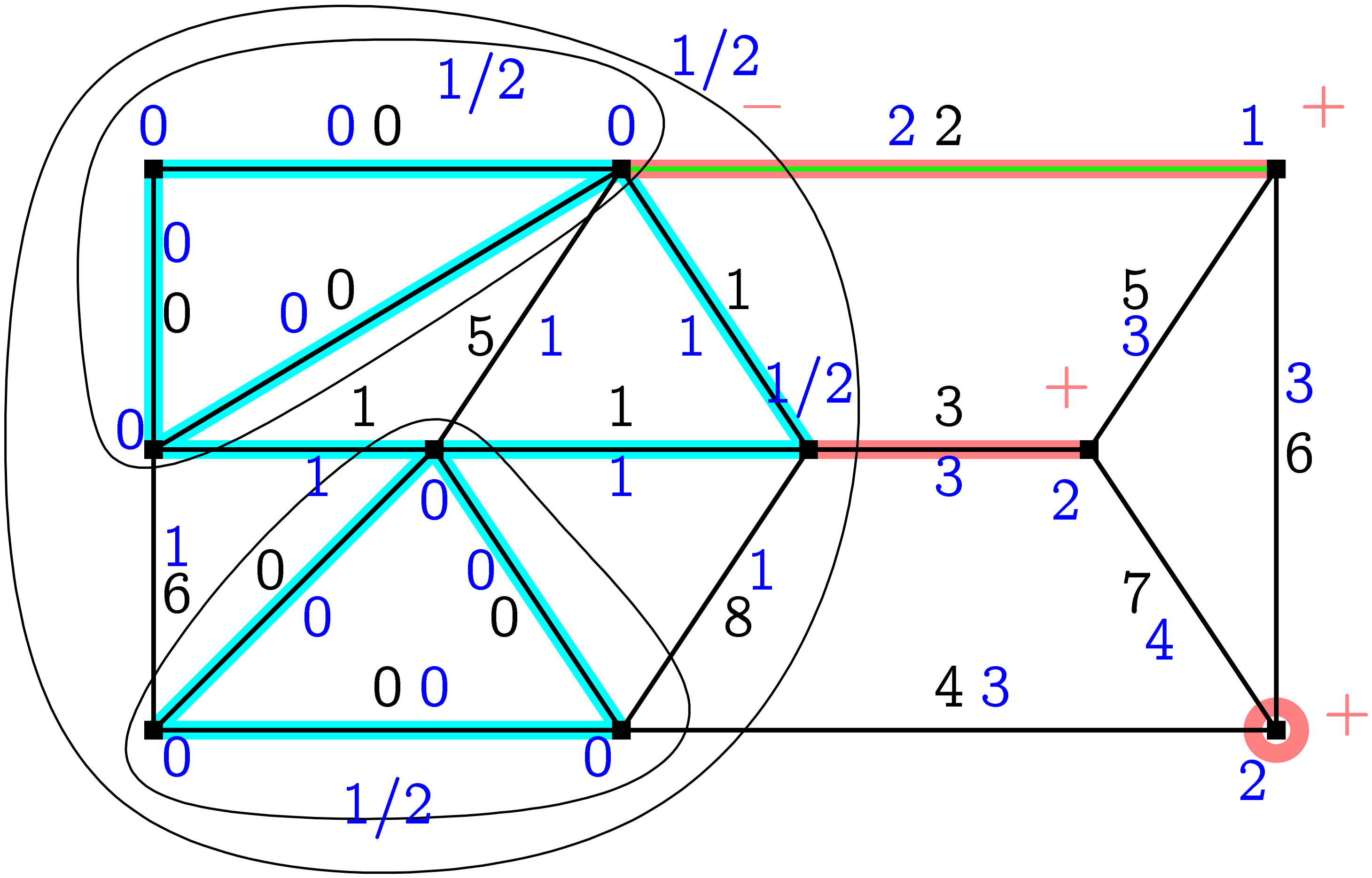
Ω π M F w w_π $V^?(F)$


Ω π M F w w_π $V^?(F)$

$\varepsilon = 1$

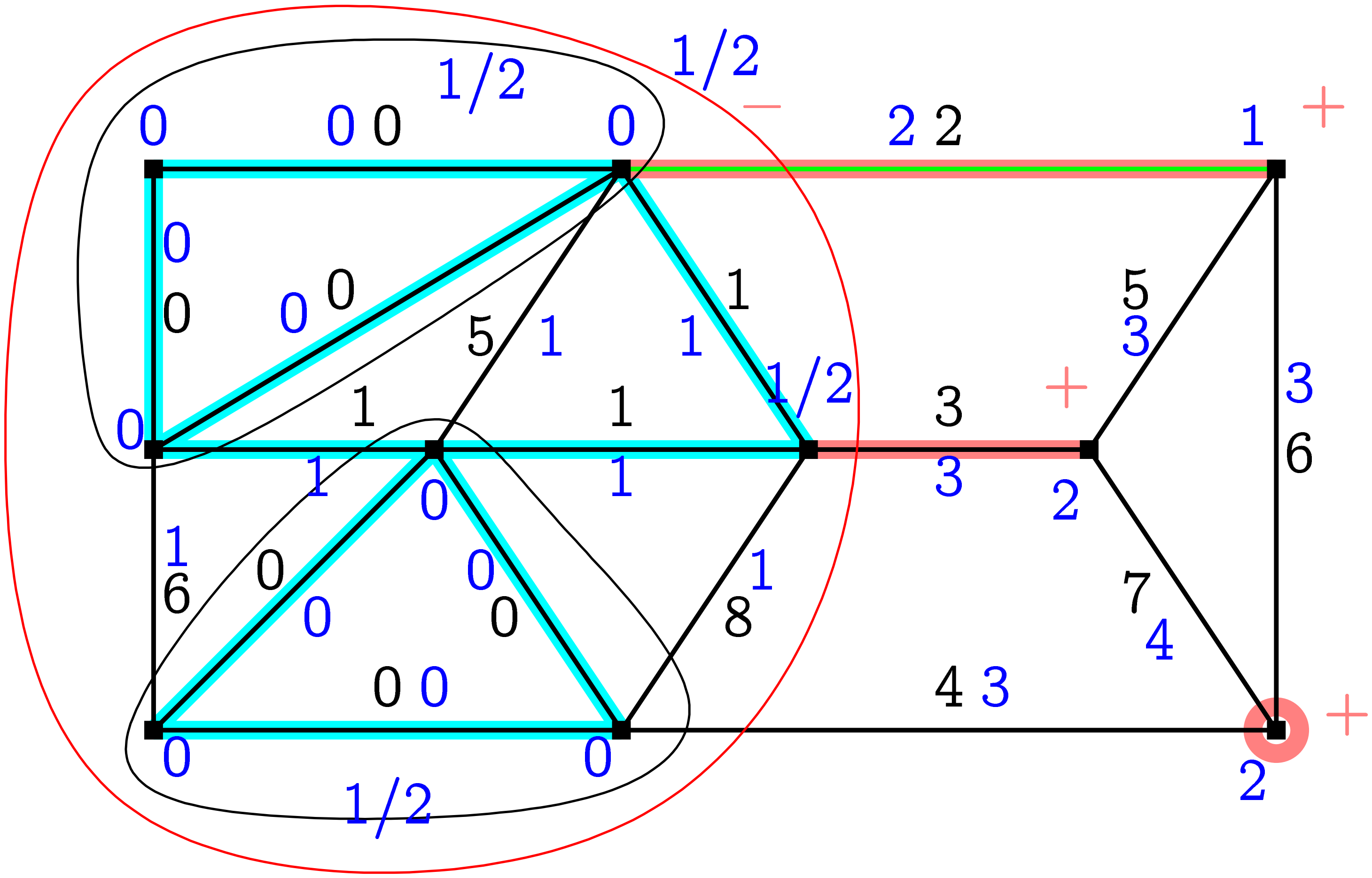


Ω π M F w w_π $V^?(F)$

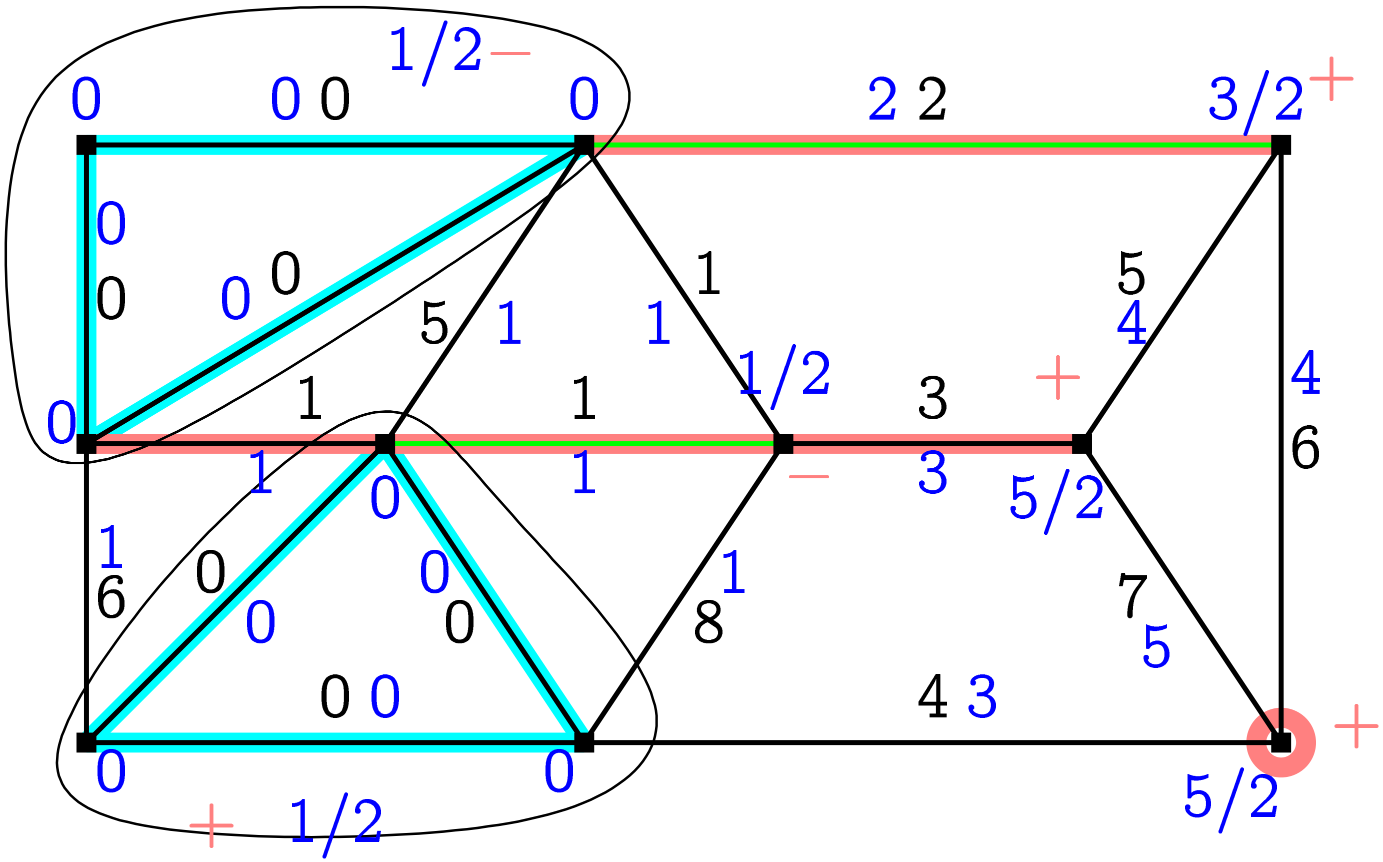


Ω π M F w w_π $V^?(F)$

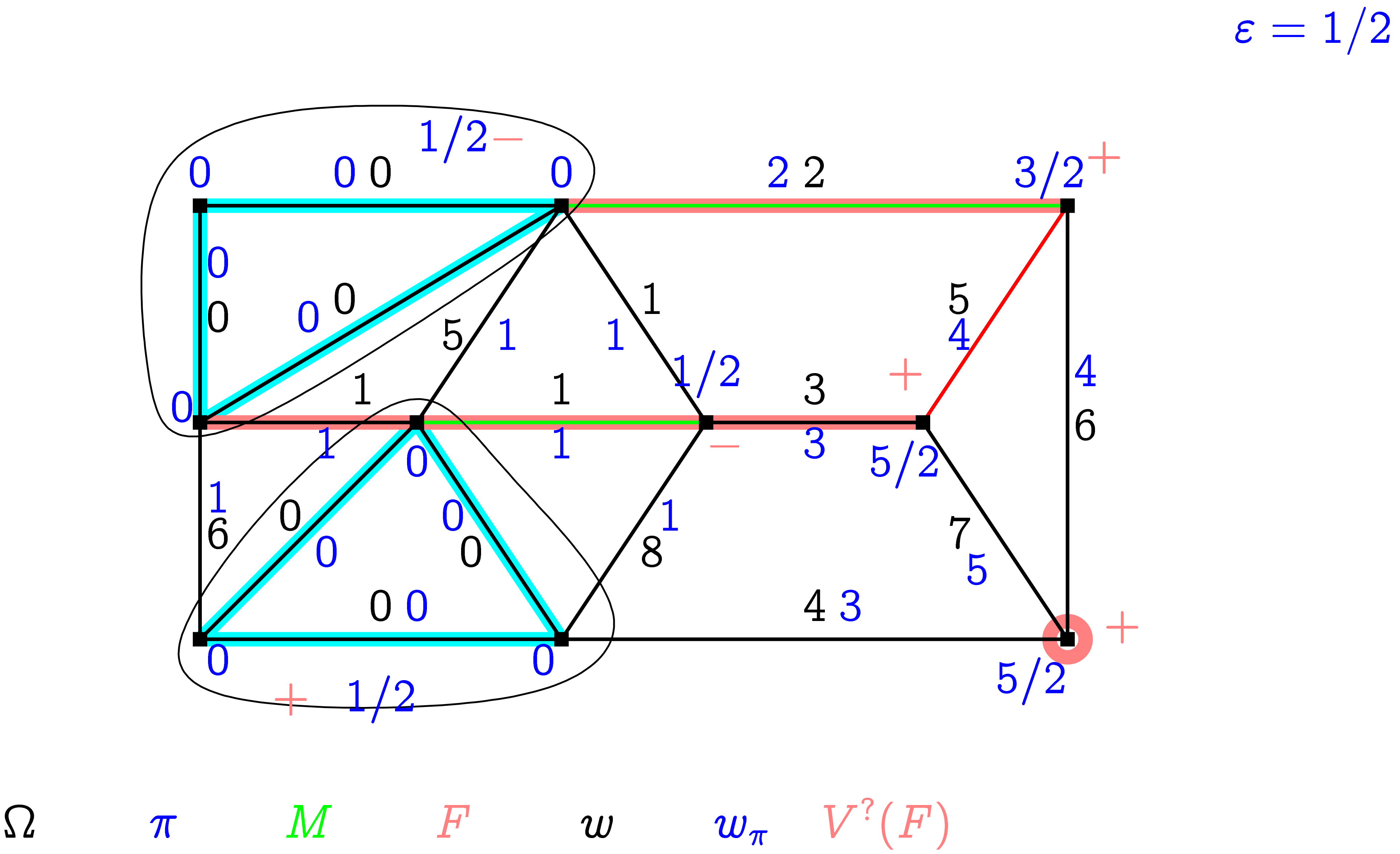
$\varepsilon = 1/2$



Ω π M F w w_π $V^?(F)$

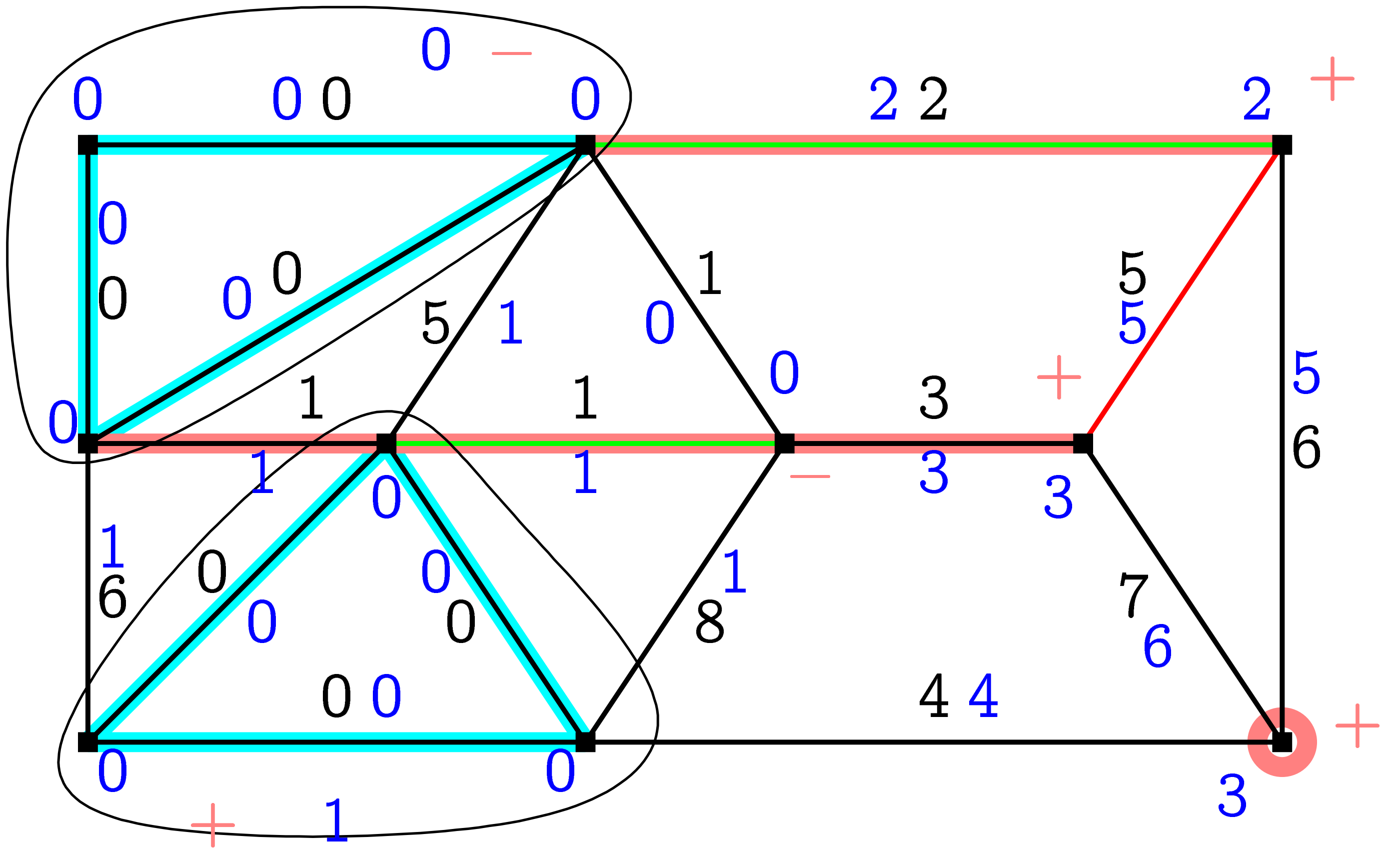


Ω π M F w w_π $V^?(F)$

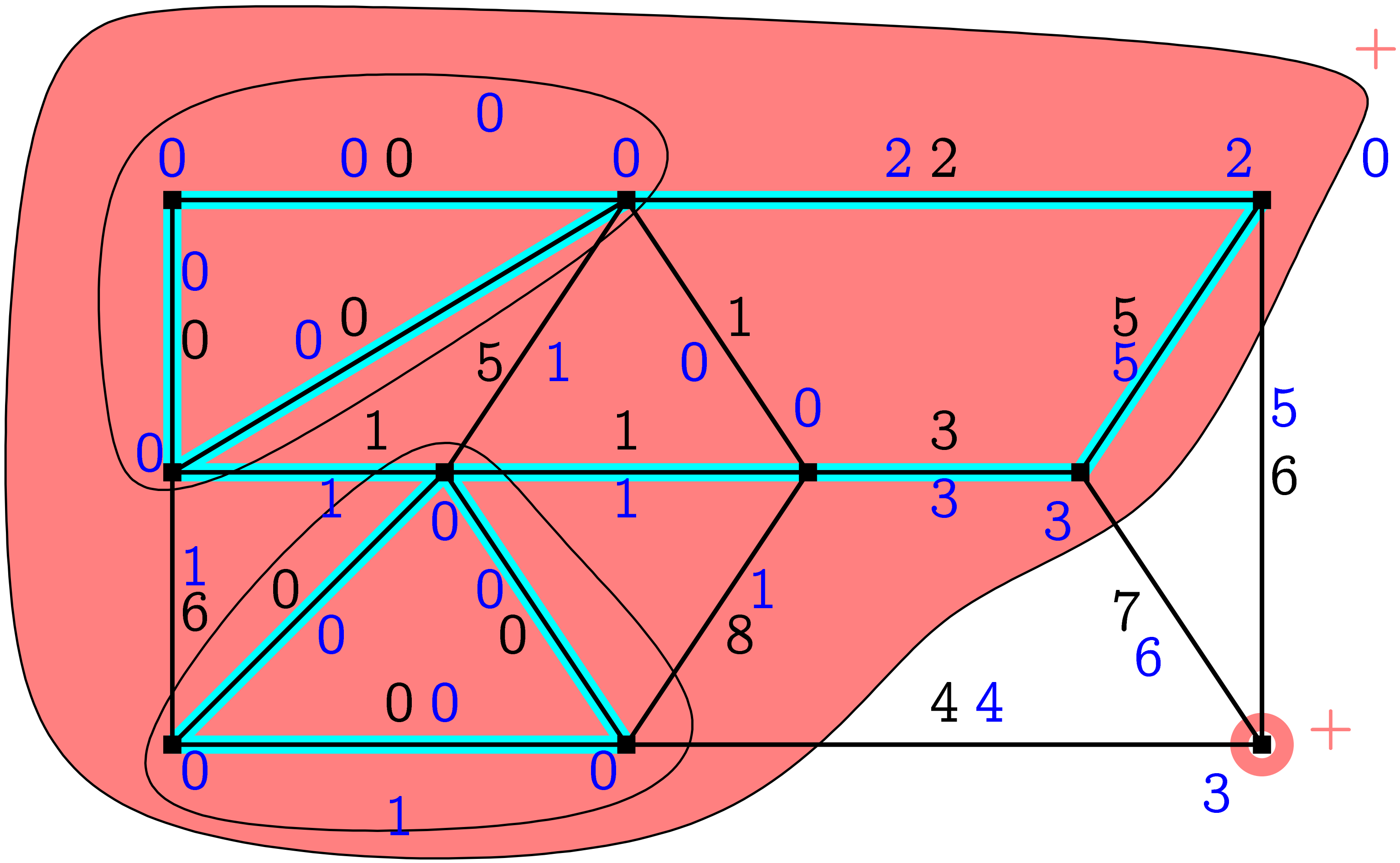


$\varepsilon = 1/2$
0
0 0
1/2 −
0
2 2
3/2 +
0
0
0 0
5
1
1
1
5
4
4
6
0
1
1
1/2
3
+
1
1
0
3
5/2
−
1
6
0
0
0
0
1
8
7
5
0 0
4 3
0
0
+
1/2
5/2
+
Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$

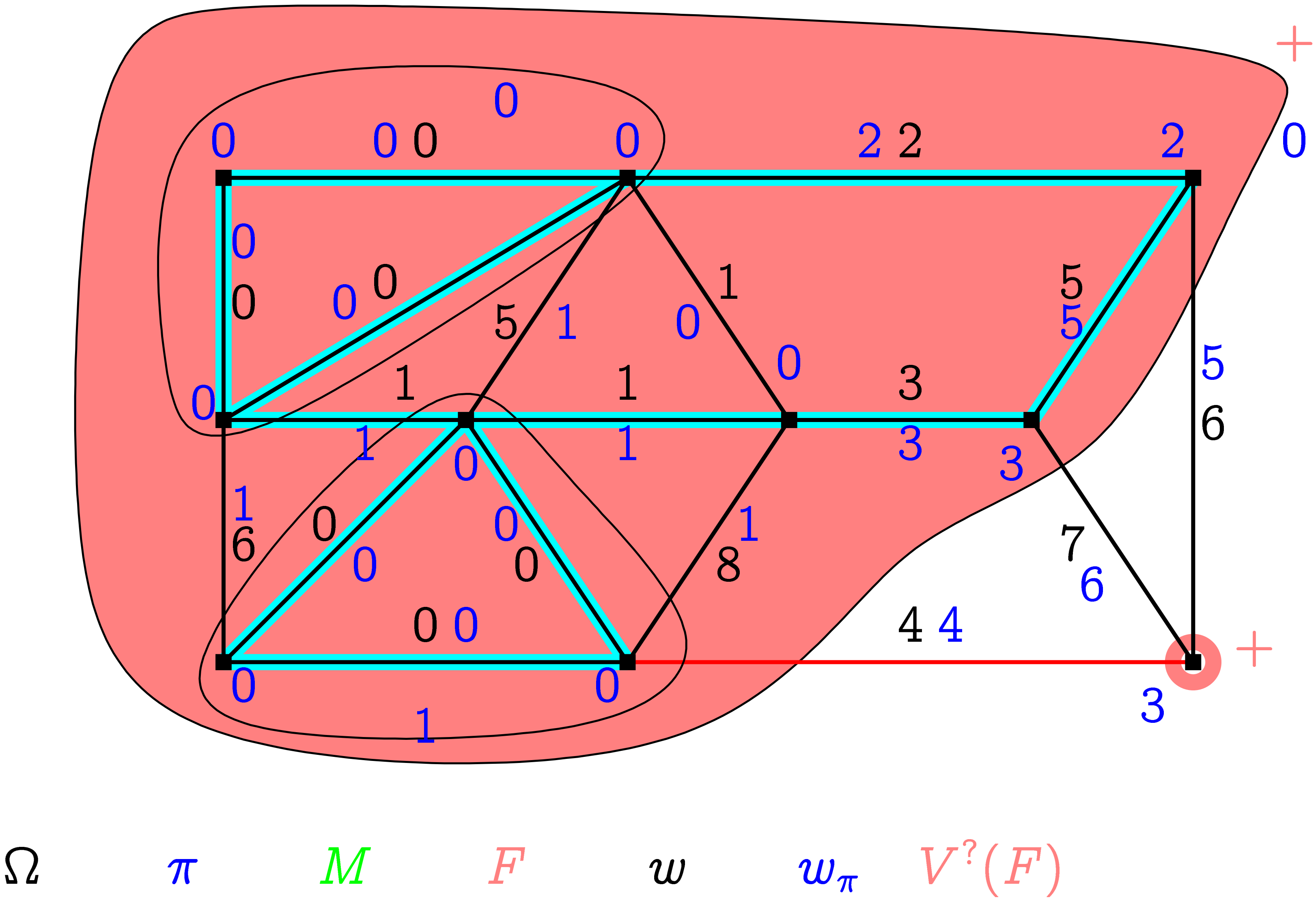
$\varepsilon = 1/2$



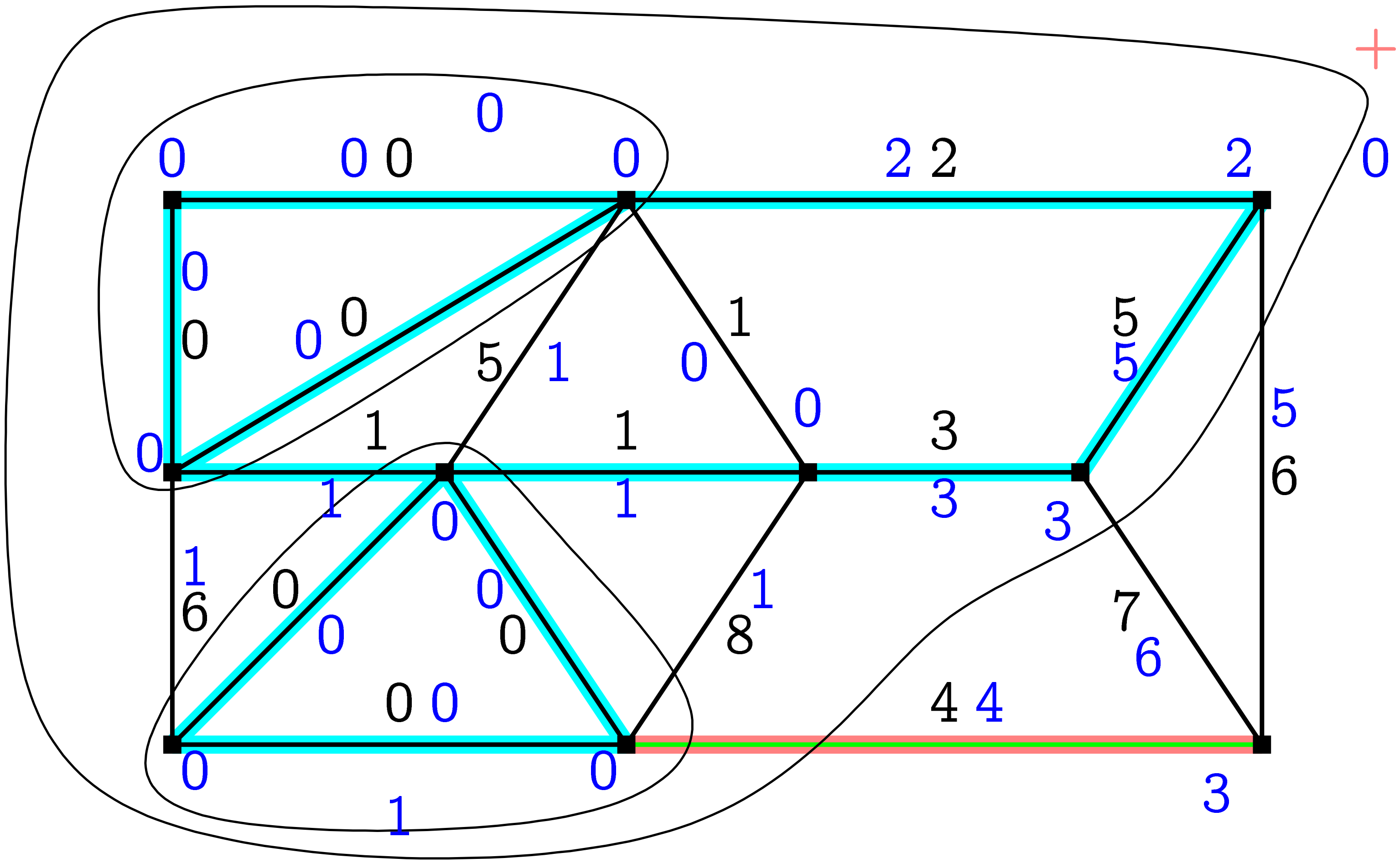
Ω π M F w w_π $V^?(F)$



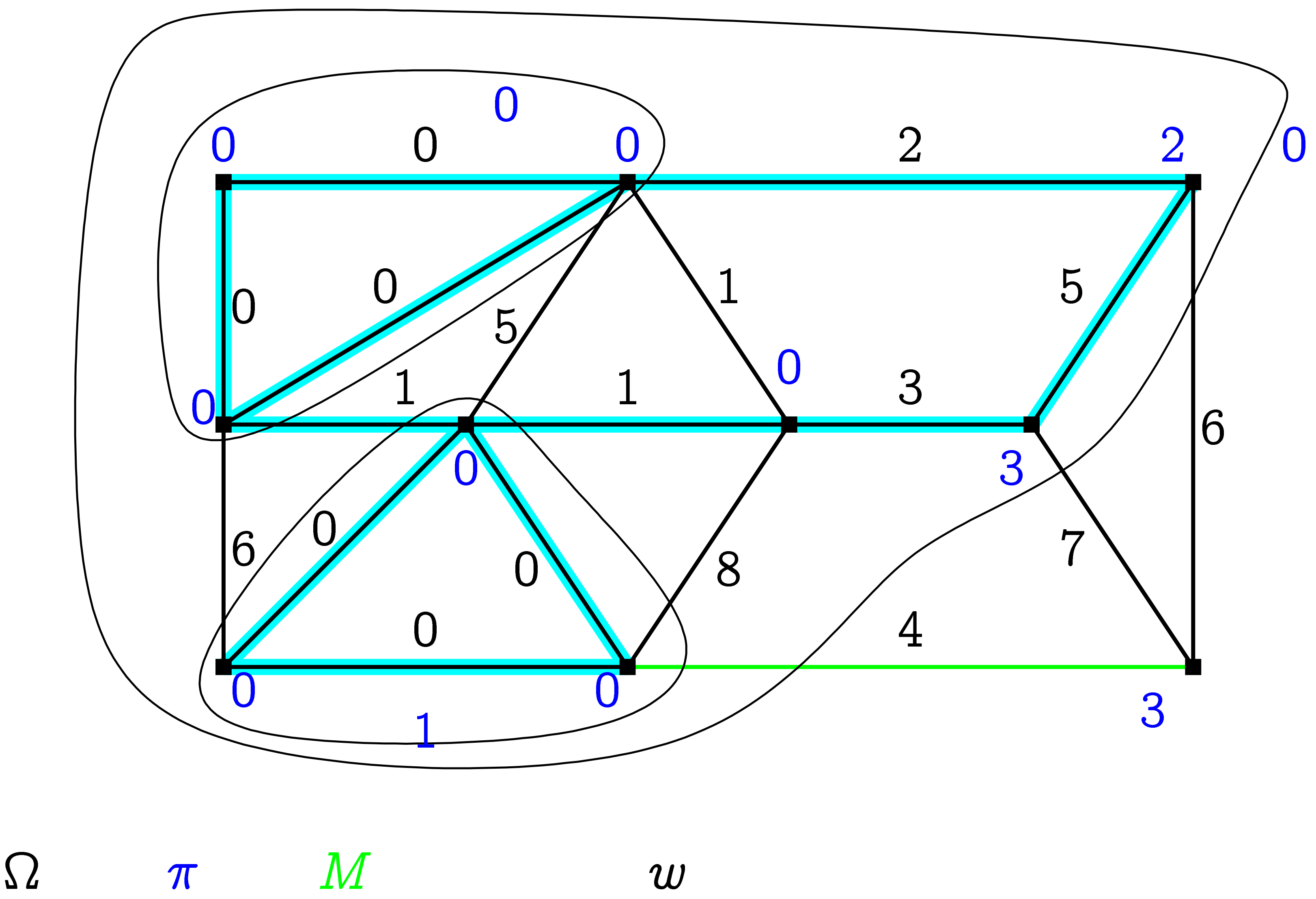
Ω π M F w w_π $V^?(F)$

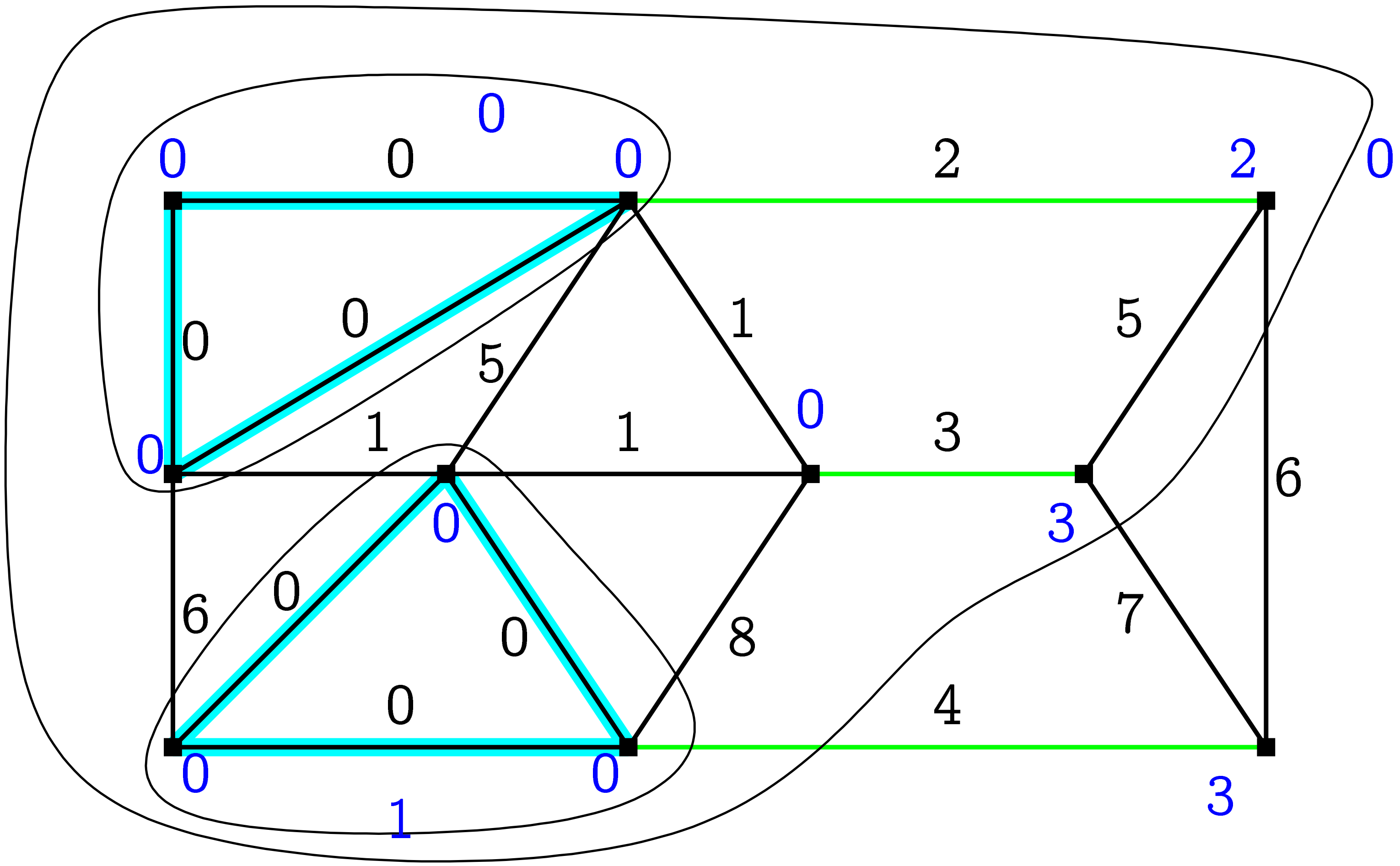


Ω
π
M
F
w
w_π
$V^?(F)$

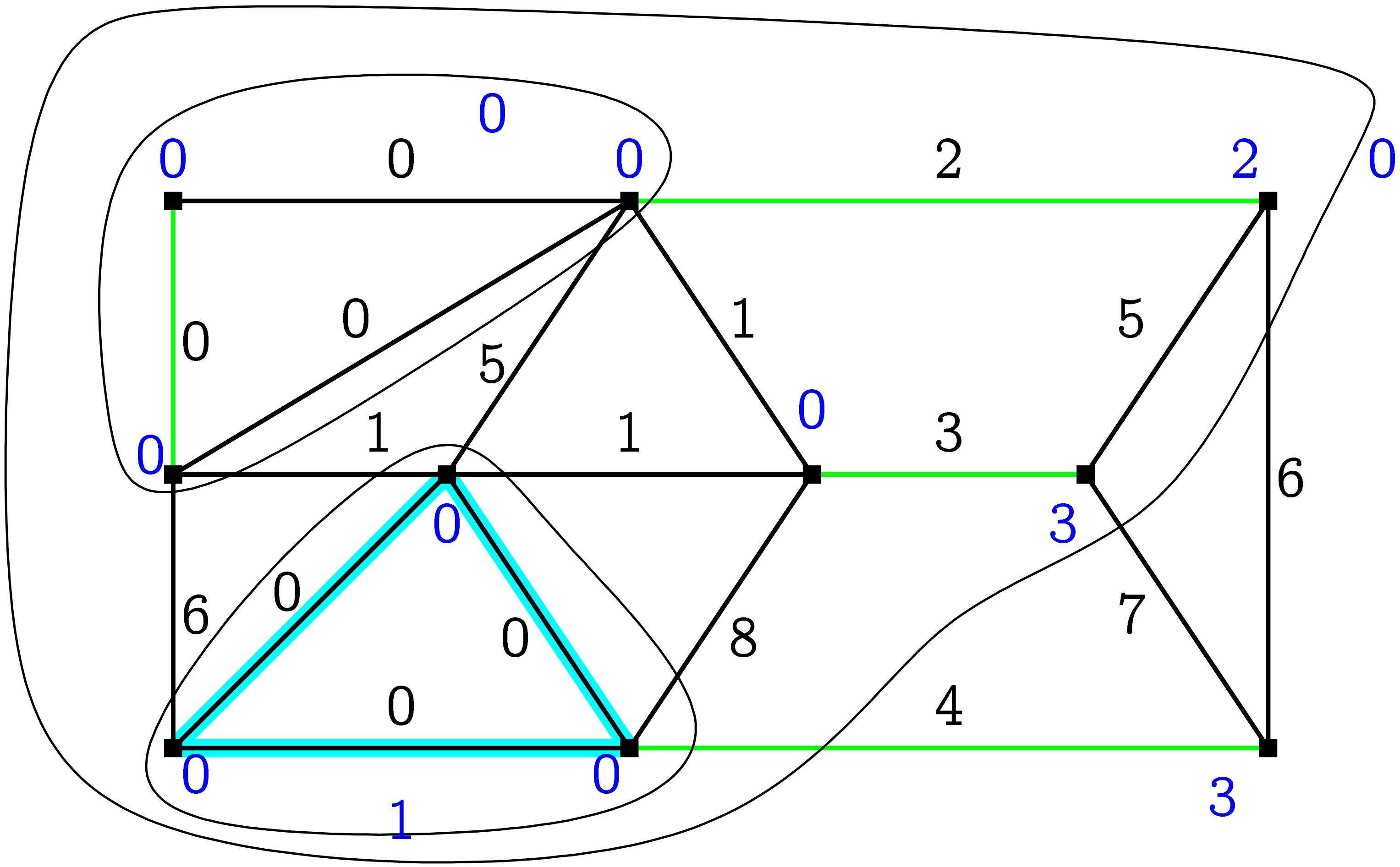


Ω π M F w w_π $V^?(F)$

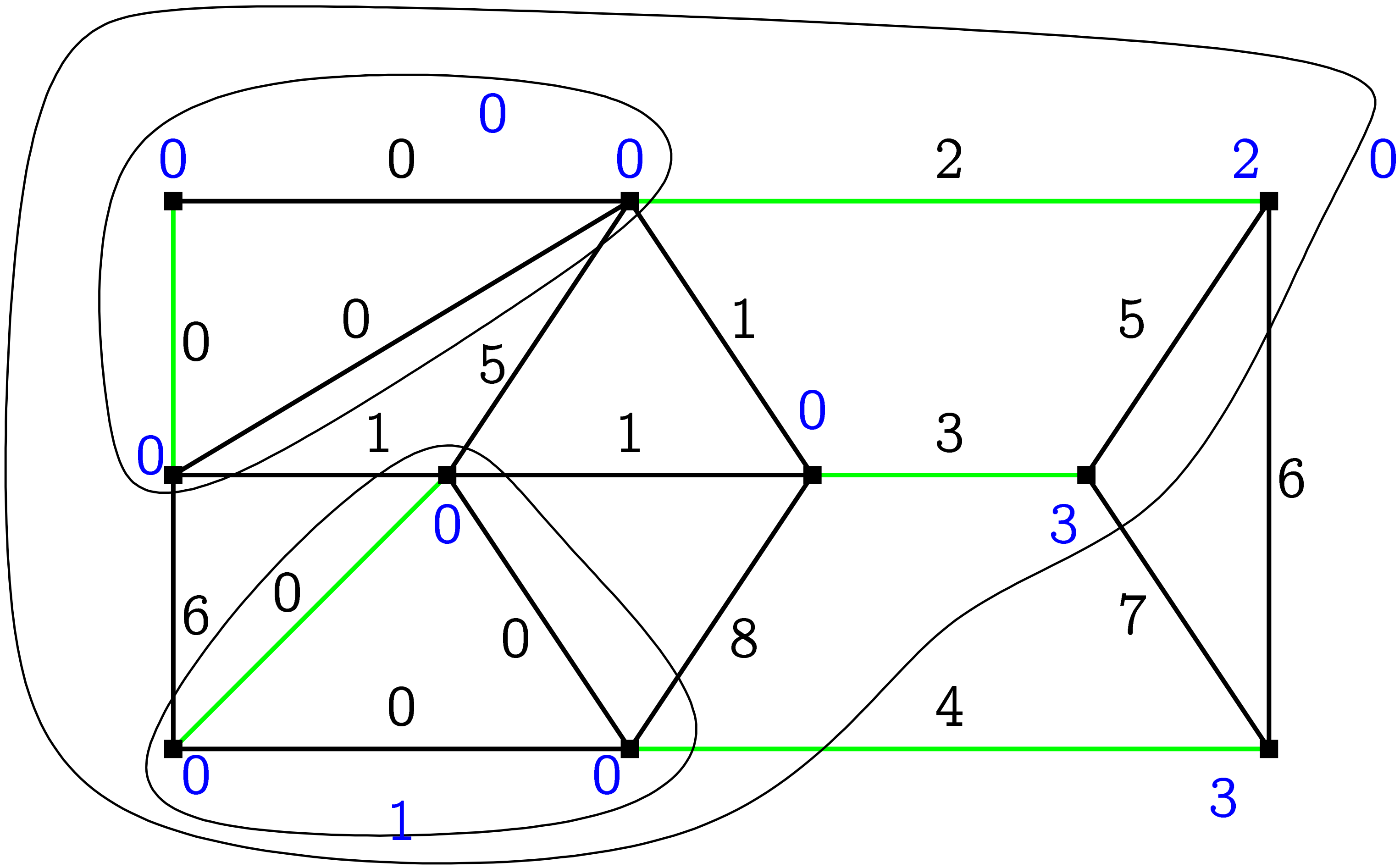

0
0
0
0
2
2
0
0
0
5
1
5
0
1
1
3
0
0
3
6
6
0
0
8
7
0
4
0
0
3
1
Ω
π
M
w



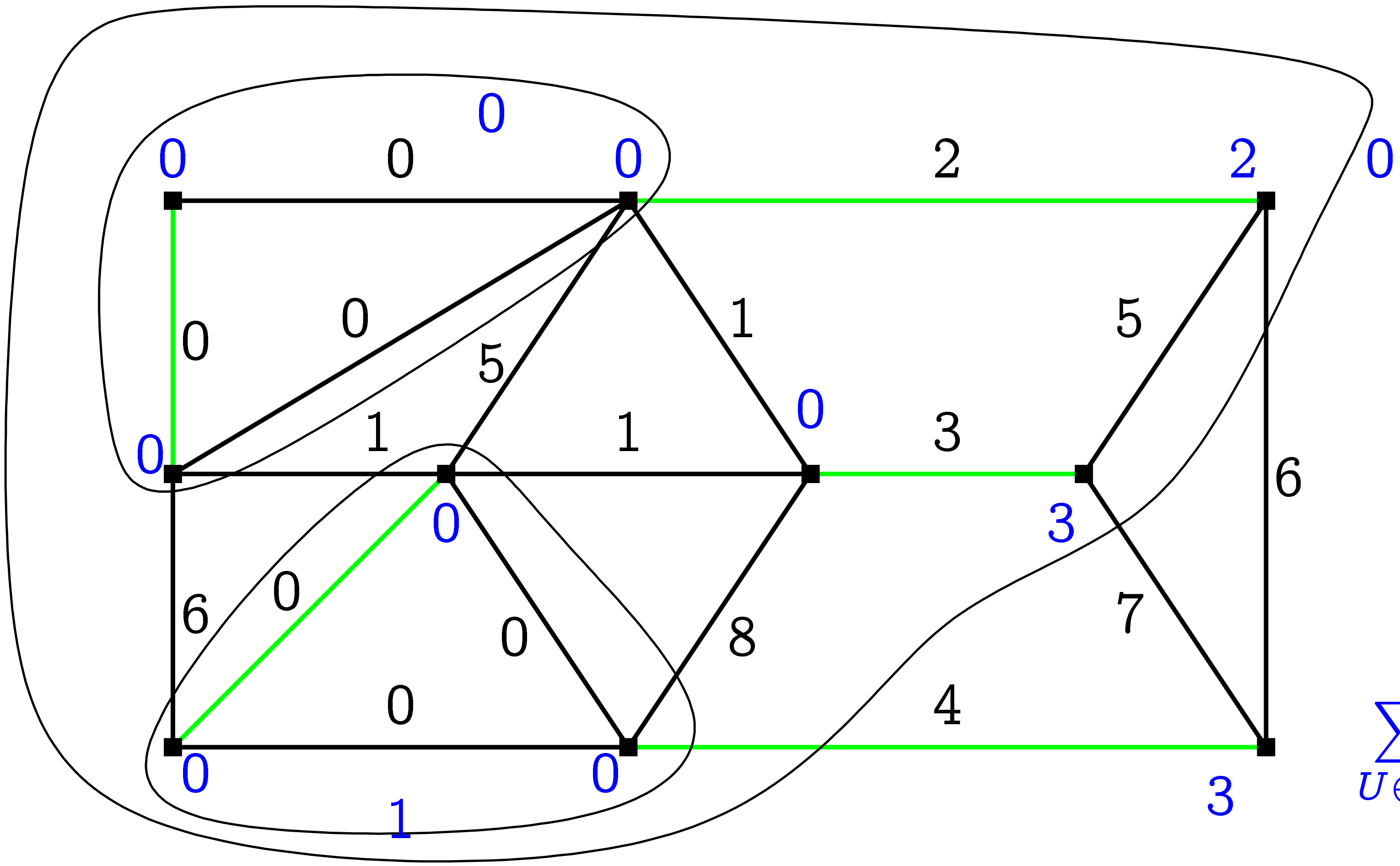
Ω π M w



Ω π M w



Ω π M w



$$w(M) = 9$$

$$\sum_{U \in \Omega} \pi(U) = 9$$

Ω π M w

Kui palju iteratsioone on?

Kui me oleme leidnud M-laieneva tee, siis $|V(G/\Omega)|-2|M|$ väheneb kahe võrra. Kui me sellist teed ei leidnud (s.t. kasvatasime metsa või tõmbasime tsükli kokku), siis see suurus ei muutunud.

Seega leidub ülimalt $|V|/2$ iteratsiooni, kus leitakse M-laienev tee.

Olgu $W(F) \subseteq V$ kõigi nende tippude hulk, mis jäävad G/Ω-s mingi tipu $\in V^+(F)$ sisse. Olgu $V_0(F) = V(G/\Omega)\backslash V^+(F)$.

Igal iteratsioonil, kus M-laienevat teed ei leitud, suureneb avaldis $2|W(F)| + |V_0(F)|$.

- Kui kasvatati F-i, suureneb $|W(F)|$ vähemalt ühe võrra ning $|V_0(F)|$ väheneb ühe võrra.
- Kui tsükkel U tõmmati kokku, siis olgu x $V^-(F)$-i kuuluvate tippude arv selles tsüklis. $|W(F)|$ suureneb vähemalt x võrra ja $|V_0(F)|$ väheneb x võrra.
- Kui tsükkel U võeti tagasi lahti, siis olgu $2x+1$ tippude arv selles tsüklis. $|W(F)|$ suureneb vähemalt x võrra ja $|V_0(F)|$ suureneb x võrra.

Avaldise $2|W(F)| + |V_0(F)|$ maksimaalne väärtus on $2|V|$.

Seega on iteratsioone ülimalt $|V|^2$.