Diskreetne matemaatika 2012

10. praktikum

Reimo Palm

Järgnevas loeme, et $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Praktikumiülesanded

1. Olgu $r \in \mathbb{C}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Tõestada võrdused

a) $k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$

b) $(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}$

c) $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$

Lahendus. a) Kui $k \geqslant 1$, siis

$$k\binom{r}{k} = k \cdot \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \frac{r \cdot (r-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} = r\binom{r-1}{k-1}.$$

Kui $k \leqslant 0$, siis kehtib võrdus samuti, sest sel juhul on vasaku ja parema poole väärtus 0.

b) Kui $k \geqslant 0$, siis

$$(r-k)\binom{r}{k} = (r-k) \cdot \frac{r^{\underline{k}}}{k!} =$$
$$= \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)(r-k)}{k!} = r \cdot \frac{(r-1)^{\underline{k}}}{k!} = r\binom{r-1}{k}.$$

Kui $k < 0$, siis on võrduse mõlemad pooled võrdsed 0-ga.

Teine lahendus. Võrduse kehtivus negatiivse täisarvu k korral järeldub vahetult binoomkordaja definitsioonist, seetõttu eeldame, et k on mittenegatiivne täisarv.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus ka r on mittenegatiivne täisarv. Siis kasutades binoomkordajate sümmeetriat, võrdust a) ja uuesti sümmeetriat, saame

$$(r-k)\binom{r}{k} = (r-k)\binom{r}{r-k} = r\binom{r-1}{r-k-1} = r\binom{r-1}{k}.$$

Järelikult kehtib võrdus mittenegatiivsete täisarvude r ja k korral.

Kui nüüd $r \in \mathbb{C}$, siis on nii võrduse vasak kui ka parem pool teatav polünoom muutujast r astmega $k+1$. Nende polünoomide väärtused langevad kokku rohkem kui $k+1$ punktis (kõigi mittenegatiivsete täisarvude r korral). Järelikult on need kaks polünoomi võrdsed – kui moodustada nende polünoomide vahe, siis see on ülimalt $(k+1)$-astme polünoom, millel on rohkem kui $k+1$ nullkohta; niisugune polünoom saab olla ainult konstantselt null. Seega on võrduse vasaku ja parema poole väärtus sama iga $r \in \mathbb{C}$ korral.

Niisugust mõttekäiku, kus võrduse kehtivuspiirkonda laiendatakse polünoomide nullkohtade arvule tuginedes, nimetatakse *polünoomiargumendiks.*

c) Liidame kaks eelnevat võrdust:

$$(r-k)\binom{r}{k} + k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k} + r\binom{r-1}{k-1}$$

ehk

$$r\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k} + r\binom{r-1}{k-1}.$$

Kui $r \neq 0$, siis jagame selle võrduse pooli r-ga. Kui $r = 0$, siis kontrollime esialgse võrduse kehtivust otse.

Teine lahendus. Eeldame, et r on positiivne täisarv ja $k \geqslant 0$. Vaatleme r-elemendilist hulka, milles on ära märgitud üks kindel element A. Sellel hulgal on kokku $\binom{r}{k}$ k-elemendilist alamhulka, millest $\binom{r-1}{k}$ on sellised, mis ei sisalda märgitud elementi (kõik k elementi valitakse ülejäänud $r-1$ elemendi seast), ning $\binom{r-1}{k-1}$ sellised, mis sisaldavad märgitud elementi (selle kõrvale tuleb valida $k-1$ elementi ülejäänud $r-1$ elemendi seast). Järelikult kehtib võrdus positiivsete täisarvude r korral. Võrduse kehtivus suvalise $r \in \mathbb{C}$ korral järeldub nüüd polünoomiargumendist. Eelnev arutlus kehtib eeldusel $k \geqslant 0$. Juhul $k < 0$ kehtib võrdus seetõttu, et kõik binoomkordajad on siis nullid.

Kolmas lahendus. Võrduse võime tõestada ka otsese arvutamisega. Kui $k > 0$, siis

$$\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} = \frac{(r-1)^{\underline{k}}}{k!} + \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} =$$
$$= \frac{(r-1)^{\underline{k-1}} \cdot (r-k)}{k!} + \frac{(r-1)^{\underline{k-1}} \cdot k}{k!} = \frac{(r-1)^{\underline{k-1}} \cdot r}{k!} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \binom{r}{k}.$$

Kui $k \leqslant 0$, siis saab võrduse kehtivust kontrollida vahetult.

2. Mitmed tuntud seosed binoomkordajate vahel, mis kehtivad naturaalarvuliste indeksite korral, ei üldistu muude indeksite juhule. Leida järgmiste võrduste puhul võimalikult üldised tingimused, mida indeksid n ja m peavad rahuldama, et võrdus kehtiks.

a) $\displaystyle\binom{n}{n} = 1$

b) $\displaystyle\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

Lahendus. a) Et binoomkordaja alumine indeks on täisarv, siis peab olema $n \in \mathbb{Z}$. Kui $n < 0$, siis võrdus ei kehti, sest siis $\binom{n}{n} = 0$. Võrdus kehtib juhul $n \geqslant 0$.

b) Samal põhjusel peavad n ja m olema täisarvud. Olgu $n < 0$. Kui lisaks $m \geqslant 0$, siis võrdus ei kehti, sest

$$\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!} \neq 0; \qquad \binom{n}{n-m} = 0,$$

kui aga $m \leqslant n$, siis võrdus samuti ei kehti, sest

$$\binom{n}{m} = 0, \qquad \binom{n}{n-m} = \frac{n^{\underline{n-m}}}{(n-m)!} \neq 0;$$

kui $n < m < 0$, siis võrdus kehtib, mõlemad pooled on võrdsed nulliga (tavaliselt jäetakse selles võrduses juht $n < 0$ siiski tervikuna vaatluse alt välja).

Juhul $n \geqslant 0$ kehtib võrdus alati, ka juhul $m < 0$ või $m > n$, sest siis on tema mõlemad pooled nullid.

3. Tõestada võrdused

a) $\displaystyle r^{\underline{k}}\Big(r - \frac{1}{2}\Big)^{\underline{k}} = \frac{(2r)^{\underline{2k}}}{2^{2k}}$, kus $r \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$

b) $\displaystyle\binom{-1/2}{n} = \Big(-\frac{1}{4}\Big)^n \binom{2n}{n}$, kus $n \in \mathbb{N}$

Lahendus. a) Teisendades võrduse vasakut poolt, saame

$$\begin{aligned}
r^{\underline{k}}\Big(r - \frac{1}{2}\Big)^{\underline{k}} &= r(r-1)\ldots(r-k+1)\Big(r-\frac{1}{2}\Big)\Big(r-\frac{3}{2}\Big)\ldots\Big(r-k+\frac{1}{2}\Big) = \\
&= r\Big(r-\frac{1}{2}\Big)(r-1)\Big(r-\frac{3}{2}\Big)\ldots(r-k+1)\Big(r-k+\frac{1}{2}\Big) = \\
&= \frac{2r(2r-1)(2r-2)\ldots(2r-2k+2)(2r-2k+1)}{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2} = \frac{(2r)^{\underline{2k}}}{2^{2k}}.
\end{aligned}$$

b) Teisendame vasakut poolt:

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)^{\underline{n}}}{n!} = \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-1)/2)}{n!} =$$
$$= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{2^n\cdot n!\cdot 2^n\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = \Big(-\frac{1}{4}\Big)^n\binom{2n}{n}.$$

4. Tõestada, et kui m, $n \in \mathbb{N}$, siis

$$(-1)^m\binom{-n-1}{m} = (-1)^n\binom{-m-1}{n}.$$

Lahendus. Kasutades võrdust $\binom{r}{k} = (-1)^k\binom{k-r-1}{k}$, mis kehtib iga $r \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ korral, saame

$$(-1)^m\binom{-n-1}{m} = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n} = (-1)^n\binom{-m-1}{n}.$$

5. Tõestada võrdused

a) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\binom{r+i}{i} = \binom{r+n+1}{n}$, kus $r \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$

b) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$, kus m, $n \in \mathbb{N}$

c) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\binom{r}{i}\binom{s}{n-i} = \binom{r+s}{n}$, kus r, $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$

Lahendus. a) Kui $n < 0$, siis on võrduse mõlemad pooled nullid. Olgu $n \geqslant 0$. Vaatleme võrduse vasakul poolel olevat summat

$$\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \binom{r+2}{2} + \ldots + \binom{r+n}{n}.$$

Et $\binom{r}{0} = \binom{r+1}{0}$, siis kahe esimese liikme summa on

$$\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} = \binom{r+1}{0} + \binom{r+1}{1} = \binom{r+2}{1},$$

lisades siia summa kolmanda liikme, saame

$$\binom{r+2}{1} + \binom{r+2}{2} = \binom{r+3}{2}$$

jne, kuni pärast viimase liikme lisamist tekibki võrduse parem pool.

Kombinatoorne lahendus. Olgu $r \in \mathbb{N}$. Valime $r+n+1$ arvu $0, 1, \ldots, r+n$ seast välja n arvu. Ühelt poolt on selleks $\binom{r+n+1}{n}$ võimalust. Teiselt poolt jaotame võimalused rühmadeks selle järgi, mitu järjestikust arvu jada lõpust valikusse kuulub. Kui valikusse kuulub täpselt $n-i$ viimast arvu, siis nendele eelnev arv kindlasti sinna ei kuulu. Seega tuleb ülejäänud $r+n+1-(n-i+1)=r+i$ arvu hulgast valida veel i arvu, selleks on $\binom{r+i}{i}$ võimalust. Liites kõik need tulemused $i=0, 1, \ldots, n$ korral, saame parajasti kõikvõimalike valikute arvu.

Võrduse kehtivus suvalise $r \in \mathbb{C}$ korral järeldub polünoomiargumendist.

b) Lisame vasakule poolele nulliga võrduva liikme $\binom{0}{m+1}$, millega summa omandab kuju

$$\binom{0}{m+1}+\binom{1}{m}+\binom{2}{m}+\ldots\binom{n}{m}.$$

Seose $\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$ põhjal on

$$\binom{0}{m+1}+\binom{1}{m}=\binom{1}{m+1}.$$

Lisades siia juurde kolmanda liikme, saame

$$\binom{1}{m+1}+\binom{2}{m}=\binom{3}{m+1}$$

jne, kuni pärast viimase liikme lisamist tekibki summa parem pool.

Kombinatoorne lahendus. Valime $n+1$ arvu $0, 1, \ldots, n$ hulgast $m+1$ arvu. Ühelt poolt on selleks võimalusi $\binom{n+1}{m+1}$. Teiselt poolt jaotame valikud rühmadesse selle järgi, milline on seal kõige suurem arv. Kui kõige suurem arv valikus on i, siis tuleb ülejäänud i arvu $0, 1, \ldots, i-1$ seast valida m arvu, selleks on $\binom{i}{m}$ võimalust. Et iga võimalik arvuvalik kuulub täpselt ühte rühma, siis on kõigi valikute arv parajasti võrduse vasak pool.

c) Kui $n<0$, siis on võrduse mõlemad pooled nullid. Olgu $n \geqslant 0$. Eeldame esialgu, et r ja s on naturaalarvud. Vaatleme järgmist ülesannet: mitmel viisil saab r mehest ja s naisest välja valida n-liikmelise rühma? Võrduse vasak pool loendab neid rühmi lõikumatute klasside kaupa, kus ühte klassi kuuluvad need rühmad, milles on i meest ja $n-i$ naist ($i=0, 1, \ldots, n$). Võrduse parem pool loendab rühmi otse. Võrduse üldistus suvaliste r ja s juhule järeldub polünoomiargumendist (iga fikseeritud s korral on võrduse vasakul ja paremal poolel olevad muutuja r polünoomid võrdsed).

6. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$, kus $m \leqslant n$. Leida summad.

a) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant m} (-1)^i \binom{n}{i}$

b) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant m} i\binom{n}{i}\binom{m}{i}$

c) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant m} \frac{\binom{m}{i}}{\binom{n}{i}}$

Lahendus. a) Võrduse $\binom{r}{k} = (-1)^k\binom{k-r-1}{k}$ ja ülesande 5 a) põhjal

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant m} (-1)^i\binom{n}{i} = \sum_{0\leqslant i\leqslant m} \binom{i-n-1}{i} = \binom{-n+m}{m} = (-1)^m\binom{n-1}{m}.$$

b) Ülesande 1 a) põhjal $i\binom{m}{i} = m\binom{m-1}{i-1}$, seega võime summa esitada kujul

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant m} i\binom{n}{i}\binom{m}{i} = \sum_{0\leqslant i\leqslant m} \binom{n}{i}m\binom{m-1}{i-1} = m\sum_{0\leqslant i\leqslant m} \binom{n}{i}\binom{m-1}{i-1}.$$

Summa all on teine tegur

$$\binom{m-1}{i-1} = \binom{m-1}{m-i},$$

viimane võrdus kehtib ka siis, kui $i = 0$, sest siis on mõlemad pooled võrdsed nulliga. Ülesande 5 c) põhjal saame edasi

$$m\sum_{0\leqslant i\leqslant m} \binom{n}{i}\binom{m-1}{i-1} = m\sum_{0\leqslant i\leqslant m} \binom{n}{i}\binom{m-1}{m-i} = m\binom{n+m-1}{m}.$$

c) Et $\binom{n}{m}\binom{m}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{m-i}$, siis

$$\frac{\binom{m}{i}}{\binom{n}{i}} = \frac{\binom{n-i}{m-i}}{\binom{n}{m}}.$$

Järelikult

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant m} \frac{\binom{m}{i}}{\binom{n}{i}} = \frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{0\leqslant i\leqslant m} \binom{n-i}{m-i}.$$

Viimases summas võtame kasutusele uue summeerimisindeksi $j = m - i$, siis $i = m - j$ ning summeerimisrajade $0 \leqslant i \leqslant m$ asemel saame $0 \leqslant j \leqslant m$. Seega

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant m} \binom{n-i}{m-i} = \sum_{0\leqslant j\leqslant m} \binom{n-m+j}{j} = \binom{n+1}{m}$$

vastavalt ülesandele 5 a). Järelikult

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant m} \frac{\binom{m}{i}}{\binom{n}{i}} = \frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{n+1}{n+1-m}.$$

7. Pascali kolmnurgas märgitakse üks arv, mis ei asu kolmnurga küljel. Sellel arvul on kuus vahetut naabrit. Tõestada, et neist kolme omavahel mittekokkupuutuva arvu korrutis võrdub kolme ülejäänud omavahel mittekokkupuutuva arvu korrutisega.

Näide. Kui vaatleme Pascali kolmnurgas

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & \mathbf{5} & & 10 & & \mathbf{10} & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & \mathbf{15} & & \mathbf{20} & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

arve, mis ümbritsevad arvu 10, siis $4 \cdot 10 \cdot 15 = 6 \cdot 5 \cdot 20$.

Lahendus. Algebralisel kujul kirjapanduna on see võrdus

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Avaldades vasaku ja parema poole faktoriaalide kaudu, saame, et mõlemad pooled võrduvad suurusega

$$\frac{(n-1)!n!(n+1)!}{(k-1)!k!(k+1)!(n-k-1)!(n-k)!(n-k+1)!}.$$

8. a) Olgu f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mingid n korda diferentseeruvad funktsioonid. Tõestada, et funktsioonide f ja g korrutise tuletis avaldub valemiga

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

b) Leida funktsioonid f ja g, mille abil punkti a) valemist järeldub binoomvalem

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

c) Leida funktsioonid f ja g, mille abil punkti a) valemist järeldub valem

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{n-i}}.$$

Lahendus. a) Tõestame väite induktsiooniga n järgi, kasutades korrutise tuletise leidmise reeglit. Kui $n = 1$, siis taandub väide võrduseks $(fg)' = fg' + f'g$, mis kehtib. Eeldame nüüd, et väide kehtib mingi naturaalarvu n korral ning vaatleme naturaalarvu $n+1$. Siis

$$(fg)^{(n+1)} = \big((fg)^n\big)' = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}\right)' =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i+1)} g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \binom{n}{0} f g^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)g} + \binom{n+1}{0} f g^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)}.$$

b) Valime $f(t) = e^{xt}$, $g(t) = e^{yt}$. Siis $(fg)(t) = e^{xt+yt} = e^{(x+y)t}$ ja punkti a) võrdus omandab kuju

$$(x+y)^n \, e^{xt+yt} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i e^{xt} y^{n-i} e^{yt},$$

millest pärast mõlema poole jagamist suurusega e^{xt+yt} järeldubki vajalik võrdus.

c) Valime $f(t) = (1+t)^{x}$, $g(t) = (1+t)^{y}$. Siis $(fg)(t) = (1+t)^{x+y}$ ning punkti a) võrduse põhjal

$$(x+y)^{\underline{n}} (1+t)^{x+y-n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\underline{i}} (1+t)^{x-i} y^{\underline{n-i}} (1+t)^{y-n+i}.$$

Et paremas pooles $(1+t)^{x-i}(1+t)^{y-n+i} = (1+t)^{x+y-n}$, siis saame võrduse mõlemat poolt selle suurusega jagada, millega järele jääb parajasti vajalik võrdus.

Märkus. Mõlemas viimases punktis kasutatud funktsioonid on kujul $f(t) = \mathrm{e}^{xh(t)}$, $g(t) = \mathrm{e}^{yh(t)}$, kus $h(0) = 0$.

9. Olgu f, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ning $a_{n,k}$ ja $b_{n,k}$ sellised arvud, et

$$\sum_{i=m}^{n} b_{n,i} a_{i,m} = \delta_{n,m},$$

kus $\delta_{m,n}$ on *Kroneckeri sümbol* ($\delta_{m,n} = 1$, kui $m = n$; $\delta_{m,n} = 0$, kui $m \neq n$). Tõestada, et

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} g(i) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(n) = \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} f(i).$$

Lahendus. Sümmeetria tõttu piisab kontrollida ainult järeldumist vasakult paremale:

$$\sum_{i=0}^{n} b_{n,i} f(i) = \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} \sum_{j=0}^{i} a_{i,j} g(j) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} b_{n,i} a_{i,j} g(j) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} b_{n,i} a_{i,j} g(j) = \sum_{j=0}^{n} \delta_{n,j} g(j) = g(n).$$

10. Praktikumist võtab osa n üliõpilast, igaüks esitab praktikumi alguses oma kodutöö. Seejärel jagab praktikumijuhendaja tööd parandamiseks üliõpilaste vahel laiali. Mitmel viisil on võimalik töid jagada nii, et keegi ei saaks tagasi enda oma?

a) Olgu D_n võimaluste arv töid laiali jagada nii, et keegi ei saaks enda oma. Kõikvõimalikud laialijagamised saab jaotada klassidesse, kus täpselt 0, täpselt 1, täpselt 2 jne autorit saavad tagasi enda töö. Selle idee abil avaldada kõigi laialijagamiste arv $n!$ suuruste D_n kaudu.

b) Defineerida sobivad funktsioonid f ja g ning rakendada leitud avaldisele inversioonivalemit.

c) Lihtsustada tulemust.

Lahendus. Olgu D_n võimaluste arv jagada tööd laiali nii, et keegi ei saa enda oma. Üldse on tööde jagamiseks $n!$ võimalust. Jaotame need võimalused klassidesse sõltuvalt sellest, mitu autorit saavad tagasi oma töö. Kui täpselt i isikut saavad tagasi enda töö, siis nende isikute väljavalimiseks on $\binom{n}{i}$ võimalust. Anname neile nende tööd kätte. Järele jääb $n - i$ tööd. Ülejäänud $n - i$ isikust ei tohi keegi saada oma tööd, seega nendele tööde andmiseks on D_{n-i} võimalust. Seega neid võimalusi, kus täpselt i inimest saavad tagasi oma töö, on $\binom{n}{i}D_{n-i}$. Et iga jagamisvõimalus kuulub parajasti ühte klassi, kus $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, siis

$$n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{n-i}.$$

Võtame kasutusele uue summeerimisindeksi $n - i = j$ ja pöörame summeerimisjärjekorra ümber. Saame

$$n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} D_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_j.$$

Loengus on tõestatud inversioonivalem: kui $f,\ g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, siis

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(k) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k g(k).$$

Valime $f(n) = (-1)^n D_n$ ja $g(n) = n!$. Siis vastab viimati saadud võrdus siin parajasti vasakpoolsele võrdusele. Seega inversioonivalemi põhjal

$$(-1)^n D_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j j!.$$

Avaldades binoomkordaja faktoriaalide kaudu, võime selle võrduse kirjutada kujul

$$D_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j} \frac{n!}{(n-j)!}.$$

Muutes uuesti summeerimisindeksit $n - j = i$ ja summeerimisjärjekorda, saame

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Selle kuju võime lugeda lõppvastuseks, aga võime ka tähele panna, et $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = \mathrm{e}^{-1}$. Siis

$$\frac{n!}{\mathrm{e}} - D_n = n! \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \Big(1 - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \ldots \Big).$$

Sulgude sees on vahelduvate märkidega summa, mille üldliikme absoluutväärtus läheneb monotoonselt nullile. Seetõttu asub selle summa väärtus rangelt 1 ja $1 - \frac{1}{n+2}$ vahel. Seega juhul $n \geqslant 1$ on $|\frac{n!}{\mathrm{e}} - D_n| < \frac{1}{2}$. Et D_n on täisarv, siis

$$D_n = \mathrm{round}\Big(\frac{n!}{\mathrm{e}}\Big), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Üldse on n-elemendilisel hulgal $n!$ permutatsiooni, neist D_n on sellised, kus ükski element ei asu oma esialgsel positsioonil. Viimane valem näitab, et kui n üliõpilase tööd jagada tagasi juhuslikult, siis tõenäosus, et keegi ei saa enda oma, on ligikaudu $\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}3679\ldots$ Viga kahaneb väga kiiresti, näiteks täpsus neli kümnendkohta saavutatakse juba $n = 7$ juures.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

11. Olgu m, $n \in \mathbb{N}$. Tõestada võrdus

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \delta_{m,n}.$$

Lahendus. Võrduse $\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ abil saame

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{n-m}{k-m} =$$

$$= \binom{n}{m} \sum_{l=0}^{n-m} (-1)^{l} \binom{n-m}{l} = \binom{n}{m} (1-1)^{n-m} = \binom{n}{m} \delta_{m,n} = \delta_{m,n}.$$

12. Olgu m, $n \in \mathbb{N}$, kusjuures $m \leqslant n$. Leida summa

$$\sum_{i=0}^{m} i \binom{n-i}{n-m}$$

Lahendus. Kasutame võrdust 5 a):

$$\sum_{i=0}^{m} i \binom{n-i}{n-m} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} \binom{n-i}{n-m} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=j}^{m} \binom{(n-m)+(m-i)}{n-m} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} \binom{n-m+k}{n-m} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} \binom{n-m+k}{k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \binom{n-j+1}{m-j} = \sum_{l=0}^{m-1} \binom{n-m+l+1}{l} = \binom{n+1}{m-1}.$$

Teine lahendus. Kasutame võrdust 5 c):

$$\sum_{i=0}^{m} i\binom{n-i}{n-m} = \sum_{i=1}^{m}\binom{i}{1}\binom{n-i}{n-m} = \sum_{i=1}^{m}\binom{i}{i-1}\binom{n-i}{m-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\binom{-2}{i-1}(-1)^{m-i}\binom{m-n-1}{m-i} =$$

$$= (-1)^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{-2}{j}\binom{m-n-1}{m-1-j} = (-1)^{m-1}\binom{m-n-3}{m-1} = \binom{n+1}{m-1}.$$

13. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Avaldada arv $\binom{2n-1/2}{n}$ arvu $\binom{2n-1/2}{2n}$ kaudu.

Lahendus. Teisendame kumbagi binoomkordajat:

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(2n-\frac{1}{2})^{\underline{n}}}{n!} = \frac{(2n-\frac{1}{2})(2n-\frac{3}{2})\dots(2n-\frac{2n-1}{2})}{n!} =$$

$$= \frac{(4n-1)(4n-3)\dots(2n+1)\cdot(4n)(4n-2)\dots(2n+2)}{2^n\, n!\, 2^n\, (2n)^{\underline{n}}} =$$

$$= \frac{(4n)^{\underline{2n}}}{2^{2n}\,(2n)!} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{4n}{2n},$$

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n} = \frac{(2n-\frac{1}{2})^{\underline{2n}}}{(2n)!} = \frac{(2n-\frac{1}{2})(2n-\frac{3}{2})\dots\cdot\frac{1}{2}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{(4n-1)(4n-3)\dots\cdot 1\cdot(4n)(4n-2)\dots\cdot 2}{2^{2n}\,(2n)!\,2^{2n}\,(2n)!} =$$

$$= \frac{(4n)!}{2^{4n}\,(2n)!\,(2n)!} = \frac{1}{2^{4n}}\binom{4n}{2n}.$$

Järelikult

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{n} = 2^{2n}\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n}.$$

14. Vaatleme Pascali kolmnurga analoogi, mille küljed koosnevad arvude 1 asemel arvudest 1, 2, 3, 4, ... ning ülejäänud arvud leitakse tavalise seaduspärasuse järgi. See tähendab, kui $D(n,m)$ on selle kolmnurga n-nda rea m-s arv ($n = 1, 2, \dots, 1 \leqslant k \leqslant n$), siis $D(n,1) = D(n,n) = n$ ning iga $1 < k < n$ korral $D(n,k) = D(n-1,k) + D(n-1,k-1)$. Leida $D(n,m)$ avaldis.

Lahendus. Et binoomkordajad $\binom{n}{k}$ rahuldavad ülesande seost iga n ja k korral, siis lineaarsuse tõttu rahuldab seost ka suvaline lineaarkombinatsioon

$$c_1\binom{n+a_1}{k+b_1} + c_2\binom{n+a_2}{k+b_2} + \dots + c_s\binom{n+a_s}{k+b_s},$$

kus a_i, b_i ja c_i on arvulised konstandid. Seega piisab valida need konstandid nii, et see lineaarkombinatsioon rahuldaks rajatingimusi $D(n,1) = n$ ja $D(n,n) = n$ ($n = 1, 2, \dots$). Võtame $c_1\binom{n+a_1}{k+b_1} = \binom{n}{k}$. Et $\binom{n}{1} = n$ ja $\binom{n}{n} = 1$, siis võtame $c_2\binom{n+a_2}{k+b_2} = \binom{n-1}{k-2}$, mille puhul $\binom{n-1}{1-2} = 0$ ja $\binom{n-1}{n-2} = n-1$ ($n = 1, 2, \dots$). Järelikult

$$\begin{aligned} D(n,k) = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-2} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1}. \end{aligned}$$