Diskreetse matemaatika 2. töö järeltöö

Lahendused

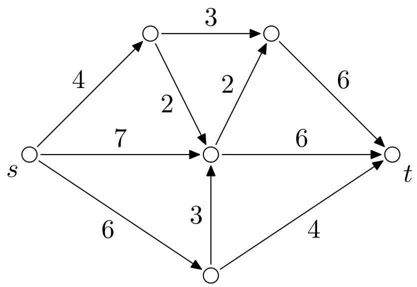
21. jaanuar 2013

1. Leida kõik naturaalarvud n, mille korral eksisteerib n-tipuline Hamiltoni graaf, mille täiend on samuti Hamiltoni graaf.

Lahendus. Kui $n \geqslant 5$, siis sobib otsitavaks graafiks tsükkel C_5. Selle täiend on juhul $n = 5$ samuti kõiki tippe läbiv tsükkel, juhul $n \geqslant 6$ aga regulaarne graaf astmega $n-1-2 = n-3$. Selline graaf on Hamiltoni graaf Ore teoreemi põhjal, sest iga kahe mittenaabertipu astmete summa on $n-3+n-3 = 2n-6$ ning $2n - 6 \geqslant n$, kui $n \geqslant 6$.

Kui aga $n \leqslant 4$, siis nõutavat graafi ei leidu, sest sel juhul ei leidu juba tsükli C_n täiendis tsükleid.

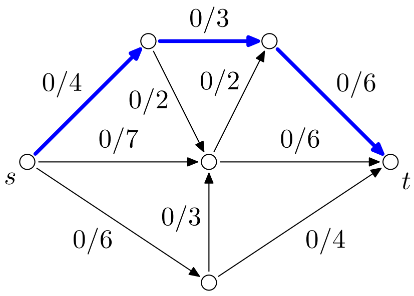
2. Leida järgmises võrgus maksimaalne voog. Esitada ka põhjendus, miks leitud voog on maksimaalne.



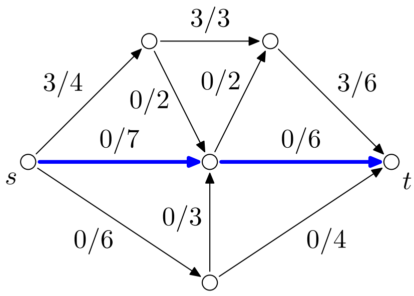
Lahendus. Kasutame Ford-Fulkersoni algoritmi. Lähtudes nullvoost, suurendame joonistel 1–4 voo väärtust vastavalt 3, 6, 4 ja 2 ühiku võrra. Tulemuseks saame joonisel 5 kujutatud voo väärtusega 15. Joonisel 6 on näidatud lõige läbilaskevõimega samuti 15, järelikult Ford-Fulkersoni teoreemi põhjal on leitud voog maksimaalne.

3. Tantsupeost võtab osa 12 poissi ja 12 tüdrukut. Iga poiss on tuttav täpselt 6 tüdrukuga ja iga tüdruk täpselt 6 poisiga. Tõestada, et on võimalik koostada 6-ringiline tantsimiste skeem nii, et iga osavõtja tantsib oma 6 tantsu parajasti nendega, keda ta tunneb.

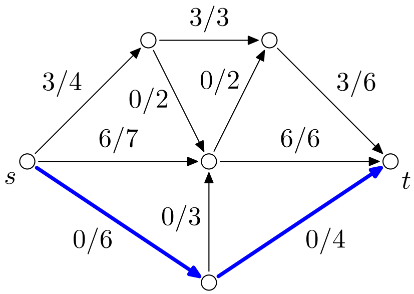
Lahendus. Vaatleme kahealuselist graafi, mille aluse X moodustavad poisid ja aluse Y tüdrukud, ning milles tipud $u \in X$ ja $v \in Y$ on servaga ühendatud parajasti siis, kui u ja v on omavahel tuttavad. Olgu $S \subseteq X$ suvaline hulk. Hulga S tippudega on intsidentsed $6|S|$ serva. Et ka hulgas Y on iga tipu



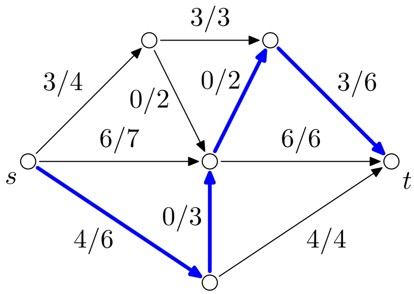
Joonis 1.



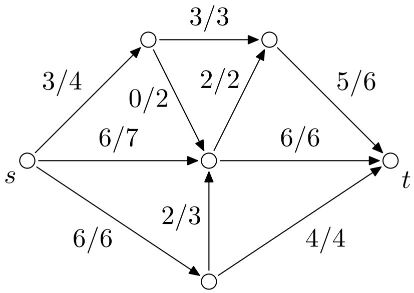
Joonis 2.



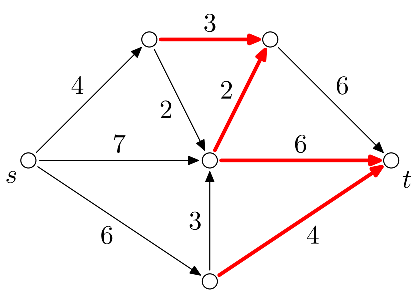
Joonis 3.



Joonis 4.



Joonis 5.



Joonis 6.

aste 6, siis jaotuvad need servad hulgas Y mitte vähem kui $|S|$ tipu vahel. Järelikult $|N(S)| \geqslant |S|$. Halli teoreemi põhjal leidub graafis täielik kooskõla. Eemaldame selle kooskõla servad graafist. Järele jääb graaf, mille iga tipu aste on 5. Analoogiliselt tõestame, et ka selles graafis leidub täielik kooskõla. Eemaldame ka need servad jne. Seda protsessi jätkame, kuni saame graafi, mille iga tipu aste on 0. Igal sammul eemaldatud servad näitavadki kätte, kes kellega vastavas ringis tantsib.

Märkus. Täieliku kooskõla leidumise tõestamiseks võime kasutada ka graafide õpiku lk 56 järeldust 7.3.

4. Tasandilises graafis on iga tipu aste 3 ning iga tahk viisnurk. Leida graafi tippude arv.

Lahendus. Olgu n, m ja f vastavalt graafi tippude, servade ja tahkude arv. Siis Euleri valemi põhjal $n - m + f = 2$. Et iga tipu aste on 3 ja tipuastmete summa on võrdne servade arvu kahekordsega, siis $3n = 2m$ ehk $m = \frac{3}{2}n$. Et iga tahk on viisnurk ja iga serv kuulub täpselt kahele tahule, siis $5f = 2m$ ehk $f = \frac{2}{5}m = \frac{3}{5}n$. Pannes need avaldised Euleri valemisse, saame $n - \frac{3}{2}n + \frac{3}{5}n = 2$, millest $n = 20$.

5. Olgu G graaf ja $U \subseteq V(G)$ võimsuse poolest suurim selline hulk, millesse kuuluvate tippude vahel pole ühtegi serva. Tõestada, et

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{|U|}.$$

Lahendus. Oletame, et graafi tipud on korrektselt värvitud $\chi(G)$ värviga ning olgu n_i selles värvimises i-ndat värvi tippude arv ($i = 1, \ldots, \chi(G)$). Siis ühte värvi tippude hulk on alati selline hulk, millesse kuuluvate tippude vahel pole ühtegi serva. Järelikult

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} n_i \leqslant \sum_{i=1}^{\chi(G)} |U| = \chi(G)|U|,$$

millest $\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{|U|}$.