Diskreetne matemaatika 2012

10. praktikum

Reimo Palm

Järgnevas loeme, et $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Praktikumiülesanded

1. Olgu $r \in \mathbb{C}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Tõestada võrdused

a) $k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$

b) $(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}$

c) $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$

2. Mitmed tuntud seosed binoomkordajate vahel, mis kehtivad naturaalarvuliste indeksite korral, ei üldistu muude indeksite juhule. Leida järgmiste võrduste puhul võimalikult üldised tingimused, mida indeksid n ja m peavad rahuldama, et võrdus kehtiks.

a) $\binom{n}{n} = 1$

b) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

3. Tõestada võrdused

a) $r^{\underline{k}}\left(r - \frac{1}{2}\right)^{\underline{k}} = \frac{(2r)^{\underline{2k}}}{2^{2k}}$, kus $r \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$

b) $\binom{-1/2}{n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$, kus $n \in \mathbb{N}$

4. Tõestada, et kui m, $n \in \mathbb{N}$, siis

$$(-1)^m \binom{-n-1}{m} = (-1)^n \binom{-m-1}{n}.$$

5. Tõestada võrdused

a) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\binom{r+i}{i}=\binom{r+n+1}{n}$, kus $r\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$

b) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$, kus m, $n\in\mathbb{N}$

c) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\binom{r}{i}\binom{s}{n-i}=\binom{r+s}{n}$, kus r, $s\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$

6. Olgu m, $n\in\mathbb{N}$, kus $m\leqslant n$. Leida summad.

a) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant m}(-1)^i\binom{n}{i}$

b) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant m}i\binom{n}{i}\binom{m}{i}$

c) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant m}\frac{\binom{m}{i}}{\binom{n}{i}}$

7. Pascali kolmnurgas märgitakse üks arv, mis ei asu kolmnurga küljel. Sellel arvul on kuus vahetut naabrit. Tõestada, et neist kolme omavahel mittekokkupuutuva arvu korrutis võrdub kolme ülejäänud omavahel mittekokkupuutuva arvu korrutisega.

Näide. Kui vaatleme Pascali kolmnurgas

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&\mathbf{4}&&\mathbf{6}&&4&&1&&\\
&1&&\mathbf{5}&&10&&\mathbf{10}&&5&&1&\\
1&&6&&\mathbf{15}&&\mathbf{20}&&15&&6&&1
\end{array}$$

arve, mis ümbritsevad arvu 10, siis $4\cdot 10\cdot 15=6\cdot 5\cdot 20$.

8. a) Olgu f, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mingid n korda diferentseeruvad funktsioonid. Tõestada, et funktsioonide f ja g korrutise tuletis avaldub valemiga

$$(fg)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(i)}g^{(n-i)}.$$

b) Leida funktsioonid f ja g, mille abil punkti a) valemist järeldub binoomvalem

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

c) Leida funktsioonid f ja g, mille abil punkti a) valemist järeldub valem

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{n-i}}.$$

9. Olgu f, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ning $a_{n,k}$ ja $b_{n,k}$ sellised arvud, et

$$\sum_{i=m}^{n} b_{n,i} a_{i,m} = \delta_{n,m},$$

kus $\delta_{m,n}$ on *Kroneckeri sümbol* ($\delta_{m,n} = 1$, kui $m = n$; $\delta_{m,n} = 0$, kui $m \neq n$). Tõestada, et

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} g(i) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(n) = \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} f(i).$$

10. Praktikumist võtab osa n üliõpilast, igaüks esitab praktikumi alguses oma kodutöö. Seejärel jagab praktikumijuhendaja tööd parandamiseks üliõpilaste vahel laiali. Mitmel viisil on võimalik töid jagada nii, et keegi ei saaks tagasi enda oma?

a) Olgu D_n võimaluste arv töid laiali jagada nii, et keegi ei saaks enda oma. Kõikvõimalikud laialijagamised saab jaotada klassidesse, kus täpselt 0, täpselt 1, täpselt 2 jne autorit saavad tagasi enda töö. Selle idee abil avaldada kõigi laialijagamiste arv $n!$ suuruste D_n kaudu.

b) Defineerida sobivad funktsioonid f ja g ning rakendada leitud avaldisele inversioonivalemit.

c) Lihtsustada tulemust.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

11. Olgu m, $n \in \mathbb{N}$. Tõestada võrdus

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \delta_{m,n}.$$

12. Olgu m, $n \in \mathbb{N}$, kusjuures $m \leqslant n$. Leida summa

$$\sum_{i=0}^{m} i \binom{n-i}{n-m}$$

13. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Avaldada arv $\binom{2n-1/2}{n}$ arvu $\binom{2n-1/2}{2n}$ kaudu.

14. Vaatleme Pascali kolmnurga analoogi, mille küljed koosnevad arvude 1 asemel arvudest 1, 2, 3, 4, … ning ülejäänud arvud leitakse tavalise seaduspärasuse järgi. See tähendab, kui $D(n, m)$ on selle kolmnurga n-nda rea m-s arv ($n = 1, 2, \ldots, 1 \leqslant k \leqslant n$), siis $D(n, 1) = D(n, n) = n$ ning iga $1 < k < n$ korral $D(n, k) = D(n-1, k) + D(n-1, k-1)$. Leida $D(n, m)$ avaldis.