Diskreetse matemaatika 3. kontrolltöö
Lahendused

20. detsember 2012

1. Olgu n mittenegatiivne täisarv. Arvutada summa

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}\binom{n+1}{n+1-i}.$$

Lahendus. Teisendame summat:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}\binom{n+1}{n+1-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+1}{n+1-i}=$$
$$=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i}\binom{n+1}{n+1-i}=\binom{2n+1}{n+1}=\binom{2n+1}{n},$$

kus oleme kasutanud binoomkordajate sümmeetrilisuse omadust ja Vandermonde'i võrdust.

2. Mitmel viisil saab jagada 15 ühesugust kommi ühe täiskasvanu ja kolme lapse vahel nii, et täiskasvanu saab ülimalt 2 kommi, kuid iga laps võib saada ükskõik millise arvu?

Lahendus. Täiskasvanu kommide arvu loend on $1+z+z^2$, iga lapse kommide arvu loend aga $1+z+z^2+\ldots=\frac{1}{1-z}$. Seega kommide jagamisvõimaluste loend (täiskasvanu ja kolm last) on

$$\frac{1+z+z^2}{(1-z)^3}=\frac{1}{(1-z)^3}+\frac{z}{(1-z)^3}+\frac{z^2}{(1-z)^3}.$$

Meil on vaja leida liikme z^{15} kordaja. Avaldises $\frac{1}{(1-z)^3}$ on liikmete z^{15}, z^{14}, z^{13} kordajad vastavalt $\binom{17}{15}$, $\binom{16}{14}$, $\binom{15}{13}$. Otsitav kordaja on seega

$$\binom{17}{15}+\binom{16}{14}+\binom{15}{13}=\binom{17}{2}+\binom{16}{2}+\binom{15}{2}=136+120+105=361.$$

3. Olgu a_n võimaluste arv ehitada n-korruselist torni järgmist liiki plokkidest: punane 1-korruseline plokk, punane 2-korruseline plokk, sinine 1-korruseline plokk, sinine 2-korruseline plokk. Näiteks $a_1=2$ ja $a_2=6$.

a) Leida arvujada (a_n) genereeriv funktsioon.

b) Leida selle abil a_n avaldis.

Lahendus. Jaotame kõik n-korruselised tornid klassidesse selle järgi, mis plokk on kõige alumine. Kui kõige all on 1-korruseline punane või sinine plokk, siis võib selle peale olla ükskõik milline torn kõrgusega $n-1$ korrust, seda torni saab moodustada a_{n-1} viisil. Analoogiliselt, kui kõige all on 2-korruseline punane või sinine plokk, siis saab selle peale torni moodustada a_{n-2} viisil. Järelikult $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ehk pärast indeksi nihutamist

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Defineerides $a_0 = 1$, kehtib see võrduse iga $n = 2, 3, \ldots$ korral.

Korrutame võrduse pooli suurusega z^n ja liidame iga $n = 2, 3, \ldots$ korral:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n.$$

Olgu $A(z)$ jada (a_n) genereeriv funktsioon. Eeltoodud võrduse võib siis kirja panna kujul

$$A(z) - a_1 z - a_0 = 2z(A(z) - a_0) + 2z^2 A(z),$$

millest

$$A(z) = \frac{a_0 + a_1 z - 2a_0 z}{1 - 2z - 2z^2} = \frac{1}{1 - 2z - 2z^2}.$$

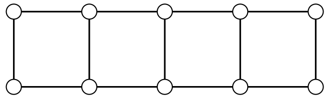
Et nimetaja lahutub teguriteks $1-2z-2z^2 = \big(1-(1+\sqrt{3})z\big)\big(1-(1-\sqrt{3})z\big)$, siis

$$A(z) = \frac{1}{1 - 2z - 2z^2} = \frac{C}{1-(1+\sqrt{3})z} + \frac{D}{1-(1-\sqrt{3})z}.$$

Pärast murdude ühisele nimetajale viimist saame lugejate võrdsusest tingimuse $C(1-(1-\sqrt{3})z)+D(1-(1+\sqrt{3})z) = 1$. Võttes $z = 1/(1+\sqrt{3})$ ja $z = 1/(1-\sqrt{3})$, saame vastavalt $C = (1+\sqrt{3})/(2\sqrt{3})$ ja $D = -(1-\sqrt{3})/(2\sqrt{3})$. Pannes need väärtused $A(z)$ avaldisse sisse ja arendades kummagi murru astmereaks, saame

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\big((1+\sqrt{3})^{n+1} - (1-\sqrt{3})^{n+1}\big).$$

4. Mitmel põhimõtteliselt erineval viisil saab 5 punasest ja 5 sinisest pallist ning neid ühendavatest ühesugustest pulkadest kokku panna joonisel kujutatud „redeli“? Põhimõtteliselt erinevaks loeme viise, mis pole saadavad üksteisest (ümber)pööramise teel.



Lahendus. Leiame kujundi sümmeetriateisenduste rühma G tsüklilisuse indikaatori. Sümmeetriateisendused ja vastavad indikaatorid on: samasusteisendus w_1^{10}, pööre $180°$ võrra w_2^5, peegeldus vertikaalteljest $w_1^2 w_2^4$, peegeldus horisontaalteljest w_2^5. Seega

$$Z_G(w_1, w_2, \ldots, w_{10}) = \frac{1}{4}(w_1^{10} + w_1^2 w_2^4 + 2w_2^5).$$

Olgu x ja y vastavalt punase ja sinise palli kaal. Erinevate redelite loend on siis

$$Z_G(x+y, x^2+y^2, \ldots, x^{10}+y^{10}) = \frac{1}{4}\big((x+y)^{10}+(x+y)^2(x^2+y^2)^4+2(x^2+y^2)^5\big).$$

Ülesande vastus on siin liikme x^5y^5 kordaja. Selline liige tekib sulgude sees esimesest liidetavast kujul x^5y^5 ning teisest liidetavast kujul $x^1y^1 \cdot x^4y^4$. Otsitav kordaja on

$$\frac{1}{4}\left(\binom{10}{5} + \binom{2}{1}\binom{4}{2}\right) = 66.$$