Diskreetne matemaatika 2012

1. praktikum

Reimo Palm

Kokkuvõte tõestusstrateegiatest

Tõestuste ja üldse loogiliste arutluskäikude (sealhulgas ka mittematemaatiliste) praktilisel konstrueerimisel on vaja teada tegelikult üsna väikest arvu loogikareegleid, mis on esitatud järgnevas kokkuvõtlikul kujul. Tõestusülesanne koosneb tavaliselt kahest komponendist: üks osa, mida me loeme kehtivaks või teadaolevaks (eeldus), ning teine osa, mida me soovime järeldada (väide). Tõestuse konstrueerimisel võib alustada kas eeldusest või väitest, arendades neid edasi loogikareeglite kohaselt kas teineteise järel või vaheldumisi, kuni saame tulemuseks lünkadeta järeldumiste ahela. Järgnevaid võtteid võib kasutada igas tõestuse järgus.

Tõestusvõtted lähtudes väitest

Väite kuju	Mida teha?
$A \to B$	Eeldame, et A kehtib, ja tõestame, et B kehtib, VÕI tõestame pöördvastandväite: eeldame, et B ei kehti, ja tõestame, et A ei kehti
$\neg A$	Kasutame vastuväitelist tõestust: eeldame, et A kehtib, ja püüame jõuda vastuolule.
$A_1 \mathbin{\&} A_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A_n$	Tõestame A_1, A_2, $\ldots$, A_n eraldi (sisuliselt tõestame n erinevat väidet)
$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$	Valime sobivalt välja ühe väide ja tõestame et see kehtib VÕI eeldame, et kõik väited peale mingi ühe ei kehti, ja tõestame, et ülejäänud väide kehtib.
$A \leftrightarrow B$	Tõestame, et korraga kehtivad $A \to B$ ja $B \to A$.
$\forall x A(x)$	Valime vabalt elemendi x ja tõestame, et $A(x)$ kehtib.
$\exists x A(x)$	Valime x sellise väärtuse x_0, mille puhul $A(x)$ on tõene, ja tõestame, et $A(x_0)$ kehtib.

Tõestusvõtted lähtudes eeldusest

Eelduse kuju	Mida teha?
$A \to B$	Kui lisaks on teada, et A kehtib, siis järeldame, et B kehtib, VÕI kasutame pöördvastandväidet: kui lisaks on teada, et B ei kehti, siis järeldame, et A ei kehti.
$\neg A$	Kui vastuväitelise tõestuse käigus on tõestatud, et A kehtib, siis saame siit vajaliku vastuolu.
$A_1 \mathbin{\&} A_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A_n$	Järeldame, et igaüks lausetest A_1, A_2, $\ldots$, A_n eraldi võttes kehtib.
$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$	Vaatleme juhte: esimene juht, kus kehtib A_1, teine juht, kus kehtib A_2 jne, VÕI kui on teada, et mõned lausetest A_1, A_2, $\ldots$, A_n ei kehti, siis järeldame, et ülejäänud kehtivad.
$A \leftrightarrow B$	Asendame kahe eeldusega: $A \to B$ ja $B \to A$
$\forall x A(x)$	Kui eelnevalt on sisse toodud mingi element c, siis saame järeldada, et $A(c)$ kehtib.
$\exists x A(x)$	Toome sisse uue tähise, näiteks x_0, märkimaks elementi, mille korral $A(x_0)$ kehtib.

Praktikumiülesanded

Tõestamisülesannete lahendused tuleks eelistatumalt kirja panna vahetu arutluse (sidusa teksti) kujul. Kui kasutate mingeid teadaolevaid fakte (nt juba tõestatud hulgateoreetilisi samasusi) või definitsioone, siis tuleb nendele kasutamise kohas selgelt viidata. Kui peate vajalikuks kasutada mingeid esitusi (nt karakteristlikke funktsioone või taandamist lausearvutusele), siis tuleb ühtlasi selgelt välja tuua, kuidas ülesanne sellele esitusele taandub.

Ka mittetõestamisülesannete lahendustes peavad vastusega kaasnema piisavad selgitused, mis võimaldavad lugejal lihtsasti veenduda vastuse õigsuses.

1. Olgu X, Y, Z hulgad. Tõestada võrdused.

a) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$

b) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

c) $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$

d) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$

e) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$

Lahendus. Demonstreerime lahenduses mitmesuguseid meetodeid hulkadevaheliste võrduste tõestamiseks.

a) Tõestame võrduse vahetu arutlusega. Olgu $x \in X \setminus (Y \cup Z)$. Siis $x \in X$ ja $x \notin Y \cup Z$. Viimasest järeldub, et $x \notin Y$ ja $x \notin Z$. Seostest $x \in X$ ja $x \notin Y$ saame nüüd $x \in X \setminus Y$, seostest $x \in X$ ja $x \notin Z$ aga $x \in X \setminus Z$. Et $x \in X \setminus Y$ ja $x \in X \setminus Z$, siis $x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$. Järelikult $X \setminus (Y \cup Z) \subseteq (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.

Vastupidi, olgu $x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$. Siis $x \in X \setminus Y$ ja $x \in X \setminus Z$. Esimesest seosest saame $x \in X$ ja $x \notin Y$, teisest seosest lisaks $x \notin Z$. Et $x \notin Y$ ja $x \notin Z$, siis $x \notin Y \cup Z$. Tingimust $x \in X$ arvestades saame siit $x \in X \setminus (Y \cup Z)$. Järelikult $(X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \subseteq X \setminus (Y \cup Z)$.

b) Meil on vaja tõestada, et iga x korral kehtib: $x \in X \setminus (Y \cap Z)$ parajasti siis, kui $x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$. Teisendame vasakusse poolde kuulumise tingimust:

$$\begin{aligned}
x \in X \setminus (Y \cap Z) &\equiv (x \in X) \,\&\, \neg(x \in Y \cap Z) \equiv \\
&\equiv (x \in X) \,\&\, \neg\big((x \in Y) \,\&\, (x \in Z)\big) \equiv \\
&\equiv (x \in X) \,\&\, \big(\neg(x \in Y) \vee \neg(x \in Z)\big) \equiv \\
&\equiv (x \in X) \,\&\, \neg(x \in Y) \vee (x \in X) \,\&\, \neg(x \in Z) \equiv \\
&\equiv (x \in X \setminus Y) \vee (x \in X \setminus Z) \equiv \\
&\equiv x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z).
\end{aligned}$$

Seega kuulub x võrduse vasakusse poolde parajasti siis, kui ta kuulub võrduse paremasse poolde.

c) Kasutame hulkade karakteristlikke funktsioone:

$$\begin{aligned}
\chi_{X \setminus (X \setminus Y)}(x) &= \chi_X(x) - \chi_X(x)\chi_{X \setminus Y}(x) = \\
&= \chi_X(x) - \chi_X(x)\big(\chi_X(x) - \chi_X(x)\chi_Y(x)\big) = \\
&= \chi_X(x) - \chi_X^2(x) + \chi_X^2(x)\chi_Y(x) = \\
&= \chi_X(x) - \chi_X(x) + \chi_X(x)\chi_Y(x) = \\
&= \chi_X(x)\chi_Y(x) = \chi_{X \cap Y}(x).
\end{aligned}$$

d) Teisendame laused $x \in (X \setminus Y) \setminus Z$ ja $x \in (X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$ täielikule disjunktiivsele normaalkujule: esimene lause

$$x \in (X \setminus Y) \setminus Z \equiv \big(x \in (X \setminus Y)\big) \& \neg(x \in Z) \equiv (x \in X) \& \neg(x \in Y) \& \neg(x \in Z)$$

ja teine lause

$$\begin{aligned}
x \in &(X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z) \equiv (x \in X \setminus Z) \,\&\, \neg(x \in Y \setminus Z) \equiv \\
&\equiv (x \in X) \,\&\, \neg(x \in Z) \,\&\, \neg\big((x \in Y) \,\&\, \neg(x \in Z)\big) \equiv
\end{aligned}$$

$$\equiv (x \in X) \,\&\, \neg(x \in Z) \,\&\, \big(\neg(x \in Y) \vee \neg\neg(x \in Z)\big) \equiv$$
$$\equiv (x \in X) \,\&\, \neg(x \in Z) \,\&\, \neg(x \in Y) \vee (x \in X) \,\&\, \neg(x \in Z) \,\&\, (x \in Z) \equiv$$
$$\equiv (x \in X) \,\&\, \neg(x \in Z) \,\&\, \neg(x \in Y).$$

Mõlemad täielikud disjunktiivsed normaalkujud on samad, järelikult need on laused omavahel samaväärsed.

e) Kasutame hulgateooria põhisamasusi: $X \setminus (Y \setminus Z) = X \cap (Y \setminus Z)' = X \cap (Y \cap Z')' = X \cap (Y' \cup Z'') = (X \cap Y') \cup (X \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$.

2. Tõestada sisalduvused.

a) $X' \setminus (Y \cup Z) \subseteq (X \cup Y)'$

b) $(X \cap Y) \setminus (X \cap Z) \subseteq Z'$

c) $(X' \cap Z) \cup (X \cap Y) \subseteq Y \cup (Z \cap Y')$

d) $(Y \setminus X) \cup (Y \setminus Z) \subseteq (X \cap Z)'$

e) $(X \cup Z) \setminus Y \subseteq ((X \cap Y) \cup (Y \cap Z))'$

Lahendus. Vaatleme jällegi mitmesuguseid meetodeid hulkade sisaldumise tõestamiseks.

a) Vasak pool on $X' \setminus (Y \cup Z) = X' \cap (Y \cup Z)' = X' \cap Y' \cap Z'$ ja parem pool $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$. Et ilmselt $X' \cap Y' \cap Z' \subseteq X' \cap Y'$, siis $X' \setminus (Y \cup Z) \subseteq (X \cup Y)'$.

b) Olgu $x \in (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$. Siis $x \in X \cap Y$ ja $x \notin X \cap Z$. Esimesest seosest $x \in X$ ja $x \in Y$. Et $x \in X$ ja $x \notin X \cap Z$, siis $x \notin Z$ ehk $x \in Z'$.

c) Olgu x element, mis ei kuulu paremasse poolde, st $x \notin Y \cup (Z \cap Y')$. Siit $x \notin Y$ ja $x \notin Z \cap Y'$. Viimasest seosest $x \notin Z$, sest $x \notin Y$ tõttu $x \in Y'$. Nüüd aga ülesande vasakus pooles $x \notin X' \cap Z$, sest $x \notin Z$, ning $x \notin X \cap Y$, sest $x \notin Y$. Järelikult ei kuulu x vasakusse poolde.

d) Esiteks, $x \in Y \setminus X \Rightarrow x \notin X \Rightarrow x \notin X \cap Z \Rightarrow x \in (X \cap Z)'$. Teiseks, $x \in Y \setminus Z \Rightarrow x \notin Z \Rightarrow x \notin X \cap Z \Rightarrow x \in (X \cap Z)'$. Seega kui $x \in (Y \setminus X) \cup (Y \setminus Z)$, siis igal juhul $x \in (X \cap Z)'$.

e) Leiame vasaku poole ühisosa parema poole täiendiga:

$$((X \cup Z) \setminus Y) \cap ((X \cap Y) \cup (Y \cap Z)) =$$
$$= \big(((X \cup Z) \setminus Y) \cap X \cap Y\big) \cup \big(((X \cup Z) \setminus Y) \cap Y \cap Z\big) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Järelikult ei leidu vasakus pooles elementi, mis jääks paremast poolest välja ehk kõik vasaku poole elemendid kuuluvad ka paremasse poolde.

3. Tõestada, et järgmised väited on samaväärsed.

a) $X \subseteq Y$

b) $X \cup Y = Y$

c) $X \cap Y = X$

d) $X \setminus Y = \emptyset$

e) $X' \cup Y = U$

Lahendus. Tõestame väidete järeldumise a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a).

a) $\Rightarrow$ b). Eeldame, et $X \subseteq Y$. Olgu $x \in X \cup Y$. Siis $x \in X$ või $x \in Y$. Esimesel juhul saame eelduse põhjal, et $x \in Y$. Seega igal juhul $x \in Y$. Järelikult $X \cup Y \subseteq Y$. Vastupidi, kui $x \in Y$, siis $x \in X \cup Y$, mistõttu $Y \subseteq X \cup Y$. Seega $X \cup Y = Y$.

b) $\Rightarrow$ c) Eeldame, et $X \cup Y = Y$, ning tõestame, et $X \cap Y = X$. Sisalduvus $X \cap Y \subseteq X$ kehtib ilmselt. Tõestame vastupidise sisalduvuse. Olgu $x \in X$. Siis $x \in X \cup Y$. Et eelduse põhjal $X \cup Y = Y$, siis $x \in Y$. Oleme saanud, et $x \in X$ ja $x \in Y$, seega $x \in X \cap Y$. Järelikult $X \subseteq X \cap Y$.

c) $\Rightarrow$ d) Oletame väitevastaselt, et leidub element $x \in X \setminus Y$. Siis $x \in X$ ja $x \notin Y$. Et eelduse põhjal $X \cap Y = X$, siis tingimus $x \in X$ annab $x \in X \cap Y$, millest $x \in Y$. See on vastuolus sisalduvusega $x \notin Y$. Järelikult hulgas $X \setminus Y$ ühtegi elementi ei leidu ja see hulk on tühi hulk.

d) $\Rightarrow$ e) Sisalduvus $X' \cup Y \subseteq U$ kehtib seetõttu, et kõik hulgad ning siis ka kõigi tehete tulemused kuuluvad universaalhulka U. Vastupidi, olgu $x \in U$ suvaline element. Kui $x \in Y$, siis $x \in X' \cup Y$. Kui $x \notin Y$, siis oletades, et $x \in X$, saaksime $x \in X \setminus Y$ ehk hulk $X \setminus Y$ ei oleks tühi, vastuolu eeldusega. Järelikult $x \in X'$. Siis aga $x \in X' \cup Y$. Seega igal juhul $x \in X' \cup Y$.

e) $\Rightarrow$ a) Eeldame, et $X' \cup Y = U$, ja tõestame, et $X \subseteq Y$. Olgu $x \in X$. Siis $x \notin X'$. Kui oleks $x \notin Y$, siis saaksime $x \notin X' \cup Y$ ehk $X' \cup Y$ ei oleks universaalhulk, vastuolu eeldusega. Järelikult peab kehtima $x \in Y$.

Harjutusülesanne. Valida väidetest a)–e) juhuslikult kaks väidet ja tõestada otse, et esimesest järeldub teine.

4. Tõestada, et

a) kui $X \subseteq Y$ ja $Y' \cap Z \neq \emptyset$, siis $X' \cap Z \neq \emptyset$

b) kui $Y \cap Z = \emptyset$ ja $X \cap Z' = \emptyset$, siis $X \cap Y = \emptyset$

Lahendus. a) Eeldusest $Y' \cap Z \neq \emptyset$ saame, et leidub element $x \in Y' \cap Z$. Seega $x \in Y'$ ja $x \in Z$. Esimesest seosest $x \notin Y$. Nüüd aga eelduse $X \subseteq Y$ põhjal $x \notin X$. Seega $x \in X'$. Seega oleme saanud, et $x \in X'$ ja $x \in Z$. Järelikult $x \in X' \cap Z$ ehk hulk $X' \cap Z$ ei ole tühi.

b) Oletame väitevastaselt, et leidub element $x \in X \cap Y$. Siis $x \in X$ ja $x \in Y$. On kaks võimalust: kas $x \in Z$ või $x \in Z'$. Esimesel juhul saame seosest $x \in Y$, et $x \in Y \cap Z$, teisel juhul aga seosest $x \in X$, et $x \in X \cap Z'$. Mõlemal juhul saame vastuolu eeldusega. Järelikult sellist elementi $x \in X \cap Y$ ei leidu.

5. Olgu antud funktsioonid $f,\ g\colon X \to Y$. Hulga $A \subseteq X$ elementide kujutised funktsiooniga f moodustavad hulga C ja hulga $B \subseteq X$ elementide kujutised funktsiooniga g hulga D.

a) Kas sellest, et $C \cap D \neq \emptyset$, järeldub, et $A \cap B \neq \emptyset$?

b) Kas punkti a) väide kehtib, kui eeldada, et funktsioonid f ja g on injektiivsed?

c) Kas punkti a) väide kehtib, kui eeldada, et funktsioonid f ja g on sürjektiivsed?

Lahendus. a) Ei järeldu. Olgu näiteks $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3\}$ ning $f(1) = f(2) = g(1) = g(2) = 3$. Kui $A = \{1\}$ ja $B = \{2\}$, siis $C = D = \{3\}$. Seega $C \cap D = \{3\} \neq \emptyset$, aga $A \cap B = \emptyset$.

b) Ei kehti. Olgu $X = Y = \{1, 2\}$ ning $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$. Valime $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Siis $C = f(A) = \{1\}$ ning $D = g(B) = \{1\}$. Seega $C \cap D = \{1\} \neq \emptyset$, aga $A \cap B = \emptyset$.

c) Ei kehti. Punktis a) kirjeldatud funktsioonid f ja g on sürjektiivsed, aga väide ei kehti.

6. Olgu X ja Y teatavad hulgad ning $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to X$ sellised kaks funktsiooni, et iga $x \in X$ korral $g(f(x)) = x$. Tõestada, et funktsioon f on injektiivne.

Lahendus. Olgu $f(x_1) = f(x_2)$. Siis $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, millest eelduse põhjal $x_1 = x_2$. Järelikult on funktsioon f injektiivne.

7. Teha kindlaks, kas hulgal X määratud relatsioon on ekvivalents. Kui relatsioon on ekvivalents, siis kirjeldada hulga X faktorhulka selle relatsiooni järgi.

a) $X = \mathbb{Z}$, $\varrho = \{(m, n)\colon |m| = n\}$

b) $X = \mathbb{R}$, $\varrho = \{(x, y)\colon x|y| = y|x|\}$

c) $X = \mathbb{R}$, $\varrho = \{(x, y)\colon x + |y + 1| = |x + 1| + y\}$

d) $X = \mathbb{R}$, $\varrho = \{(x, y)\colon \mathrm{round}(x) = \mathrm{round}(y)\}$, kus round tähistab ümardamist lähimaks täisarvuks

e) $X = \mathbb{R}$, $\varrho = \{(x, y)\colon \lfloor x - y \rfloor = 0\}$

f) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\varrho = \{\big((a, b), (c, d)\big)\colon a - d = c - b\}$

Lahendus. a) Ei ole ekvivalents, sest pole refleksiivne, näiteks $(-1,-1) \notin \varrho$.

b) Ei ole ekvivalents, sest pole transitiivne. Näiteks $1 \cdot |0| = 0 \cdot |1|$ ja $0 \cdot |-1| = -1 \cdot |0|$, aga $1 \cdot |-1| \neq -1 \cdot |1|$. See tähendab, $(1,0) \in \varrho$, $(0,-1) \in \varrho$, aga $(1,-1) \notin \varrho$.

c) On ekvivalents. Relatsioon on refleksiivne, sest iga $x \in \mathbb{R}$ korral $x+|x+1| = |x+1|+x$, sümmeetriline, sest kui $x+|y+1| = |x+1|+y$, siis $y+|x+1| = |y+1|+x$ liitmise kommutatiivsuse ja võrduse sümmeetrilisuse tõttu, ning samuti transitiivne, sest kui $x+|y+1| = |x+1|+y$ ja $y+|z+1| = |y+1|+z$, siis liites need võrdused, saame $x+|y+1|+y+|z+1| = |x+1|+y+|y+1|+z$, millest $x+|z+1| = |x+1|+z$.

d) On ekvivalents. Refleksiivsus $(\mathrm{round}(x) = \mathrm{round}(x))$, sümmeetrilisus (kui $\mathrm{round}(x) = \mathrm{round}(y)$, siis $\mathrm{round}(y) = \mathrm{round}(x)$) ja transitiivsus (kui $\mathrm{round}(x) = \mathrm{round}(y)$ ja $\mathrm{round}(y) = \mathrm{round}(z)$, siis $\mathrm{round}(x) = \mathrm{round}(z)$) järelduvad vahetult arvude võrduse vastavatest omadustest.

e) Ei ole ekvivalents, sest ei ole sümmeetriline: näiteks $\lfloor 0{,}5 - 0 \rfloor = 0$, aga $\lfloor 0 - 0{,}5 \rfloor = -1$.

f) On ekvivalents. Iga $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ korral $\big((a,b),(a,b)\big) \in \varrho$, sest $a-b = a-b$, seega relatsioon on refleksiivne. Kui $\big((a,b),(c,d)\big) \in \varrho$, siis $a-d = c-b$, millest $c-b = a-d$ ehk $\big((c,d),(a,b)\big) \in \varrho$, st relatsioon on transitiivne. Kui $\big((a,b),(c,d)\big) \in \varrho$ ja $\big((c,d),(e,f)\big) \in \varrho$, siis $a-d = c-b$ ja $c-f = e-d$. Liites need võrdused, saame $a-d+c-f = c-b+e-d$ ehk $a-f = e-b$, millest $\big((a,b),(e,f)\big) \in \varrho$. Järelikult on relatsioon transitiivne.

Märkus. Kui on antud mingi funktsioon $f\colon X \to Y$, siis relatsioon $\varrho = \{(x,y)\colon f(x) = f(y)\}$ on ekvivalents, nagu kergesti kontrollida võib. Selle abil võib kohe ütelda, et relatsioonid d) ja f) on ekvivalentsid, esimeses relatsioonis $f(x) = \mathrm{round}(x)$, teises relatsioonis $f(a,b) = a+b$.

8. Leida viga järgmises „tõestuses“.

Iga sümmeetriline ja transitiivne relatsioon on ekvivalents.

Olgu $\varrho \in X \times X$ suvaline hulgal X määratud sümmeetriline ja transitiivne relatsioon. Valime vabalt elemendi $x \in X$. Et relatsioon ϱ on sümmeetriline, siis alati, kui $(x,y) \in \varrho$, on ka $(y,x) \in \varrho$. Et relatsioon ϱ on ka transitiivne, siis seostest $(x,y) \in \varrho$ ja $(y,x) \in \varrho$ järeldub, et $(x,x) \in \varrho$. Arvestades, et element x oli valitud vabalt, saame, et iga elemendi x korral $(x,x) \in \varrho$. Järelikult on relatsioon ϱ refleksiivne. Et ϱ on samal ajal ka sümmeetriline ja transitiivne, siis ta on ekvivalents.

Lahendus. Esitatud arutelu kehtib ainult nende elementide $x \in X$ korral, mille puhul leidub $y \in X$ nii, et $(x,y) \in \varrho$. Kui on olemas mõni selline element $x \in X$, mille korral sellist elementi y ei leidu, siis $(x,x) \notin \varrho$ ehk relatsioon ϱ ei ole refleksiivne.

9. Olgu $\varrho \subseteq X \times Y$ ning σ, $\tau \subseteq Y \times Z$ mingid relatsioonid.

a) Tõestada, et $\varrho \circ (\sigma \cup \tau) = (\varrho \circ \sigma) \cup (\varrho \circ \tau)$

b) Tõestada, et $\varrho \circ (\sigma \cap \tau) \subseteq (\varrho \circ \sigma) \cap (\varrho \circ \tau)$

c) Punkti b) tõestus on lineaarne, st seal pole ühtegi hargnemist. Mõnikord võib selliseid tõestusi „tagant ettepoole“ lugedes (pöörates igal sammul järeldumise vastupidiseks) saada esialgse väite pöördväite tõestuse. Leida põhjus, miks siiski antud juhul punkti b) tõestust vastupidiseks pöörates saame mittekorrektse tõestuse.

d) Eelmises punktis leitud põhjust kasutades konstrueerida näide, millest nähtub, et punktis b) vastupidine sisalduvus üldiselt ei kehti.

Lahendus. a) Koostame samaväärsuste ahela

$$
\begin{aligned}
&(x,z) \in \varrho \circ (\sigma \cup \tau) \Leftrightarrow \exists y\big[(x,y) \in \varrho \,\&\, (y,z) \in \sigma \cup \tau\big] \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \exists y\big[(x,y) \in \varrho \,\&\, ((y,z) \in \sigma \vee (y,z) \in \tau)\big] \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \exists y\big[(x,y) \in \varrho \,\&\, (y,z) \in \sigma \vee (x,y) \in \varrho \,\&\, (y,z) \in \tau\big] \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \exists y\big[(x,y) \in \varrho \,\&\, (y,z) \in \sigma\big] \vee \exists y\big[(x,y) \in \varrho \,\&\, (y,z) \in \tau\big] \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (x,z) \in \varrho \circ \sigma \vee (x,z) \in \varrho \circ \tau \Leftrightarrow (x,z) \in (\varrho \circ \sigma) \cup (\varrho \circ \tau).
\end{aligned}
$$

b) Koostame järeldumiste ahela

$$
\begin{aligned}
&(x,z) \in \varrho \circ (\sigma \cap \tau) \Rightarrow \exists y\big[(x,y) \in \varrho \,\&\, (y,z) \in \sigma \cap \tau\big] \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \exists y\big[(x,y) \in \varrho \,\&\, (y,z) \in \sigma \,\&\, (y,z) \in \tau\big] \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \exists y\big[\big((x,y) \in \varrho \,\&\, (y,z) \in \sigma\big) \,\&\, \big((x,y) \in \sigma \,\&\, (y,z) \in \tau\big)\big] \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \exists y\big[(x,y) \in \varrho \,\&\, (y,z) \in \sigma\big] \,\&\, \exists y\big[(x,y) \in \sigma \,\&\, (y,z) \in \tau\big] \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow (x,z) \in \varrho \circ \sigma \,\&\, (x,y) \in \varrho \circ \tau \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow (x,z) \in (\varrho \circ \sigma) \cap (\varrho \circ \tau)
\end{aligned}
$$

c) Punktis b) on kõik järeldumised pööratavad, peale järeldumise, millega kolmandast reast saadakse neljas. Näiteks kui $\varrho = \{(1,2),(1,3)\}$, $\sigma = \{(2,4)\}$, $\tau = \{(3,4)\}$, siis neljanda rea valem on tõene, aga kolmanda rea valem väär. Üldiselt, valemist $\exists y(A(y)\&B(y))$ järeldub valem $\exists y A(y)\&\exists y B(y)$, aga mitte vastupidi.

d) Punktis c) toodud relatsioonide korral $\varrho \circ (\sigma \cap \tau) = \emptyset$, kuid samas $(\varrho\circ\sigma)\cap(\varrho\circ\tau) = \{(1,4)\}\cap\{(1,4)\} = \{(1,4)\}$, st võrduse vasak pool sisaldub paremas rangelt.

10. a) Tõestada, et iga refleksiivse ja transitiivse relatsiooni ϱ korral kehtib võrdus $\varrho \circ \varrho = \varrho$.

b) Tuua näide mitterefleksiivsest relatsioonist ϱ, mille korral $\varrho \circ \varrho = \varrho$.

Lahendus. a) Olgu $(x, y) \in \varrho \circ \varrho$. Siis leidub z nii, et $(x, z) \in \varrho$ ja $(z, y) \in \varrho$. Et ϱ on transitiivne, siis kahest viimasest sisalduvusest järeldub $(x, y) \in \varrho$.

Vastupidi, olgu $(x, y) \in \varrho$. Et ϱ on refleksiivne, siis $(y, y) \in \varrho$. Järelikult $(x, y) \in \varrho \circ \varrho$.

b) Sobib näiteks tühirelatsioon. Mõnevõrra sisukam näide on reaalarvude hulgal määratud võrratusrelatsioon $<$.

11. Olgu ϱ ja σ sümmeetrilised relatsioonid. Tõestada, et relatsioon $\varrho \circ \sigma$ on sümmeetriline parajasti siis, kui $\varrho \circ \sigma = \sigma \circ \varrho$.

Lahendus. Kui $\varrho \circ \sigma$ on sümmeetriline, siis $\varrho \circ \sigma = (\varrho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \varrho^{-1} = \sigma \circ \varrho$, st kehtib vajalik võrdus.

Vastupidi, kui $\varrho \circ \sigma = \sigma \circ \varrho$, siis $\varrho \circ \sigma = \sigma \circ \varrho = \sigma^{-1} \circ \varrho^{-1} = (\varrho \circ \sigma)^{-1}$, st relatsioon $\varrho \circ \sigma$ on sümmeetriline.

12. Leida järgmiste kujutuste tuumad ja kirjeldada faktorhulki tuuma järgi.

a) $f\colon \{1, 2, \ldots, 100\} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \text{ristsumma}(n)$

b) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2 - 3n + 1$

c) $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (\sin x, \cos x)$

e) $f\colon \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \to \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$, $f(X) = X \cap \{2, 4\}$

Lahendus. a) Tuum $\operatorname{Ker} f$ koosneb kõigist arvupaaridest (m, n), kus arvude m ja n ristsummad on võrdsed. Faktorhulk tuuma järgi on $\{X_1, X_2, \ldots, X_{18}\}$, kus $X_1 = \{1, 10, 100\}$, $X_2 = \{2, 11, 20\}, \ldots, X_{18} = \{99\}$ (hulga $\{1, 2, \ldots, 100\}$ arvud ristsummaga 1, ristsummaga 2 jne kuni ristsummaga 18).

b) Tuum $\operatorname{Ker} f = \{(m, n)\colon m = n \text{ või } m + n = 3\}$. Faktorhulk $\mathbb{Z}/\operatorname{Ker} f = \{\{1, 2\}, \{0, 3\}, \{-1, 4\}, \{-2, 5\}, \ldots\}$ (iga hulga moodustavad need täisarvud, millel funktsiooni väärtus on sama).

c) $\operatorname{Ker} f = \{\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big)\colon$ punktid (a_1, b_1) ja (a_2, b_2) asuvad koordinaatide alguspunktist võrdsel kaugusel$\}$. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\operatorname{Ker} f$ on kõik kontsentrilised ringjooned, mille keskpunkt on $(0, 0)$, ja lisaks ka see punkt ise.

d) $\operatorname{Ker} f = \{(x, y)\colon x - y = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. $\mathbb{R}/\operatorname{Ker} f = \{\{x, x \pm 2\pi, x \pm 4\pi, \ldots\}\colon x \in [0, 2\pi)\}$.

e) $\operatorname{Ker} f = \{(A, B)\colon (2 \in A \leftrightarrow 2 \in B) \,\&\, (4 \in A \leftrightarrow 4 \in B)\}$. Faktorhulk tuuma järgi koosneb neljast hulgast $\{A\colon 2 \in A \& 4 \in A\}$, $\{A\colon 2 \in A \& 4 \notin A\}$, $\{A\colon 2 \notin A \,\&\, 4 \in A\}$, $\{A\colon 2 \notin A \,\&\, 4 \notin A\}$.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused. Tõestustes peavad olema kirjas kõik olulised detailid, samas ei tohi tõestus sisaldada ülemäärasel hulgal asjaga väheseotud materjali.

Lahendused esitada elektroonilisel kujul hiljemalt ülejärgmisele praktikumile eelnevaks õhtuks. Et neid lahendusi kasutatakse näitliku õppematerjalina teiste kursusel osalejate puhul, siis palun mitte kirjutada töö peale isiku tuvastamist võimaldavat infot; kogu vajaliku lisateabe võib kirjutada esitamise juurde eraldi kommentaarina.

13. Tõestada vahetu arutluse teel, et ükskõik milliste hulkade X, Y, Z korral kehtib võrdus

$$(Z' \setminus X) \cup (Z' \setminus Y) = ((X \cap Y) \cup Z)'.$$

Lahendus. Olgu $x \in (Z' \setminus X) \cup (Z' \setminus Y)$. Siis $x \in Z' \setminus X$ või $x \in Z' \setminus Y$. Kui $x \in Z' \setminus X$, siis $x \in Z'$ ja $x \notin X$. Esimesest sisalduvusest järeldub $x \notin Z$ ning teisest $x \notin X \cap Y$. Järelikult $x \notin (X \cap Y) \cup Z$ ehk $x \in ((X \cap Y) \cup Z)'$. $x \in Z' \setminus Y$, siis saame analoogiliselt $x \notin Z$ ja $x \notin X \cap Y$, millest samuti $x \in ((X \cap Y) \cup Z)'$.

Vastupidi, olgu $x \in ((X \cap Y) \cup Z)'$. Siis $x \notin (X \cap Y) \cup Z$. Järelikult $x \notin X \cap Y$ ja $x \notin Z$. Sisalduvusest $x \notin Z$ saame $x \in Z'$, sisalduvusest $x \notin X \cap Y$ aga $x \notin X$ või $x \notin Y$. Esimesel juhul seega $x \in Z' \setminus X$, teisel juhul aga $x \in Z' \setminus Y$. Kummalgi juhul $x \in (Z' \setminus X) \cup (Z' \setminus Y)$.

14. Olgu X ja Y võrdse võimsusega lõplikud hulgad. Olgu antud kaks funktsiooni $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to X$, mis iga $x \in X$ korral rahuldavad tingimust $g(f(x)) = x$. Tõestada, et funktsioon f on sürjektiivne.

Lahendus. Tõestame kõigepealt, et f on injektiivne. Olgu x_1, x_2 hulga X elemendid, mille korral $f(x_1) = f(x_2)$. Võrdusest $g(f(x)) = x$ saame nüüd $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Järelikult $x_1 = x_2$. Seega funktsioon f on injektiivne.

Et f on injektiivne ning X ja Y on lõplikud hulgad, siis $|X| = |f(X)| \leqslant |Y| = |X|$, millest $|f(X)| = |Y|$. Järelikult katavad funktsiooni f väärtused terve hulga Y ehk funktsioon f on ka sürjektiivne.

15. Tõestada, et relatsioon ϱ on ekvivalents parajasti siis, kui ta rahuldab korraga järgmisi tingimusi:

a) ϱ on refleksiivne;

b) kui $(x, y) \in \varrho$ ja $(y, z) \in \varrho$, siis $(z, x) \in \varrho$.

Lahendus. $\Rightarrow$. Eeldame, et ϱ on ekvivalents. Siis ta rahuldab ülesande tingimust a). Olgu $(x, y) \in \varrho$ ja $(y, z) \in \varrho$. Ekvivalentsi transitiivsuse põhjal $(x, z) \in \varrho$. Ekvivalentsi sümmeetrilisuse põhjal $(z, x) \in \varrho$. Järelikult rahuldab ϱ ka ülesande tingimust b).

$\Leftarrow$. Eeldame, et ϱ rahuldab ülesande tingimusi a) ja b). Tõestame, et ϱ on ekvivalents.

a) ϱ on refleksiivne juba eelduse põhjal.

b) Olgu $(x, y) \in \varrho$. Valides ülesande tingimuses b) $z = y$ ning arvestades, et $(x, y) \in \varrho$ ja $(y, y) \in \varrho$ kehtivad, saame $(y, x) \in \varrho$. Järelikult on ϱ sümmeetriline.

c) Olgu $(x, y) \in \varrho$ ja $(y, z) \in \varrho$. Ülesande tingimuse b) põhjal $(z, x) \in \varrho$. Eelnevas tõestatud sümmeetrilisuse põhjal $(x, z) \in \varrho$. Järelikult on ϱ transitiivne.

16. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$. Vaatleme relatsiooni $\varrho = \{([x], [x]) \colon x \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, kus $[x]$ tähistab täisarvu x sisaldavat ekvivalentsiklassi vastavalt kas hulgas $\mathbb{Z}_m$ või $\mathbb{Z}_n$. Leida tingimus m ja n vahel, mille korral see relatsioon on kujutus. Seda tingimust rahuldavate m ja n korral leida selle kujutuse tuum.

Lahendus. Relatsioon ϱ on kujutus parajasti siis, kui iga elemendi $[x] \in \mathbb{Z}_m$ korral leidub relatsioonis täpselt üks paar, mille esimene element on see element. Tõestame, et see kehtib parajasti siis, kui $n \mid m$.

Eeldame, et $n \mid m$. Olgu $([x_1], [x_1])$ ja $([x_2], [x_2])$ sellised kaks paari relatsioonis ϱ, et $[x_1] = [x_2]$ hulgas $\mathbb{Z}_m$. Viimane seos tähendab, et $m \mid x_1 - x_2$. Et $n \mid m$, siis ka $n \mid x_1 - x_2$. Järelikult $[x_1] = [x_2]$ ka hulgas $\mathbb{Z}_n$. Seega on vaadeldavad kaks paari võrdsed.

Eeldame, et $n \nmid m$. Valime $x_1 = 0$ ja $x_2 = m$. Siis relatsiooni ϱ kuuluvate paaride $([x_1], [x_1]) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ja $([x_2], [x_2]) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ puhul on $[x_1] = [x_2]$ hulgas $\mathbb{Z}_m$, sest $m \mid x_1 - x_2$, aga $[x_1] \neq [x_2]$ hulgas $\mathbb{Z}_n$, sest $n \nmid x_1 - x_2$. Järelikult on nende paaride esimesed komponendid samad, aga teised komponendid erinevad.

Kui $n \mid m$, siis kujutuse ϱ tuum on $\operatorname{Ker} \varrho = \{([x], [x']) \colon n \mid x - x',\ x, x' \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ (st $\operatorname{Ker} \varrho$ on m-elemendilisel hulgal $\mathbb{Z}_m$ määratud ekvivalentsirelatsioon, kus iga ekvivalentsiklass koosneb $\frac{m}{n}$ elemendist).