

Diskreetne matemaatika 2012

2. praktikum

Reimo Palm

Praktikumiülesanded

1. Millised järgmistest relatsioonidest on osalised järjestused?
 - a) $X = \mathbb{Z}$, $\varrho = \{(a, b) : |a| \leq |b|\}$
 - b) $X = \mathbb{Z}^+$, $\varrho = \{(m, n) : m \leq n^2\}$
 - c) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\varrho = \{(U, V) : U \setminus V = \emptyset\}$
 - d) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\varrho = \{((a, b), (c, d)) : \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}\}$
 - e) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\varrho = \{((a, b), (c, d)) : a \leq c \text{ ja } b \geq d\}$
2. Olgu ϱ ja σ hulgal X määratud osalised järjestused. Tõestada, et $\varrho \cap \sigma$ on samuti osaline järjestus.
3. Leida järgmiste relatsioonide transitiivsed sulundid.
 - a) $X = \mathbb{N}$, $\varrho = \{(1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 2), (5, 2)\}$
 - b) $X = \mathbb{N}$, $\varrho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$
 - c) $X = \mathbb{Z}$, $\varrho = \{(m, n) : m + 1 = n\}$
 - d) $X = \mathbb{Z}$, $\varrho = \{(m, n) : |m + 1| = n\}$
4. Tõestada, et relatsiooni ϱ transitiivne sulund ja refleksiivne transitiivne sulund on omavahel seotud võrdusega $\varrho^+ = \varrho \circ \varrho^*$.
5. Antud on kaks relatsiooni ϱ ja σ , mis rahuldavad seost $\varrho \circ \sigma \subseteq \sigma \circ \varrho^+$. Tõestada, et $\varrho^+ \circ \sigma \subseteq \sigma \circ \varrho^+$.
6. Graafi, mille tippudeks on kõikvõimalikud kahendarvud pikkusega n ja servaga on ühendatud parajasti need tipud, mille kahendarvud erinevad täpselt ühe koha poolest, nimetatakse *n -mõõtmeliseks kuubiks*.
 - a) Leida n -mõõtmelise kuubi tippude arv.
 - b) Leida n -mõõtmelise kuubi servade arv.

- c) Tõestada, et n -mõõtmeline kuup on sidus.
 - d) Leida suurim kaugus n -mõõtmelise kuubi mingi kahe tipu vahel.
 - e) Kas n -mõõtmelises kuubis leidub sildu?
 - f) Kas n -mõõtmelises kuubis leidub eraldavaid tippe?
 - g) Tõestada, et iga $k \leq n$ korral leidub n -mõõtmelises kuubis alamgraaf, mis on isomorfne k -mõõtmelise kuubiga.
 - h) Kas n -mõõtmeline kuup on kahealuseline?
7. Olgu G graaf tippude hulgaga $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral tähistagu G_i graafi G tippude hulga $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ poolt indutseeritud alamgraafi. Tõestada, et

$$\sum_{i=1}^n \deg_{G_i}(v_i) = |E(G)|.$$

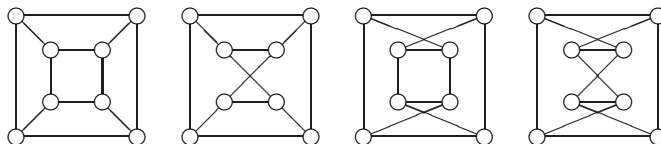
8. Tõestada, et igas graafis G kehtib

$$\sum_{v \in G} \deg_G(v)^2 = \sum_{e=uv \in E_G} (\deg_G(u) + \deg_G(v)).$$

9. Olgu G graaf ja v tema vähima astmega tipp.

- a) Tõestada, et graafis G leidub lihtahel pikkusega $\deg(v)$.
 - b) Eeldame, et G on sidus, aga mitte täisgraaf. Tõestada, et graafis G leidub lihtahel pikkusega $\deg(v) + 1$.
10. a) Tõestada, et kui graafis leidub sild, siis leidub graafis vähemalt kaks paaritu astmega tippu.
- b) Olgu antud sidus graaf, milles leidub sild e ning milles on täpselt kaks paaritu astmega tippu u ja v . Tõestada, et iga lihtahel tipust u tippu v läbib graafi silda e .
11. Tõestada, et igas graafis leidub tipp, mis ei ole eraldav tipp.
12. a) Kuu tipulise täisgraafi K_6 iga serv värvitakse kas siniseks või punaseks. Tõestada, et värvitud graafis leidub kolmnurk, mis koosneb täielikult ühte värvi servadest.
- b) Viie tipulise täisgraafi K_5 iga serv värvitakse kas siniseks või punaseks. Tõestada, et värvitud graafis leidub tsükel, mis koosneb täielikult ühte värvi servadest.

13. Millised järgmiste graafide hulgast on omavahel isomorfsed?



14. Vaatleme graafi G , mille korral $V(G) = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$ ning $E(G) = \{((a, b), (c, d)) : a + b + c + d \text{ on paaritu}\}$. Tõestada, et graaf G on isomorfne graafiga $K_{3,3}$.

15. Olgu G graaf, kus $V(G) = \mathcal{P}(\{x, y, z\})$ ja $E(G) = \{\{A, B\} : A \subseteq B, A \neq B\}$, ning H graaf, kus $V(H) = \{d : d \mid 30, d \in \mathbb{N}\}$ ja $E(H) = \{\{a, b\} : a \mid b, a \neq b\}$. Tõestada, et graafid G ja H on isomorfsed.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

16. Olgu X mingi hulk ja ϱ sellel hulgal määratud refleksiivne ja transitiivne relatsioon.

- Tõestada, et relatsioon $\sigma = \varrho \cap \varrho^{-1}$ on ekvivalents hulgal X .
- Tõestada, et relatsioon $\bar{\varrho} = \{(x/\sigma, y/\sigma) : x \varrho y\}$ on osaline järjestus hulgal X/σ .

17. $2n$ -tipulises lihtgraafis leidub täpselt kaks sama astmega tippu.

- Milline on nende kahe tipu aste?
- Kas vastus on üheselt määratud?

18. Olgu G lihtgraaf, mille iga tipu aste on 3. Tõestada, et graafis G leidub tsükkel, mille pikkus on paarisarv.

19. Olgu $A \subseteq \mathbb{N}$ lõplik hulk ning $G_A = (A, E)$ graaf, kus kõikide $r, s \in A$ korral $rs \in E$ parajasti siis, kui $\text{SÜT}(r, s) > 1$. Tõestada, et iga lihtgraafi G korral leidub selline hulk A , et graaf G on isomorfne graafiga G_A .

20. Olgu k naturaalarv ning \mathcal{O}_k nn k -paaritu graaf, mille korral $V(\mathcal{O}_k) = \{A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k + 1\} : |A| = k\}$ ning $E(\mathcal{O}_k) = \{\{A, B\} : A \cap B = \emptyset\}$. Tõestada, et kui $k \geq 3$, siis graaf \mathcal{O}_k sisaldab tsükli pikkusega 6, aga ei sisalda tsükli, mille pikkus on väiksem kui 6.