Diskreetne matemaatika 2012

11. praktikum

Reimo Palm

Genereeriv funktsioon on formaalne astmerida, mille kordajateks on teatava arvujada (a_n) liikmed a_0, a_1, … Sagedamini esinevad harilik genereeriv funktsioon

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ja eksponentsiaalne genereeriv funktsioon

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}.$$

Genereerivate funktsioonidega saab teha tehteid nagu liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, diferentseerimine, integreerimine, kompositsiooni leidmine jne. Kombinatoorsete rakenduste aluseks on analoogia korrutamisreegli ja funktsioonide korrutamise ning liitmisreegli ja funktsioonide liitmise vahel.

Kõigis järgnevates ülesannetes, kui pole märgitud teisiti, tähendab genereeriv funktsioon harilikku genereerivat funktsiooni.

Praktikumiülesanded

1. Leida järgmiste jadade genereerivad funktsioonid.

a) $1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, \ldots$

b) $1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

c) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

d) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

e) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

f) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

g) $0,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$

h) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots$

Lahendus.

a) $1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4 = (1+z)^4$

b) $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, vastavalt geomeetrilise jada summa valemile

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = \frac{1}{1-z^2}$

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right)' = \left(z \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \left(\frac{z}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}$

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} = \int \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right) \mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}z}{1+z} = \ln(1+z) + C$; võttes aga $z = 0$, saame esimese ja viimase avaldise võrdsusest $0 = 0 + C$, st $C = 0$.

h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n+2}\right)'' - \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right)' = \left(\frac{z^2}{1-z}\right)'' - \left(\frac{z}{1-z}\right)' = \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$

2. Mitmel viisil saab õunte, banaanide, apelsinide ja pirnide hulgast panna kotti n puuvilja nii, et oleksid rahuldatud järgmised tingimused?

- Õunte arv on paaris.
- Banaanide arv on arvu 5 kordne.
- Apelsinide arv on ülimalt 4.
- Pirnide arv on ülimalt 1.

Lahendus. Moodustame genereerivad funktsioonid, mis näitavad võimaluste arvu eeldusel, et valitakse ainult õunu, banaane, apelsine või pirne:

$$\begin{aligned}
\tilde{O}(z) &= 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots = \frac{1}{1-z^2}\\
B(z) &= 1 + z^5 + z^{10} + \ldots = \frac{1}{1-z^5}\\
A(z) &= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}\\
P(z) &= 1 + z
\end{aligned}$$

Kõigi valikute puhul näitab võimaluste arvu genereeriv funktsioon

$$\tilde{O}(z)B(z)A(z)P(z) = \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdot \frac{1-z^5}{1-z} \cdot (1+z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Vastavalt ülesandele 1 (või ka üldistatud binoomvalemile)

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Järelikult saab n puuvilja kotti panna $n+1$ viisil.

3. Pokkerikaartide pakis on 32 kaarti, nende hulgas 10 punast, 10 kollast ja 10 sinist. Iga värvi kaardid on nummerdatud erinevate numbritega 1, 2, …, 10. Lisaks on kaardipakis kaks erinevat jokkerit, mõlemad numbriga 0. Kaart numbriga k annab 2^k punkti. Nimetame kaardikomplekti *heaks*, kui nende punktide summa on 2012. Leida heade kaardikomplektide arv.

Lahendus. Kaardikomplekti punktide summa genereeriv funktsioon on

$$\begin{aligned}
G(z) &= (1+z)^2 \prod_{k=1}^{10} (1 + z^{2^k})^3 = \\
&= (1+z)^2 \cdot \frac{(1-z^2)^3(1+z^2)^3(1+z^4)^3(1+z^8)^3 \ldots (1+z^{1024})^3}{(1-z^2)^3} = \\
&= (1+z)^2(1-z^{2048})^3(1-z^2)^{-3} = \\
&= (1+2z+z^2)(1-3z^{2048}+3z^{4096}-z^{6144})(1+3z^2+6z^4+10z^6+\ldots),
\end{aligned}$$

kus viimasel sammul oleme kasutanud üldistatud binoomvalemit. Viimases sulus on z ainult paarisastmes. Liikme z^{2012} tekkimiseks peame esimesest, teisest ja kolmandast sulust võtma kas $z^0 \cdot z^0 \cdot z^{2012}$ või $z^2 \cdot z^0 \cdot z^{2010}$. Üldistatud binoomvalemi põhjal tuleb liikme z^{2012} kordaja järelikult

$$1 \cdot 1 \cdot \binom{1008}{1006} + 1 \cdot 1 \cdot \binom{1007}{1005} = 1014049.$$

4. Tihti, näiteks loendamisülesande lõppvastuse leidmisel, on vaja määrata genereerivate funktsioonide korrutises üheainsa liikme z^n kordaja. Selleks võib kasutatada võtet, mille sisuks on *sulgude osaline lahtikorrutamine*. Analoogilise võttega tõestati näiteks (harilik) binoomvalem. Leida

a) liikme x^2 kordaja avaldises $(2+x+x^2)(1+2x+x^2)(1+x+2x^2)$

b) liikme x^{17} kordaja avaldises $(1+x^5+x^7)^{20}$

c) liikme x^{21} kordaja avaldises $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^8$

Lahendus. a) Liikme x^2 moodustamiseks võime võtta kas ühest sulust x^2 ja kahest ülejäänust x^0 või kahest sulust x^1 ja kolmandast x^0. Esimest tüüpi liikmed lisavad x^2 kordajale $2\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1=7$, teist tüüpi liikmed aga $1\cdot2\cdot1+1\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot1=7$, kokku on x^2 kordaja $7+7=14$.

b) Liige x^{17} saab moodustuda ainult nii, et kahest sulust võetakse x^5 ja ühest sulust x^7. Valime 20 sulust välja 2, kust võtame x^5, selleks on $\binom{20}{2}$ võimalust. Ülejäänud 18 sulust valime 1, kust võtame x^7, selleks on $\binom{18}{1}$ võimalust. Kokku on võimalusi $\binom{20}{2}\binom{18}{1}=3420$.

c) Teisendame avaldist ja kasutame binoomteoreemi:

$$(x^2+x^3+\ldots+x^6)^8 = x^{16}(1+x+x^2+x^3+x^4)^8 = x^{16}\cdot\frac{(1-x^5)^8}{(1-x)^8} =$$

$$= x^{16}\Bigl(\sum_{n=0}^{8}(-1)^n\binom{8}{n}x^{5n}\Bigr)\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+7}{n}x^n\Bigr).$$

Neist teguritest saab liige x^{21} tekkida kas kujul $x^{16}\cdot x^0\cdot x^5$ või kujul $x^{16}\cdot x^5\cdot x^0$. Seega saame selle liikme kordajaks $1\cdot\binom{8}{0}\cdot\binom{12}{5}+1\cdot(-1)\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{0}=784$.

5. Leida liikme x^n kordaja avaldises

a) $\dfrac{1}{(1-x)^{100}}$ b) $\dfrac{1}{(1+2x)^{50}}$ c) $\dfrac{1}{(2+x)^{25}}$ d) $\dfrac{1}{(1+2x)(2+x)}$

Lahendus. a) Kasutame üldistatud binoomvalemit, mille võib kirja panna kujul

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{n}z^n.$$

Võttes siin $m=100$, saame liikme x^n kordajaks $\binom{n+99}{n}$.

b) Tähistades $z=-2x$ ja valides $m=50$, saame üldistatud binoomvalemi üldliikmeks $\binom{n+49}{n}z^n=\binom{n+49}{n}(-2x)^n=\binom{n+49}{n}(-2)^nx^n$, st liikme x^n kordaja on $\binom{n+49}{n}(-2)^n=(-1)^n\binom{n+49}{n}2^n$.

c) Esitame avaldise kujul

$$\frac{1}{(2+x)^{25}} = \frac{1}{2^{25}(1+\frac{x}{2})^{25}} = \frac{1}{2^{25}} \cdot \frac{1}{\left(1-(-\frac{x}{2})\right)^{25}}.$$

Teises teguris kasutame üldistatud binoomvalemit, võttes seal $z = -\frac{x}{2}$ ja $m = 25$. Kokkuvõttes saame liikme x^{25} kordajaks

$$\frac{1}{2^{25}} \cdot \binom{n+24}{n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^n \binom{n+24}{n} \frac{1}{2^{25+n}}.$$

d) Tavaline meetod selliste avaldiste käsitlemiseks on matemaatilisest analüüsist tuntud *osamurdudeks jaotamine*. Püüame esitada avaldise kujul

$$\frac{1}{(1+2x)(2+x)} = \frac{C}{1+2x} + \frac{D}{2+x},$$

kus C ja D on mingid arvud. Korrutades selle võrduse mõlemat poolt murdude ühise nimetajaga, saame võrduse

$$1 = C(2+x) + D(1+2x).$$

See võrdus peab olema samasus, st kehtima iga x korral. Võttes $x = -\frac{1}{2}$, on D kordaja 0 ning $C = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$. Võttes aga $x = -2$, on C kordaja 0 ning $D = \frac{1}{1+2\cdot(-2)} = -\frac{1}{3}$. Nende kordajate puhul on see võrdus samasus, sest vasakul ja paremal on polünoomid astmega ülimalt 1, mille väärtused langevad kokku kahes punktis. Järelikult

$$\frac{1}{(1+2x)(2+x)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+2x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2+x}.$$

Liikme x^n kordaja leiame nüüd ülaltoodud üldistatud binoomvalemi abil (mõlemas murrus on $m = 1$). Kordajaks saame

$$\frac{2}{3} \cdot (-2)^n - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{3}\left(2^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

6. a) Millise võrduse binoomkordajate vahel võib tuletada, kui võrrelda võrduse $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ mõlema poole arendises liikme x^k kordajaid?

b) Millise võrduse binoomkordajate vahel võib tuletada, kui võrrelda võrduse $(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n$ mõlema poole arendises liikme x^k kordajaid?

Lahendus. a) Binoomvalemi abil saame selle võrduse esitada kujul

$$\Bigl(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\Bigr)\Bigl(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\Bigr)=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k.$$

Vasakul tekib liige x^k parajasti siis, kui esimese sulu igale liikmele x^i, kus $i = 0, 1, \ldots, k$, võtame teisest sulust juurde liikme x^{k-i}. Seetõttu on see võrdus samaväärne võrdusega

$$\sum_{k=0}^{m+n}\Bigl(\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}\Bigr)x^k=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k.$$

Võrreldes nüüd kummalgi poolel liikme x^k kordajaid, saame võrduse

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k},$$

tegemist on Vandermonde'i võrdusega.

b) Võrduse vasak pool on

$$\Bigl(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^i\Bigr)\Bigl(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\Bigr)=\sum_{k=0}^{2n}\Bigl(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}\Bigr)x^k$$

ning parem pool

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}x^{2l}=\sum_{k=0}^{2n}[k \text{ on paaris}](-1)^{k/2}\binom{n}{k/2}x^k.$$

Liikme x^k kordajate võrdlemisel saame

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}=\begin{cases}(-1)^{k/2}\binom{n}{k/2}, & \text{kui } k \text{ on paaris,}\\ 0, & \text{kui } k \text{ on paaritu.}\end{cases}$$

7. Arvutada summad

a) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\binom{n}{k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$

Lahendus. a) Et $\binom{k}{m} = 0$, kui $k < m$, ja $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, siis võime antud summa esitada kujul

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \binom{n}{n-k}.$$

Seega on otsitav summa liikme x^n kordaja jadade (a_k) ja (b_k) genereerivate funktsioonide korrutises, kus

$$a_k = (-1)^{k-m} \binom{k}{m}, \qquad b_k = \binom{n}{k}.$$

Jada (a_k) genereeriv funktsioon on

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} x^k = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^{k-m} \binom{k}{k-m} x^k =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{l+m}{l} x^{l+m} = x^m \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+m}{l} (-x)^l = \frac{x^m}{(1+x)^{m+1}}.$$

Jada (b_k) genereeriv funktsioon on

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Liikme x^n kordaja korrutises $\frac{x^m}{(1+x)^{m+1}} \cdot (1+x)^n = x^m (1+x)^{n-m-1}$ on $\binom{n-m-1}{n-m}$. Kui $n < m$, siis on tulemuseks 0, sest alumine indeks on negatiivne. Kui $n > m$, siis on tulemuseks samuti 0, sest ülemine indeks on väiksem kui alumine ja mõlemad on mittenegatiivsed. Kui $n = m$, siis on tulemuseks $\binom{-1}{0} = 1$. Järelikult

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \delta_{m,n}.$$

Märkus. Vt ka 10. praktikumi ülesannet 9.

b) Summa avaldub kujul $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$, kus $a_k = \binom{2k}{k}$. Et

$$\binom{2k}{k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)}{k!\,k!} =$$
$$= \frac{2^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot (k - \frac{1}{2}) \cdot 2^k k!}{k!\,k!} = \frac{(k-\frac{1}{2})^{\underline{k}}}{k!} \cdot 2^k \cdot 2^k = \binom{k-\frac{1}{2}}{k} 4^k,$$

siis

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k-\frac{1}{2}}{k} 4^k x^k = \frac{1}{(1-4x)^{1/2}}.$$

Otsitav summa on liikme x^n kordaja funktsioonis $\frac{1}{(1-4x)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1-4x)^{1/2}} = \frac{1}{1-4x}$. See kordaja on 4^n.

8. Olgu $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ja $(b_n)_{n\geqslant 0}$ kaks jada, mille korral $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Milline on seos nende jadade (harilike) genereerivate funktsioonide vahel?

Lahendus. Olgu $A(z)$ ja $B(z)$ vastavalt jada (a_n) ja (b_n) genereeriv funktsioon. Vaatleme jada (c_n), kus $c_n = 1$ iga $n \geqslant 0$ korral. Selle jada genereeriv funktsioon on $\frac{1}{1-z}$. Kehtib seos

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i c_{n-i},$$

st b_n on liikme x^n kordaja jadade (a_n) ja (c_n) genereerivate funktsioonide korrutises. Järelikult

$$B(z) = \frac{A(z)}{1-z}.$$

9. Lahendada rekurrentsed võrrandid.

a) $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$, algtingimus $a_0 = 1$

b) $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 16a_n$, algtingimused $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

Lahendus. a) Korrutame võrrandi pooli suurusega z^n ning liidame üle n-i:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n.$$

Kui $A(z)$ on jada (a_n) genereeriv funktsioon, siis vasakul olev summa on $(A(z) - a_0)/z = (A(z) - 1)/z$, paremal aga on esimene summa $3A(z)$ ning teine $1/(1-2z)$. Seega $(A(z) - 1)/z = 3A(z) + 1/(1-2z)$, millest

$$A(z) = \frac{1-z}{(1-2z)(1-3z)}.$$

Lahutame parema poole osamurdude summaks

$$\frac{1-z}{(1-2z)(1-3z)} = \frac{C}{1-2z} + \frac{D}{1-3z}.$$

Korrutades võrdust ühise nimetajaga, saame $1-z = C(1-3z)+D(1-2z)$. Kui $z = 1/2$, siis $1/2 = C(1-3/2)$, millest $C = -1$. Kui aga $z = 1/3$, siis $2/3 = D(1-2/3)$, millest $D = 2$. Seega

$$A(z) = -\frac{1}{1-2z} + \frac{2}{1-3z} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n.$$

Antud võrrandi lahend on liikme z^n kordaja $a_n = -2^n + 2 \cdot 3^n$.

b) Analoogiliselt saame võrduse

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n = 8\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n - 16\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

mis algtingimusi $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ arvestades esitub jada (a_n) genereeriva funktsiooni $A(z)$ kaudu võrdusena

$$\frac{A(z)-1-4z}{z^2} = 8 \cdot \frac{A(z)-1}{z} - 16A(z).$$

Siit

$$A(z) = \frac{1}{1-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^n.$$

Järelikult $a_n = 4^n$.

10. *Hanoi tornid.* Antud on n erineva läbimõõduga ketast ning kolm püstist varrast. Alguses on kõik kettad laotud suuruse kahanemise järjekorras esimesele vardale, ülejäänud kaks varrast on tühjad. Eesmärk on viia kõik kettad esimeselt vardalt viimasele, tõstes igal käigul ühelt vardalt ülemise ketta ümber nii, et suurem ketas ei satuks kunagi väiksema peale. Olgu A_n vähim käikude arv, mis kulub n ketta üleviimiseks.

a) Tuletada rekurrentne võrrand suuruse A_n jaoks.

b) Koostada rekurrentse võrrandi põhjal jada (A_n) genereeriv funktsioon.

c) Leida genereeriva funktsiooni abil A_n avaldis.

Lahendus. a) Viime ülemised $n-1$ ketast esimeselt vardalt teisele. Selleks kulub mitte rohkem kui A_{n-1} käiku. Tõstame kõige suurema ketta esimeselt vardalt kolmandale. Selleks kulub 1 käik. Viime $n-1$ ketast teiselt vardalt kolmandale. Selleks kulub mitte rohkem kui A_{n-1} käiku. Niisuguse meetodiga saame kõik kettad üle viia esimeselt vardalt kolmandale. Et esialgu pole teada, kas siinjuures käikude arv on vähim, oleme tuletanud võrratuse $A_n \leqslant 2A_{n-1} + 1$.

Teiselt poolt, viies kettaid esimeselt vardalt kolmandale, peame mingil käigul nihutama kõige alumist ketast. Seda saame teha alles siis, kui ülemised $n-1$ ketast on pealt ära tõstetud ehk vähemalt A_{n-1} käigu pärast. Et lõppseisus peavad need $n-1$ ketast asuma jällegi kõige suurema ketta peal, siis tuleb teha veel vähemalt A_{n-1} käiku. Seega vähim käikude arv rahuldab võrratust $A_n \geqslant 2A_{n-1}+1$.

Kokkuvõttes

$$A_n = 2A_{n-1}+1.$$

Ilmselt $A_1 = 1$. Kui defineerida $A_0 = 0$, siis kehtib saadud võrrand iga $n = 1$, 2, ... korral.

b) Olgu $A(z)$ jada (A_n) genereeriv funktsioon. Kirjutame võrrandid välja ükshaaval ning korrutame nad järjestikku suurustega z^0, z^1, z^2 jne:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2A_0 + 1 \\ A_2 z &= 2A_1 z + z \\ A_3 z^2 &= 2A_2 z^2 + z^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Liidame kõik võrdused. Paremal poolel on esimeste liikmete summa $2A(z)$, teiste liikmete summa aga $\frac{1}{1-z}$. Kui vasakul olevate liikmete summat märkida tähisega $B(z)$, siis $B(z)\cdot z + A_0 = A(z)$, millest $B(z) = \frac{A(z)}{z}$. Järelikult kehtib seos $\frac{A(z)}{z} = 2A(z) + \frac{1}{1-z}$, millest

$$A(z) = \frac{z}{(1-2z)(1-z)}.$$

c) Lahutame genereeriva funktsiooni $A(z)$ osamurdudeks

$$\frac{z}{(1-2z)(1-z)} = \frac{C}{1-2z} + \frac{D}{1-z}.$$

Viies murrud ühisele nimetajale, saame $z = C(1-z) + D(1-2z)$. Kui $z = \frac{1}{2}$, siis $C = 1$. Kui $z = 1$, siis $D = -1$. Järelikult

$$A(z) = \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Seega $A_n = 2^n - 1$.

11. Kui palju leidub selliseid arvujärjendeid pikkusega n, mis koosnevad numbritest 0, 1 ja 2 ning milles kaks kõrvutiasuvat numbrit ei erine kuskil rohkem kui 1 võrra?

Lahendus. Olgu a_n, b_n ja c_n vastavalt 0-ga, 1-ga ja 2-ga algavate järjendite arv. Meil on vaja leida $a_n + b_n + c_n$ avaldis. Arvule 1 võib järgneda ükskõik milline sobiv järjend pikkusega $n-1$, arvule 0 järgnev järjend ei tohi alata 2-ga ja arvule 2 järgnev järjend 0-ga. Seega saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n + c_n \\ c_{n+1} &= b_n + c_n \end{aligned}$$

Ülesande sisust tulenevad algtingimused $a_1 = b_1 = c_1 = 1$. Need on täidetud, kui defineerida $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$. Siis on arvud määratud kõigi mittenegatiivsete indeksite korral.

Korrutame iga võrrandi pooli suurusega z^n ning summeerime:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+1} z^n &= \sum_{i=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{i=0}^{\infty} b_n z^n \\ \sum_{i=0}^{\infty} b_{n+1} z^n &= \sum_{i=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{i=0}^{\infty} b_n z^n + \sum_{i=0}^{\infty} c_n z^n \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_{n+1} z^n &= \sum_{i=0}^{\infty} b_n z^n + \sum_{i=0}^{\infty} c_n z^n \end{aligned}$$

ehk vastavate jadade genereerivate funktsioonide kaudu

$$\begin{aligned} \frac{A(z)}{z} &= A(z) + B(z) \\ \frac{B(z)-1}{z} &= A(z) + B(z) + C(z) \\ \frac{C(z)}{z} &= B(z) + C(z) \end{aligned}$$

Lahendame selle süsteemi:

$$A(z) = \frac{-z}{z^2+2z-1} \qquad B(z) = \frac{z-1}{z^2+2z-1} \qquad C(z) = \frac{-z}{z^2+2z-1}$$

Seega

$$A(z) + B(z) + C(z) = \frac{-z-1}{z^2+2z-1}.$$

Pannes tähele, et nimetaja esitub korrutisena $(z-\sqrt{2}+1)(z+\sqrt{2}+1)$, lahutame viimase murru osamurdude summaks ja arendame astmeritta. Otsitavaks avaldiseks saame $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}(\sqrt{2}-1)^{n+1}$.

12. Tõestada, et arvu n esituste arv paaritute liidetavate summana võrdub arvu n esituste arvuga paarikaupa erinevate liidetavate summana. (Näiteks arvu 6 esitused paaritute liidetavate summana on $1+1+1+1+1+1$, $1+1+1+3$, $1+5$, $3+3$, esitused paarikaupa erinevate liidetavate summana on $1+2+3$, $1+5$, $2+4$, 6; liidetavate järjekord pole oluline).

Lahendus. Vaatleme kõigepealt esitusi paaritute liidetavates summana. Genereeriv funktsioon, mis loendab ainult liidetavast i moodustatud summasid, on

$$1 + x^i + x^{2i} + \ldots = \frac{1}{1 - x^i}.$$

Genereeriv funktsioon, mis loendab summasid, kus liidetavatena võivad esineda suvalised paaritud arvud, on

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ paaritu}}}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}.$$

Vaatleme nüüd esitusi paarikaupa erinevate liidetavate summana. Genereeriv funktsioon, mis näitab, kas liidetav i kuulub summasse või mitte, on $1+x^i$. Sellise otsuse peame tegema iga võimaliku liidetava i kohta. Järelikult genereeriv funktsioon, mis loendab summasid, kus liidetavad on paarikaupa erinevad, on

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2i}}{1 - x^i}.$$

Viimases korrutises taanduvad välja kõik lugejas olevad liikmed, sest need esinevad ka nimetajas. Nimetajas jäävad järele ainult need liikmed, mille korral i on paaritu ehk kokkuvõttes parajasti esimesena vaadeldud genereeriv funktsioon.

13. Olgu n mittenegatiivne täisarv. Kui palju leidub polünoome $P(x)$, mille kordajad kuuluvad hulka $\{0, 1, 2, 3\}$ ja mille puhul $P(2) = n$.

Lahendus. Olgu $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_ix^i + \ldots$ polünoom. Vastavalt ülesande tingimustele on meil vaja leida, mitu lahendit on võrrandil

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \ldots + 2^i a_i + \ldots = n,$$

kus iga $i = 0, 1, \ldots$ korral $0 \leqslant a_i \leqslant 3$. Selle võrrandi lahendite arv on võrdne liikme z^n kordajaga genereerivas funktsioonis

$$G(z) = (1 + z + z^2 + z^3)(1 + z^2 + z^4 + z^6)(1 + z^4 + z^8 + z^{12}) \ldots,$$

sest liidetav a_0 annab summasse panuse 0, 1, 2 või 3, liidetav $2a_1$ panuse 0, 2, 4 või 6 jne. Teisendame $G(z)$ avaldist:

$$G(z) = \prod_{i=0}^{\infty}(1 + z^{2^i} + z^{2\cdot 2^i} + z^{3\cdot 2^i}) = \prod_{i=0}^{\infty}\frac{1 - z^{2^{i+2}}}{1 - z^{2^i}} = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)}.$$

Et $1 - z^2 = (1-z)(1+z)$, siis esitub viimane murd osamurdude summana kujul

$$\frac{1}{(1-z)^2(1+z)} = \frac{C}{1-z} + \frac{D}{(1-z)^2} + \frac{E}{1+z}.$$

Korrutades võrdust murdude ühise nimetajaga, saame $1 = C(1-z)(1+z) + D(1+z) + E(1-z)^2$. Kui $z = 1$, siis $D = \frac{1}{2}$. Kui $z = -1$, siis $E = \frac{1}{4}$. Kui $z = 0$, siis $C = \frac{1}{4}$. Järelikult

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+z} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot(n+1) + \frac{1}{4}\cdot(-1)^n\Big)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\Big\lfloor\frac{n}{2}\Big\rfloor + 1\Big)z^n. \end{aligned}$$

Otsitavate polünoomide arv on $\lfloor n/2\rfloor + 1$.

14. Kasutades eksponentsiaalset genereerivat funktsiooni, lahendada rekurrentne võrrand $a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1)$ algtingimusel $a_0 = 1$.

Lahendus. Olgu $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$ jada (a_n) eksponentsiaalne genereeriv funktsioon. Korrutame võrrandi pooli suurusega $z^{n+1}/(n+1)!$ ning summeerime:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(a_n - n + 1)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Vasak pool on

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{z^n}{n!} = G(z) - a_0 = G(z) - 1,$$

parem pool aga

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(a_n - n + 1)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - n + 1)\frac{z^{n+1}}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{z^{n+1}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n!} = zG(z) - z^2\mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^z. \end{aligned}$$

Seega saame võrrandi $G(z) - 1 = zG(z) - z^2 e^z + ze^z$, millest

$$G(z) = \frac{1 + ze^z - z^2 e^z}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} + ze^z.$$

Siit

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (n! + n) \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

Võrrandi lahend on $a_n = n! + n$.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

15. Aine õppeperiood kestab n päeva. Aine alguses jaotatakse õppeperiood kaheks: esimesed k päeva $(1 \leqslant k \leqslant n-2)$ on teoreetiline osa ja viimased $n-k$ päeva laboratoorne osa. Seejärel määratakse esimeses osas üks päev ja teises osas kaks päeva kontrolltöödeks. Mitmel erineval viisil saab sellistel tingimustel aine ajakava koostada?

Lahendus. Olgu a_n ajakava koostamisvõimaluste arv. Esimesest k päevast ühe päeva valimiseks on k võimalust, viimasest $n-k$ päevast kahe päeva valimiseks on $\binom{n-k}{2}$ võimalust. Et k võib olla 1 kuni $n-2$, siis

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-2} k \binom{n-k}{2} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n-k}{2}.$$

Vaatleme jadasid (b_n) ja (c_n), kus $b_n = n$ ja $c_n = \binom{n}{2}$. Saadud valem ütleb, et jada (a_n) genereeriv funktsioon on jadade (b_n) ja (c_n) genereerivate funktsioonide korrutis. Olgu nende jadade genereerivad funktsioonid vastavalt $A(z)$, $B(z)$ ja $C(z)$. Et

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z \Big(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \Big)' = z \Big(\frac{1}{1-z} \Big)' = \frac{z}{(1-z)^2}$$

ja

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} z^{n-2} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} z^n = \frac{z^2}{(1-z)^3},$$

siis

$$A(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{z^2}{(1-z)^3} = \frac{z^3}{(1-z)^5} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+4}{4} z^{m+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{4} z^n,$$

sest $\binom{n+1}{4} = 0$, kui $0 \leqslant n < 3$. Järelikult $a_n = \binom{n+1}{4}$.

Kombinatoorne lahendus. Kui ülesande vastus on teada, siis võime mõtelda, kas seda saaks ära näha otse. Lisame n päevale ühe päeva. Valime $n+1$ päevast välja 4 päeva. Valitutest teise päeva loeme osade piiriks ja võtame tema kestuseks 0, ülejäänud päevad näitavad kontrolltööde asukohta kummaski osas. Sel viisil saame kätte parajasti kõik võimalused ajakava koostada.

16. Antud on n erineva läbimõõduga ketast, mis alguses on laotud suuruse kahanemise järjekorras kolmest vardast esimesele. Ühe käiguga võib tõsta ühelt vardalt ülemise ketta *vahetult järgnevale vardale* (lugedes, et kolmandale vardale järgneb esimene) nii, et suurem ketas ei satuks kunagi väiksema peale. Eesmärk on viia kõik kettad esimeselt vardalt teisele.

Optimaalne meetod (optimaalsust me ei tõesta) selle ülesande lahendamiseks on järgmine. Olgu P_n ja V_n käikude arvud, mida on vaja teha n ketta üleviimiseks mingilt vardalt vastavalt vahetult järgnevale või vahetult eelnevale vardale.

- P_n leidmine: vii ülemised $n-1$ ketast vahetult eelnevale vardale; vii viimane suur ketas vahetult järgnevale vardale; vii $n-1$ kettaga kuhi vahetult eelnevale vardale suure ketta peale;
- V_n leidmine: vii ülemised $n-1$ ketast vahetult eelnevale vardale; vii viimane suur ketas vahetult järgnevale vardale; vii $n-1$ kettaga kuhi vahetult järgnevale vardale; vii suur ketas vahetult järgnevale vardale; vii $n-1$ kettaga kuhi vahetult eelnevale vardale suure ketta peale.

Leida n ketta üleviimiseks vajaminev käikude arv suletud kujul.

Lahendus. Vastavalt ülesande tingimustele $P_n = V_{n-1} + 1 + V_{n-1}$ ja $V_n = V_{n-1} + 1 + P_{n-1} + 1 + V_{n-1}$. Pärast lihtsustamist ja indeksi n nihutamist saame seega rekurrentsete seoste süsteemi

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= 2V_n + 1, \\ V_{n+1} &= 2V_n + P_n + 2. \end{aligned}$$

Ülesande püstituse põhjal $P_1 = 1$ ja $V_1 = 2$. Kui defineerida $P_0 = 0$ ja $V_0 = 0$, siis kehtib saadud süsteem iga $n = 0, 1, \ldots$ korral.

Korrutame mõlema võrrandi pooli suurusega z^n ja summeerime üle n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} V_{n+1} z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

ehk jadade (P_n) ja (V_n) genereerivate funktsioonide $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$ ja $V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n$ kaudu (arvestades, et $P_0 = V_0 = 0$)

$$\frac{P(z)}{z} = 2V(z) + \frac{1}{1-z}, \qquad \frac{V(z)}{z} = 2V(z) + P(z) + \frac{2}{1-z}.$$

Selle süsteemi lahend on

$$P(z) = \frac{z+2z^2}{1-3z+2z^3}, \qquad V(z) = \frac{2z+z^2}{1-3z+2z^3}.$$

Ülesande vastus on liikme z^n kordaja funktsioonis $P(z)$. Nimetaja on kuuppolünoom, kuid et kordajate summa on 1, siis on üks nullkoht $z = 1$. Polünoomide jagamise teel leiame esituse $1-3z+2z^3 = (1-2z-2z^2)(1-z)$, kust ruutpolünoomist leiame veel kaks nullkohta $z = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ja $z = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Seega esitub murd kolme lineaarpolünoomi pöördväärtuste summana, kus iga lineaarpolünoomi nullkoht on üks ülal leitutest. Et tegur esialgu oluline ei ole, siis võime nendeks lineaarpolünoomideks võtta $1 - \frac{2}{\sqrt{3}-1}z = 1-(1+\sqrt{3})z$, $1 + \frac{2}{\sqrt{3}+1}z = 1-(1-\sqrt{3})z$ ja $1-z$ ning otsida konstante C, D, E esituses

$$\frac{z+2z^2}{1-3z+2z^3} = \frac{C}{1-(1+\sqrt{3})z} + \frac{D}{1-(1-\sqrt{3})z} + \frac{E}{1-z}.$$

Viime murrud ühisele nimetajale ja leiame, et lugejate vahel kehtib võrdus $z+2z^2 = C(1-z)(1-(1-\sqrt{3})z)+D(1-z)(1-(1+\sqrt{3})z)+E(1-(1+\sqrt{3})z)\cdot(1-(1-\sqrt{3})z)$. Valides järjest $z = 1/(1+\sqrt{3})$, $z = 1/(1-\sqrt{3})$, $z = 1$, saame $C = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})$, $D = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})$, $E = -1$. Seejärel arendame iga osamurru astmeritta, millega saame ülesande vastuseks

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^{n+1} - 1.$$

Et $|1-\sqrt{3}| < 1$, siis arvu n kasvades on siin ketaste ümbertõstmiseks vajalik käikude arv $\theta((1+\sqrt{3})^n) \approx \theta(2{,}732^n)$, võrreldes esialgse Hanoi tornide ülesande käikude arvuga $\theta(2^n)$.

17. Lahendada mittehomogeenne rekurrentne võrrand

$$A_{n+2} = 5A_{n+1} - 6A_n + n^2$$

algtingimustel $A_0 = 0$, $A_1 = 1$.

a) Leida jada (A_n) genereeriv funktsioon $A(z)$.

b) Esitada see osamurdude summana kujul $\frac{C}{(1-\gamma z)^k}$, kus C ja γ on arvulised konstandid ja k on naturaalarv.

c) Leida igas osamurrus liikme z^n kordaja ning esitada A_n avaldis nende abil.

Lahendus. a) Korrutame võrrandi pooli avaldisega z^n ning liidame kõik võrrandid kokku:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+2}z^n = 5\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1}z^n - 6\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$$

Siin

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = z\Big(\sum_{n=0}^{\infty} nz^n\Big)' = z\Big(z\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)'\Big)' =$$

$$= z\Big(z\Big(\frac{1}{1-z}\Big)'\Big)' = z\Big(\frac{z}{(1-z)^2}\Big)' = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

Arvestades ka algtingimusi $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, omandab seos kuju

$$\frac{A(z)-z}{z^2} = 5\frac{A(z)}{z} - 6A(z) + \frac{z(1+z)}{(1-z)^3},$$

millest

$$A(z) = \frac{z}{1-5z+6z^2} + \frac{z^3(1+z)}{(1-5z+6z^2)(1-z)^3} = \frac{z-3z^2+4z^3}{(1-3z)(1-2z)(1-z)^3}.$$

Viimane murd esitub kujul

$$\frac{z-3z^2+4z^3}{(1-3z)(1-2z)(1-z)^3} = \frac{P}{1-3z} + \frac{Q}{1-2z} + \frac{R}{1-z} + \frac{S}{(1-z)^2} + \frac{T}{(1-z)^3},$$

millest pärast ühisele nimetajale viimist saame vasakul ja paremal murdude lugejate vahelise võrduse $z-3z^2+4z^3 = P(1-2z)(1-z)^3 + Q(1-3z)(1-z)^3 + R(1-3z)(1-2z)(1-z)^2 + S(1-3z)(1-2z)(1-z) + T(1-3z)(1-2z)$. Võttes $z = 1$, saame $T = 1$. Võttes $z = 1/3$, saame $P = 3/2$. Võttes $z = 1/2$, saame $Q = -4$. Võttes $z = 0$, saame $R + S = 3/2$. Võttes $z = -1$, saame $2R + S = 3$, mis koos eelmise võrdusega annab $R = 3/2$, $S = 0$. Teades arve P, Q, R, S, T, võime nüüd välja kirjutada ülesande lahendi

$$A_n = \frac{3}{2} \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + \frac{3}{2} + \binom{n+2}{2} = \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+2} + \frac{n^2 + 3n + 5}{2}.$$

18. Jalaväerühm koosneb n sõdurist. Rivistuse ajal jaotab rühmaülem sõdurite rivi teatavaks arvuks järjestikustest sõduritest koosnevateks jagudeks ning määrab igas jaos ühe sõduri juhiks. Leida võimaluste arv, mitmel viisil saab rühmaülem sedasi rühma jagada.

Lahendus. Olgu a_n võimaluste arv. Vaatleme viimast sõdurit. On kaks võimalust: kas see sõdur on viimases jaos tavaliige või juht.

- Kui viimane sõdur on viimase jao tavaliige, siis jaotame esimesed $n - 1$ sõdurit jagudeks ning lisame viimase sõduri viimase jao koosseisu. Seega sel juhul on sõdurite jaotamisvõimalusi sama palju kui palju on võimalusi $n - 1$ sõdurit jagudeks jaotada ehk a_{n-1}.
- Kui viimane sõdur on viimase jao juht, siis oletame, et viimane rühm algab sõdurist $i + 1$, ning jaotame esimesed i sõdurit jagudeks. Selleks on a_i võimalust. Et i võib olla 0 kuni $n - 1$, siis on sellel juhul sõdurite jaotamisvõimalusi $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

Seega

$$a_n = a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

See võrdus kehtib ka siis, kui n asemel on $n + 1$:

$$a_{n+1} = a_n + \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Lahutame viimasest võrdusest eelviimase: $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + a_n$ ehk $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$. Kirjutades viimase võrduse kujul, kus $n - 1$ asemel on n, saame seose

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots$$

Algtingimused on $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ (kontroll: $a_2 = 3a_1 - a_0 = 3$, mis vastab tegelikkusele).

Olgu $A(z)$ jada (a_n) genereeriv funktsioon. Korrutame seose pooli avaldisega z^n ning summeerime. Saame

$$\sum_{n=0}^{n} a_{n+2} z^n = 3 \sum_{n=0}^{n} a_{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{n} a_n z^n$$

ehk

$$\frac{A(z) - z}{z^2} = 3\,\frac{A(z)}{z} - A(z).$$

Siit

$$A(z) = \frac{z}{1 - 3z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}z}.$$

Järelikult

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2$ ja $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$, siis Binet' valemi põhjal $a_n = F_{2n}$, kus F_{2n} on Fibonacci arv.