Graphs, 1st test
October 10th, 2008

Exercise 1. Let $G = (V, E)$ be a graph. Define a relation ρ over E as follows: $e \,\rho\, e'$ if at least one of the following holds:

- $e = e'$;
- there exists a cycle C that contains both e and e'.

Show that ρ is an equivalence relation (i.e. reflexive, symmetric and transitive).

Exercise 2. For any $n \in \mathbb{N}$ define the graph $G_n = (V_n, E_n)$ as follows:

- $V_n = \big\{a \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \mid n\big\}$
- $E_n = \big\{\{a, b\} \in V_n \times V_n \,:\, a \mid b \text{ or } b \mid a\big\}$.

For which values of n is G_n Eulerian?
Hint: if $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ is the prime decomposition of n then n has $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ divisors.

Exercise 3. For any $n \in \mathbb{N}$ define the graph $G_n = (V_n, E_n)$ as follows:

- V_n consists of all subsets of $Z_n = \{1, \ldots, n\}$, except Z_n itself;
- $E_n = \big\{\{A, B\} \in V_n \times V_n \,:\, A \cap B = \emptyset\big\}$.

For which values if n is G_n Hamiltonian?

Exercise 4. Give a description of all trees T, such that $\overline{T}$ is not connected.

Exercise 5. Give examples of graphs with four and five vertices that are isomorphic to their complement graphs. Prove that if $G \cong \overline{G}$, then the number of vertices of G, divided by 4, gives the remainder of either 0 or 1.

The usage of written/printed materials is allowed.

Graafid, 1. kontrolltöö

20. oktoober 2004

Ülesanne 1. Olgu $G = (V, E)$ graaf. Defineerime seose ρ üle hulga E järgmiselt: $e \, \rho \, e'$ parajasti siis, kui kehtib vähemalt üks järgmistest tingimustest:

- $e = e'$;
- leidub tsükkel C, mis sisaldab nii serva e kui ka serva e'.

Näita, et ρ on ekvivalentsiseos (s.t. refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne).

Ülesanne 2. Iga $n \in \mathbb{N}$ defineerime graafi $G_n = (V_n, E_n)$ järgmiselt:

- $V_n = \big\{a \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \mid n\big\}$
- $E_n = \big\{\{a, b\} \in V_n \times V_n \,:\, a \mid b \text{ või } b \mid a\big\}$.

Milliste n-i väärtuste jaoks on G_n Euleri graaf?
Vihje: kui $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ on n-i lahutus algteguriteks, siis on n-il $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ jagajat.

Ülesanne 3. Iga $n \in \mathbb{N}$ defineerime graafi $G_n = (V_n, E_n)$ järgmiselt:

- V_n elementideks on hulga $Z_n = \{1, \ldots, n\}$ kõik alamhulgad, välja arvatud Z_n ise;
- $E_n = \big\{\{A, B\} \in V_n \times V_n \,:\, A \cap B = \emptyset\big\}$.

Milliste n-i väärtuste jaoks on G_n Hamiltoni graaf?

Ülesanne 4. Anna kõigi selliste puude T kirjeldus, mille korral $\overline{T}$ ei ole sidus.

Ülesanne 5. Too näiteid nelja- ja viietipulistest graafidest, mis on isomorfsed oma täiendgraafiga. Tõesta, et kui $G \cong \overline{G}$, siis G tippude arv kas jagub neljaga või annab neljaga jagades jäägi 1.

Paberkandjal materjale tohib kasutada.