Diskreetne matemaatika 2012

1. praktikum

Reimo Palm

Kokkuvõte tõestusstrateegiatest

Tõestuste ja üldse loogiliste arutluskäikude (sealhulgas ka mittematemaatiliste) praktilisel konstrueerimisel on vaja teada tegelikult üsna väikest arvu loogikareegleid, mis on esitatud järgnevas kokkuvõtlikul kujul. Tõestusülesanne koosneb tavaliselt kahest komponendist: üks osa, mida me loeme kehtivaks või teadaolevaks (eeldus), ning teine osa, mida me soovime järeldada (väide). Tõestuse konstrueerimisel võib alustada kas eeldusest või väitest, arendades neid edasi loogikareeglite kohaselt kas teineteise järel või vaheldumisi, kuni saame tulemuseks lünkadeta järeldumiste ahela. Järgnevaid võtteid võib kasutada igas tõestuse järgus.

Tõestusvõtted lähtudes väitest

Väite kuju	Mida teha?
$A \to B$	Eeldame, et A kehtib, ja tõestame, et B kehtib, VÕI tõestame pöördvastandväite: eeldame, et B ei kehti, ja tõestame, et A ei kehti
$\neg A$	Kasutame vastuväitelist tõestust: eeldame, et A kehtib, ja püüame jõuda vastuolule.
$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n$	Tõestame A_1, A_2, $\ldots$, A_n eraldi (sisuliselt tõestame n erinevat väidet)
$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$	Valime sobivalt välja ühe väide ja tõestame et see kehtib VÕI eeldame, et kõik väited peale mingi ühe ei kehti, ja tõestame, et ülejäänud väide kehtib.
$A \leftrightarrow B$	Tõestame, et korraga kehtivad $A \to B$ ja $B \to A$.
$\forall x A(x)$	Valime vabalt elemendi x ja tõestame, et $A(x)$ kehtib.
$\exists x A(x)$	Valime x sellise väärtuse x_0, mille puhul $A(x)$ on tõene, ja tõestame, et $A(x_0)$ kehtib.

Tõestusvõtted lähtudes eeldusest

Eelduse kuju	Mida teha?
$A \to B$	Kui lisaks on teada, et A kehtib, siis järeldame, et B kehtib, VÕI kasutame pöördvastandväidet: kui lisaks on teada, et B ei kehti, siis järeldame, et A ei kehti.
$\neg A$	Kui vastuväitelise tõestuse käigus on tõestatud, et A kehtib, siis saame siit vajaliku vastuolu.
$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n$	Järeldame, et igaüks lausetest A_1, A_2, ..., A_n eraldi võttes kehtib.
$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$	Vaatleme juhte: esimene juht, kus kehtib A_1, teine juht, kus kehtib A_2 jne, VÕI kui on teada, et mõned lausetest A_1, A_2, ..., A_n ei kehti, siis järeldame, et ülejäänud kehtivad.
$A \leftrightarrow B$	Asendame kahe eeldusega: $A \to B$ ja $B \to A$
$\forall x A(x)$	Kui eelnevalt on sisse toodud mingi element c, siis saame järeldada, et $A(c)$ kehtib.
$\exists x A(x)$	Toome sisse uue tähise, näiteks x_0, märkimaks elementi, mille korral $A(x_0)$ kehtib.

Praktikumiülesanded

Tõestamisülesannete lahendused tuleks eelistatumalt kirja panna vahetu arutluse (sidusa teksti) kujul. Kui kasutate mingeid teadaolevaid fakte (nt juba tõestatud hulgateoreetilisi samasusi) või definitsioone, siis tuleb nendele kasutamise kohas selgelt viidata. Kui peate vajalikuks kasutada mingeid esitusi (nt karakteristlikke funktsioone või taandamist lausearvutusele), siis tuleb ühtlasi selgelt välja tuua, kuidas ülesanne sellele esitusele taandub.

Ka mittetõestamisülesannete lahendustes peavad vastusega kaasnema piisavad selgitused, mis võimaldavad lugejal lihtsasti veenduda vastuse õigsuses.

1. Olgu X, Y, Z hulgad. Tõestada võrdused.

a) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$

b) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

c) $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$

d) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$

e) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$

2. Tõestada sisalduvused.

a) $X' \setminus (Y \cup Z) \subseteq (X \cup Y)'$

b) $(X \cap Y) \setminus (X \cap Z) \subseteq Z'$

c) $(X' \cap Z) \cup (X \cap Y) \subseteq Y \cup (Z \cap Y')$

d) $(Y \setminus X) \cup (Y \setminus Z) \subseteq (X \cap Z)'$

e) $(X \cup Z) \setminus Y \subseteq ((X \cap Y) \cup (Y \cap Z))'$

3. Tõestada, et järgmised väited on samaväärsed.

a) $X \subseteq Y$

b) $X \cup Y = Y$

c) $X \cap Y = X$

d) $X \setminus Y = \emptyset$

e) $X' \cup Y = U$

4. Tõestada, et

a) kui $X \subseteq Y$ ja $Y' \cap Z \neq \emptyset$, siis $X' \cap Z \neq \emptyset$

b) kui $Y \cap Z = \emptyset$ ja $X \cap Z' = \emptyset$, siis $X \cap Y = \emptyset$

5. Olgu antud funktsioonid f, $g \colon X \to Y$. Hulga $A \subseteq X$ elementide kujutised funktsiooniga f moodustavad hulga C ja hulga $B \subseteq X$ elementide kujutised funktsiooniga g hulga D.

a) Kas sellest, et $C \cap D \neq \emptyset$, järeldub, et $A \cap B \neq \emptyset$?

b) Kas punkti a) väide kehtib, kui eeldada, et funktsioonid f ja g on injektiivsed?

c) Kas punkti a) väide kehtib, kui eeldada, et funktsioonid f ja g on sürjektiivsed?

6. Olgu X ja Y teatavad hulgad ning $f \colon X \to Y$ ja $g \colon Y \to X$ sellised kaks funktsiooni, et iga $x \in X$ korral $g(f(x)) = x$. Tõestada, et funktsioon f on injektiivne.

7. Teha kindlaks, kas hulgal X määratud relatsioon on ekvivalents. Kui relatsioon on ekvivalents, siis kirjeldada hulga X faktorhulka selle relatsiooni järgi.

a) $X = \mathbb{Z}$, $\varrho = \{(m, n) \colon |m| = n\}$

b) $X = \mathbb{R}$, $\varrho = \{(x, y) \colon x|y| = y|x|\}$

c) $X=\mathbb{R}$, $\varrho=\{(x,y)\colon x+|y+1|=|x+1|+y\}$

d) $X=\mathbb{R}$, $\varrho=\{(x,y)\colon \mathrm{round}(x)=\mathrm{round}(y)\}$, kus round tähistab ümardamist lähimaks täisarvuks

e) $X=\mathbb{R}$, $\varrho=\{(x,y)\colon \lfloor x-y\rfloor=0\}$

f) $X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\varrho=\{\big((a,b),(c,d)\big)\colon a-d=c-b\}$

8. Leida viga järgmises „tõestuses“.

Iga sümmeetriline ja transitiivne relatsioon on ekvivalents.

Olgu $\varrho\in X\times X$ suvaline hulgal X määratud sümmeetriline ja transitiivne relatsioon. Valime vabalt elemendi $x\in X$. Et relatsioon ϱ on sümmeetriline, siis alati, kui $(x,y)\in\varrho$, on ka $(y,x)\in\varrho$. Et relatsioon ϱ on ka transitiivne, siis seostest $(x,y)\in\varrho$ ja $(y,x)\in\varrho$ järeldub, et $(x,x)\in\varrho$. Arvestades, et element x oli valitud vabalt, saame, et iga elemendi x korral $(x,x)\in\varrho$. Järelikult on relatsioon ϱ refleksiivne. Et ϱ on samal ajal ka sümmeetriline ja transitiivne, siis ta on ekvivalents.

9. Olgu $\varrho\subseteq X\times Y$ ning σ, $\tau\subseteq Y\times Z$ mingid relatsioonid.

a) Tõestada, et $\varrho\circ(\sigma\cup\tau)=(\varrho\circ\sigma)\cup(\varrho\circ\tau)$

b) Tõestada, et $\varrho\circ(\sigma\cap\tau)\subseteq(\varrho\circ\sigma)\cap(\varrho\circ\tau)$

c) Punkti b) tõestus on lineaarne, st seal pole ühtegi hargnemist. Mõnikord võib selliseid tõestusi „tagant ettepoole“ lugedes (pöörates igal sammul järeldumise vastupidiseks) saada esialgse väite pöördväite tõestuse. Leida põhjus, miks siiski antud juhul punkti b) tõestust vastupidiseks pöörates saame mittekorrektse tõestuse.

d) Eelmises punktis leitud põhjust kasutades konstrueerida näide, millest nähtub, et punktis b) vastupidine sisalduvus üldiselt ei kehti.

10. a) Tõestada, et iga refleksiivse ja transitiivse relatsiooni ϱ korral kehtib võrdus $\varrho\circ\varrho=\varrho$.

b) Tuua näide mitterefleksiivsest relatsioonist ϱ, mille korral $\varrho\circ\varrho=\varrho$.

11. Olgu ϱ ja σ sümmeetrilised relatsioonid. Tõestada, et relatsioon $\varrho\circ\sigma$ on sümmeetriline parajasti siis, kui $\varrho\circ\sigma=\sigma\circ\varrho$.

12. Leida järgmiste kujutuste tuumad ja kirjeldada faktorhulki tuuma järgi.

a) $f\colon\{1,2,\dots,100\}\to\mathbb{N}$, $f(n)=\mathrm{ristsumma}(n)$

b) $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(n)=n^2-3n+1$

c) $f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2$

d) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x)=(\sin x,\cos x)$

e) $f\colon\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})\to\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$, $f(X)=X\cap\{2,4\}$

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused. Tõestustes peavad olema kirjas kõik olulised detailid, samas ei tohi tõestus sisaldada ülemäärasel hulgal asjaga väheseotud materjali.

Lahendused esitada elektroonilisel kujul hiljemalt ülejärgmisele praktikumile eelnevaks õhtuks. Et neid lahendusi kasutatakse näitliku õppematerjalina teiste kursusel osalejate puhul, siis palun mitte kirjutada töö peale isiku tuvastamist võimaldavat infot; kogu vajaliku lisateabe võib kirjutada esitamise juurde eraldi kommentaarina.

13. Tõestada vahetu arutluse teel, et ükskõik milliste hulkade X, Y, Z korral kehtib võrdus

$$(Z' \setminus X) \cup (Z' \setminus Y) = ((X \cap Y) \cup Z)'.$$

14. Olgu X ja Y võrdse võimsusega lõplikud hulgad. Olgu antud kaks funktsiooni $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to X$, mis iga $x \in X$ korral rahuldavad tingimust $g(f(x)) = x$. Tõestada, et funktsioon f on sürjektiivne.

15. Tõestada, et relatsioon ϱ on ekvivalents parajasti siis, kui ta rahuldab korraga järgmisi tingimusi:

a) ϱ on refleksiivne;

b) kui $(x, y) \in \varrho$ ja $(y, z) \in \varrho$, siis $(z, x) \in \varrho$.

16. Olgu m, $n \in \mathbb{N}$. Vaatleme relatsiooni $\varrho = \{([x], [x])\colon x \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, kus $[x]$ tähistab täisarvu x sisaldavat ekvivalentsiklassi vastavalt kas hulgas $\mathbb{Z}_m$ või $\mathbb{Z}_n$. Leida tingimus m ja n vahel, mille korral see relatsioon on kujutus. Seda tingimust rahuldavate m ja n korral leida selle kujutuse tuum.