

Diskreetne matemaatika 2012

13. praktikum

Reimo Palm

Vaatleme loendamisülesandeid, milles tuleb arvestada olukorra sümmeetriat. Sümmeetriat kirjeldatakse tavaliselt teatava teisenduste rühma abil, milleks võivad olla näiteks kujundi pöörded või graafi automorfismid. Teisenduste rühm määrab kõigi variantide hulgal klassijaotuse, kus samasse klassi kuuluvaid variante üksteisest ei eristata. Loendatakse ekvivalentsiklasse.

Praktikumiülesanded

1. Mitmel viisil saab värvida kuubi tahud 3 värviga, kui värvimisi, mis on saadavad üksteisest kuubi pööramise teel, ei eristata?

Olgu X kuubi tahkude hulk, C värvide hulk ja \mathcal{F} kõigi funktsioonide $f: X \rightarrow C$ hulk. Olgu G kuubi kõigi pöörete rühm.

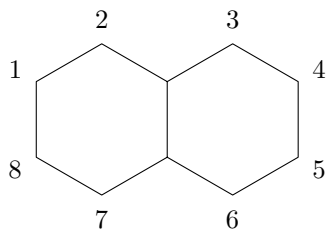
- a) Mitu elementi on hulgas \mathcal{F} ?
 - b) Kuubi pöördeteisendused on pöörded ümber kuubi mingi sümmeetriatelje. Leida kõik need teisendused.
 - c) Iga pöörde korral leida selle pöörde püsipunktide arv hulgas \mathcal{F} .
 - d) Kasutades Burnside'i lemmat, leida ülesande vastus.
 - e) Mitmel viisil saab kuubi tahud värvida siis, kui 3 värvi asemel on kasutada n värvi?
2. Mitu põhimõtteliselt erinevat 7-kivilist kaelakeed saab koostada
 - a) valgetest ja mustadest kividest;
 - b) valgetest, mustadest ja sinistest kividest?

Kahte kaelakeed loeme põhimõtteliselt erinevaks, kui kumbki pole saadav teisest pööramiste ja peegeldamistega. Nööri sõlmkohta ei arvesta.

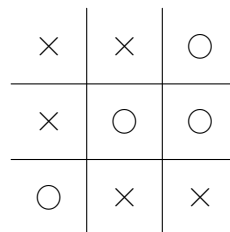
3. Risttahukakujulise karbi pikkus on 10 cm, laius 5 cm ja kõrgus 5 cm. Mitmest elemendist koosneb selle karbi pöörete rühm?
4. Olgu $X = \{a, b, c, d\}$, $C = \{\text{must, valge}\}$ ning \mathcal{F} kõigi funktsioonide $f: X \rightarrow C$ hulk. Lisaks olgu $G = \{\text{id}, (12), (34), (12)(34)\}$. Vaatleme rühma G toimet hulgal \mathcal{F} .
- Leida kõigi rühma G elementide püsipunktid.
 - Leida kõigi hulga \mathcal{F} elementide stabilisaatorid.
 - Leida kõik orbiidid hulgas \mathcal{F} .
5. Leida järgmiste rühmade tsüklilisuse indikaatorid.
- C_4 (ruudu pöörded)
 - C_5 (korrapärase viisnurga pöörded)
 - C_6 (korrapärase kuusnurga pöörded)
 - D_4 (ruudu pöörded ja peegeldused)
 - D_5 (korrapärase viisnurga pöörded ja peegeldused)
 - D_6 (korrapärase kuusnurga pöörded ja peegeldused)
6. Olgu S_m kõigi permutatsioonide hulk m elemendist. Permutatsiooni $\sigma \in S_m$ tsüklitüübiks nimetame vektorit $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, mille iga komponent c_i on antud permutatsiooni selliste tsüklite arv, mille pikkus on i .
- Tõestada, et kõigi tsüklitüübiga \mathbf{c} permutatsioonide arv on

$$\frac{m!}{\prod_{i=1}^m i^{c_i} c_i!}.$$
 - Leida rühmade S_3 ja S_4 tsüklilisuse indikaatorid.
7. Kui palju leidub 6 kivist koosnevaid kaelakeesid, kuhu kuulub 1 kollane, 2 punast ja 3 sinist kivi, kui lugeda samaks kaelakeed, mis on saadavad üksteisest
- pöörete ja/või peegeldustega;
 - ainult pööretega?
8. Mitmel viisil saab värvida kuubi tahud punase, musta ja valge värviga nii, et punaseid tahke oleks vähemalt 2?

9. Kuubikujuline reklaamininstallatsioon pannakse kokku kuuest ruudukujulisest tahust. Värvitrukis tahk maksab 3000 eurot, mustvalges trükis tahk 2000 eurot ja valge tahk 1000 eurot. Kui palju leidub erinevaid reklaamkuupe, mille hind on täpselt 12000 eurot?
10. Antud on korrapärane tetraeeder. Kirjutada välja tsüklilisuse indikaator a) tippude, b) servade, c) tahkude jaoks. Leida, mitmel erineval viisil saab tipud, servad või tahud värvida kahe värviga.
11. Süsivesinik naftaleen koosneb kümnest süsiniku aatomist, mis moodustavad kaks kuusnurka, nagu kujutatud joonisel 1, ning kaheksast vesiniku aatomist, mis kinnituvad süsiniku aatomite külge numbritega 1 kuni 8 märgitud positsioonidel. Kahte molekuli nimetatakse isomeerideks, kui nad koosnevad samast arvust ja liigist aatomitest, kuid neil on erinev struktuur.
- Naftool saadakse siis, kui naftaleenis asendada üks vesiniku aatom hüdroksüülrühmaga ($-OH$). Kui palju leidub erinevaid naftooli isomeere?
 - Tetrametüülnaftaleen saadakse siis, kui naftaleenis asendada neli vesiniku aatomit metüülrühmadega ($-CH_3$). Kui palju leidub erinevaid tetrametüülnaftaleeni isomeere?
 - Kui palju isomeere saab konstrueerida, kui naftaleenis asendada kaks vesiniku aatomit hüdroksüülrühmadega, kaks metüülrühmadega ja kaks karboksüülrühmadega ($-COOH$)?
12. Kui trips-traps-trulli mängu mängida senikaua, kuni kõik lahtrid saavad täidetud, tekib lõppseis, milles on viis risti ja neli ringi (joonis 2). Kuid osa nendest lõppseisudest on põhimõtteliselt samad. Loeme kaks seis samaks, kui üks on saadav teisest pööramiste ja peegeldamiste abil. Kui palju leidub põhimõtteliselt erinevaid trips-traps-trulli lõppseise?



Joonis 1.



Joonis 2.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

- 13.** Leida rühma C_{12} tsüklilisuse indikaator.
- 14.** Mitu erinevat lapitekki mõõtmetega 3×4 saab teha 5 punasest ja 7 sinisest ruudust eeldusel, et
- a) tekki ei või ümber pöörata;
 - b) tekki võib ümber pöörata?
- 15.** Tõestada, et rühma S_n tsüklilisuse indikaator $Z_{S_n}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ rahuldab rekurrentset seost

$$Z_{S_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i Z_{S_{n-i}}.$$

- 16.** Mitmel viisil saab vaateaknale välja panna kolm kuuekivilist kaelakeed, milles on kokku 9 valget ja 9 musta kivi? Oluline ei ole kaelakeede pööramine ega nende järjekorra vahetamine.