Diskreetne matemaatika 2012

2. praktikum

Reimo Palm

Praktikumiülesanded

1. Millised järgmistest relatsioonidest on osalised järjestused?

a) $X = \mathbb{Z}$, $\varrho = \{(a, b) \colon |a| \leqslant |b|\}$

b) $X = \mathbb{Z}^+$, $\varrho = \{(m, n) \colon m \leqslant n^2\}$

c) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\varrho = \{(U, V) \colon U \setminus V = \emptyset\}$

d) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\varrho = \{\big((a, b), (c, d)\big) \colon \frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}\}$

e) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\varrho = \{\big((a, b), (c, d)\big) \colon a \leqslant c \text{ ja } b \geqslant d\}$

Lahendus.

a) Ei ole osaline järjestus, sest ei ole antisümmeetriline: näiteks $|1| \leqslant |-1|$ ja $|-1| \leqslant |1|$, aga $1 \neq -1$.

b) Ei ole osaline järjestus, sest ei ole antisümmeetriline: näiteks $3 \leqslant 2^2$ ja $2 \leqslant 3^2$, aga $3 \neq 2$.

c) On osaline järjestus. Relatsiooni kuulumise tingimus on samaväärne tingimusega $U \subseteq V$ ning lihtne on kontrollida, et relatsioon $\subseteq$ on osaline järjestus.

d) Ei ole osaline järjestus, sest ei ole antisümmeetriline: näiteks $\frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{4}$ ja $\frac{2}{4} \leqslant \frac{1}{2}$, aga $(1, 2) \neq (2, 4)$.

e) On osaline järjestus. Refleksiivsus on ilmne. Kui $\big((a, b), (c, d)\big) \in \varrho$ ja $\big((c, d), (a, b)\big) \in \varrho$, siis $a \leqslant c$, $b \geqslant d$, $c \leqslant a$, $d \geqslant b$, millest $a = c$ ja $b = d$, st relatsioon on antisümmeetriline. Kui $\big((a, b), (c, d)\big) \in \varrho$ ja $\big((c, d), (e, f)\big) \in \varrho$, siis $a \leqslant c$, $b \geqslant d$, $c \leqslant e$, $d \geqslant f$, millest $a \leqslant e$, $b \geqslant f$ ehk $\big((a, b), (e, f)\big) \in \varrho$, st relatsioon on transitiivne.

Küsimus. Kas need ülaltoodud relatsioonid, mis ei ole osalised järjestused, rahuldavad osalise järjestuse definitsiooni ülejäänud tingimusi?

2. Olgu ϱ ja σ hulgal X määratud osalised järjestused. Tõestada, et $\varrho \cap \sigma$ on samuti osaline järjestus.

Lahendus. Kontrollime, et $\varrho \cap \sigma$ rahuldab osalise järjestuse tingimusi. Et ϱ ja σ on osalised järjestused ja sealhulgas refleksiivsed, siis iga $x \in X$ korral $(x, x) \in \varrho$ ja $(x, x) \in \sigma$. Järelikult $(x, x) \in \varrho \cap \sigma$ ehk relatsioon $\varrho \cap \sigma$ on refleksiivne. Kui $(x, y) \in \varrho \cap \sigma$ ja $(y, x) \in \varrho \cap \sigma$, siis muu hulgas $(x, y) \in \varrho$ $(y, x) \in \varrho$. Relatsiooni ϱ antisümmeetrilisuse abil saame siit $x = y$ Järelikult on $\varrho \cap \sigma$ antisümmeetriline. Kui $(x, y) \in \varrho \cap \sigma$ ja $(y, z) \in \varrho \cap \sigma$, siis $(x, y) \in \varrho$, $(x, y) \in \sigma$, $(y, x) \in \varrho$, $(y, x) \in \sigma$. Relatsiooni ϱ transitiivsuse tõttu $(x, z) \in \varrho$, relatsiooni σ transitiivsuse tõttu $(x, z) \in \sigma$. Järelikult $(x, z) \in \varrho \cap \sigma$, st relatsioon on ka transitiivne.

3. Leida järgmiste relatsioonide transitiivsed sulundid.

a) $X = \mathbb{N}$, $\varrho = \{(1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 2), (5, 2)\}$
b) $X = \mathbb{N}$, $\varrho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$
c) $X = \mathbb{Z}$, $\varrho = \{(m, n) \colon m + 1 = n\}$
d) $X = \mathbb{Z}$, $\varrho = \{(m, n) \colon |m + 1| = n\}$

Lahendus. Kasutame transitiivse sulundi tähendust graafidel, Warshalli algoritmi vms.

a) $\varrho^+ = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5), (5, 2), (5, 5)\}$

b) $\varrho^+ = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

c) $\varrho^+ = \{(m, n) \colon m < n\}$

d) $\varrho^+ = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

4. Tõestada, et relatsiooni ϱ transitiivne sulund ja refleksiivne transitiivne sulund on omavahel seotud võrdusega $\varrho^+ = \varrho \circ \varrho^*$.

Lahendus. Kasutame valemeid $\varrho^+ = \cup_{i=1}^{\infty} \varrho^i$ ja $\varrho^* = \cup_{i=0}^{\infty} \varrho^i$:

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \varrho^+ &\Leftrightarrow \text{leidub } i \geqslant 1 \text{ nii, et } (x, y) \in \varrho^i \\
&\Leftrightarrow \text{leidub } i \geqslant 1 \text{ nii, et } (x, y) \in \varrho \circ \varrho^{i-1} \\
&\Leftrightarrow \text{leiduvad } i \geqslant 1 \text{ ja } z \text{ nii, et } (x, z) \in \varrho \text{ ja } (z, y) \in \varrho^{i-1} \\
&\Leftrightarrow \text{leidub } z \text{ nii, et } (x, z) \in \varrho \text{ ja } (z, y) \in \varrho^* \\
&\Leftrightarrow (x, z) \in \varrho \circ \varrho^*
\end{aligned}$$

5. Antud on kaks relatsiooni ϱ ja σ, mis rahuldavad seost $\varrho \circ \sigma \subseteq \sigma \circ \varrho^+$. Tõestada, et $\varrho^+ \circ \sigma \subseteq \sigma \circ \varrho^+$.

Lahendus. Olgu $(x, y) \in \varrho^+ \circ \sigma$. Siis leidub z nii, et $(x, z) \in \varrho^+$ ja $(z, y) \in \sigma$. Et $(x, z) \in \varrho^+$, siis $(x, z) \in \varrho^i$ mingi $i \geqslant 1$ korral. Seega leiduvad elemendid u_1, u_2, $\ldots$, u_{i-1}, et $(x, u_1) \in \varrho$, $(u_1, u_2) \in \varrho$, $\ldots$, $(u_{i-2}, u_{i-1}) \in \varrho$, $(u_{i-1}, z) \in \varrho$. Seostest $(u_{i-1}, z) \in \varrho$ ja $(z, y) \in \sigma$ saame $(u_{i-1}, y) \in \varrho \circ \sigma$, mis eelduse $\varrho \circ \sigma \subseteq \sigma \circ \varrho^+$ tõttu annab $(u_{i-1}, y) \in \sigma \circ \varrho^+$. Lisades siia seose $(u_{i-2}, u_{i-1}) \in \varrho$, saame $(u_{i-2}, y) \in \varrho \circ \sigma \circ \varrho^+ = \sigma \circ \varrho^+ \circ \varrho^+$. Analoogiliselt jätkates jõuame lõpuks tulemusele $(x, y) \in \sigma \circ \varrho^+ \circ \ldots \circ \varrho^+$. Tõestame, et $\varrho^+ \circ \varrho^+ \subseteq \varrho^+$. Kui $(a, b) \in \varrho^+ \circ \varrho^+$, siis leidub c nii, et $(a, c) \in \varrho^+$ ja $(c, b) \in \varrho^+$. Seega mingite j ja k korral $(a, c) \in \varrho^j$ ja $(c, b) \in \varrho^k$. Siit $(a, b) \in \varrho^{j+k} \subseteq \varrho^+$. Rakendades seost $\varrho^+ \subseteq \varrho^+ \circ \varrho^+$ korduvalt, saame nüüd $(x, y) \in \sigma \circ \varrho^+ \circ \ldots \circ \varrho^+ \subseteq \sigma \circ \varrho^+$.

6. Graafi, mille tippudeks on kõikvõimalikud kahendarvud pikkusega n ja servaga on ühendatud parajasti need tipud, mille kahendarvud erinevad täpselt ühe koha poolest, nimetatakse *n-mõõtmeliseks kuubiks.*

a) Leida n-mõõtmelise kuubi tippude arv.

b) Leida n-mõõtmelise kuubi servade arv.

c) Tõestada, et n-mõõtmeline kuup on sidus.

d) Leida suurim kaugus n-mõõtmelise kuubi mingi kahe tipu vahel.

e) Kas n-mõõtmelises kuubis leidub sildu?

f) Kas n-mõõtmelises kuubis leidub eraldavaid tippe?

g) Tõestada, et iga $k \leqslant n$ korral leidub n-mõõtmelises kuubis alamgraaf, mis on isomorfne k-mõõtmelise kuubiga.

h) Kas n-mõõtmeline kuup on kahealuseline?

Lahendus.

a) 2^n.

b) $2^{n-1}n$. Serva määramiseks valime ühe positsiooni n positsiooni hulgast, millel kahendarvud erinevad, ning täidame ülejäänud 2^{n-1} positsiooni suvaliste kahendnumbritega.

c) Igale tipule vastavast kahendarvust on võimalik mööda servi liikuda tipuni $00\ldots0$, muutes igal sammul kahendarvus ühe ühe nulliks. Järelikult pääseb igast tipust igasse teise tippu vähemalt läbi tipu $00\ldots0$.

d) Liikudes mööda serva ühest tipust teise, saab tipule vastavas kahendarvus muutuda ainult üks kahendkoht. Seega tipust $00\ldots0$ tippu $11\ldots1$

minemiseks tuleb teha vähemalt n sammu. Samuti on ilmne, et n sammust ka piisab. See on suurim kaugus kahe tipu vahel, sest kaks n-kohalist kahendarvu erinevadki ülimalt n koha poolest.

e) Kui $n = 1$, siis graafi ainuke serv on sild. Kui $n > 1$, siis kuulub iga serv mingisse tsüklisse: võtame positsiooni, millel serva otspunktide kahendarvud erinevad, ja naaberpositsiooni ning koostame tsükli $\ldots 00 \ldots$ — $\ldots 01 \ldots$ — $\ldots 11 \ldots$ — $\ldots 10 \ldots$ — $\ldots 00 \ldots$

f) Ei leidu, sest kui eemaldada mingi tipp $b_1 b_2 \ldots b_n$, siis saab järelejäänud graafis liikuda igast tipust tippu $\bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n$, kus $\bar{b}_i = 1 - b_i$, järjestikuste kahendkohtade muutmise teel.

g) Selline alamgraaf on näiteks $\{b_1 b_2 \ldots b_k 00 \ldots 0\}$.

h) Jah, tipud jagunevad alustesse selle järgi, kas tipu kahendarvu numbrite summa on paaris või paaritu. Et serv ühendab parajasti neid tippe, mis erinevad ühe kahendarvu poolest, siis on iga serva mõlema otspunkti numbrite summad erineva paarsusega.

7. Olgu G graaf tippude hulgaga $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral tähistagu G_i graafi G tippude hulga $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ poolt indutseeritud alamgraafi. Tõestada, et

$$\sum_{i=1}^{n} \deg_{G_i}(v_i) = |E(G)|.$$

Lahendus. Iga serv $v_k v_l \in E(G)$, kus $k < l$, võetakse summas arvesse täpselt üks kord, liikmes $\deg_{G_l}(v_l)$. Rohkem servi kui need, mis kuuluvad servade hulka $E(G)$, summas arvesse ei võeta.

8. Tõestada, et igas graafis G kehtib

$$\sum_{v \in G} \deg_G(v)^2 = \sum_{e=uv \in E_G} \big(\deg_G(u) + \deg_G(v)\big).$$

Lahendus. Iga tipu w korral esineb $\deg_G(w)$ paremal summas $\deg_G(w)$ korda, sest w on kokku $\deg_G(w)$ serva otstipp.

9. Olgu G graaf ja v tema vähima astmega tipp.

a) Tõestada, et graafis G leidub lihtahel pikkusega $\deg(v)$.

b) Eeldame, et G on sidus, aga mitte täisgraaf. Tõestada, et graafis G leidub lihtahel pikkusega $\deg(v) + 1$.

Lahendus. a) Valime ahela otstipuks tipu v. Tipul v on $\deg(v)$ naabertippu, valime neist ühe. Sellel tipul on vähemalt $\deg(v) - 1$ naabertippu, mis erinevad tipust v. Valime neist ühe. Sellel on omakorda vähemalt $\deg(v) - 2$ naabertippu, mis erinevad eelnevalt valitud tippudest jne. Niimoodi saame tipu v kõrvale valida järjest veel $\deg(v)$ tippu, millega tekib ahel pikkusega $\deg(v)$.

Teine lahendus. Vaatleme graafis G pikimat lihtahelat. Selle ahela otstipul on vähemalt $\deg(v)$ naabrit, mis kõik asuvad samal ahelal (sest vastasel korral leiduks pikem ahel). Järelikult koosneb see ahel vähemalt $\deg(v) + 1$ tipust ehk ahela pikkus on vähemalt $\deg(v)$. Selles ahelas leidub osaahel pikkusega $\deg(v)$.

b) Vaatleme maksimaalse pikkusega lihtahelat $u_1 \ldots u_n$. Punkti a) põhjal on selle ahela pikkus vähemalt $\deg(v)$. Kui ahela pikkus on suurem kui $\deg(v)$, siis väide kehtib. Seetõttu oletame, et selle ahela pikkus on täpselt $\deg(v)$. Siis on nii tipp u_1 kui ka tipp u_n ühendatud ahela kõigi ülejäänud tippudega, sest $\deg(v)$ on minimaalne tipuaste. Sealhulgas on need tipud ühendatud ka omavahel. Lisaks leidub graafis tipp x, mis sellele ahelale ei kuulu, sest vastasel korral oleks see ahel graaf, millel on $\deg(v)$ tippu, kusjuures iga tipu aste on vähemalt $\deg(v)$ – selline graaf oleks täisgraaf. Et graaf on sidus, siis leidub ahel tipust x ahela $u_1 \ldots u_n$ mingisse tippu u_i. Nüüd aga saame konstrueerida ahela $x \ldots u_i \ldots u_n u_1 \ldots u_{i-1}$, mille pikkus on vähemalt $\deg(v) + 1$.

10. a) Tõestada, et kui graafis leidub sild, siis leidub graafis vähemalt kaks paaritu astmega tippu.

b) Olgu antud sidus graaf, milles leidub sild e ning milles on täpselt kaks paaritu astmega tippu u ja v. Tõestada, et iga lihtahel tipust u tippu v läbib graafi silda e.

Lahendus. a) Teame, et igas graafis on paaritu astmega tippe paarisarv. Kui oletada, et kõik tipud on paarisastmega ja graafis leidub sild, siis silla eemaldamisel muutub silla otstippude aste paarisarvust paarituks arvuks ning graaf jaguneb kaheks sidusaks komponendiks, kuhu kumbagi kuulub üks silla otstipp. Kumbki nendest komponentidest on iseseisev graaf, mis sisaldab ainult ühte paaritu astmega tippu, vastuolu.

b) Me peame tõestama, et pärast silla eemaldamist jäävad tipud u ja v erinevatesse sidusatesse komponentidesse. Kui tipud u ja v jääksid samasse komponenti, siis teises komponendis olid enne serva eemaldamist ainult paarisastmega tipud. Silla eemaldamisel muutub seal täpselt ühe tipu aste paarituks. Seega tekib komponent, mis sisaldab täpselt ühte paaritu astmega tippu, vastuolu.

11. Tõestada, et igas graafis leidub tipp, mis ei ole eraldav tipp.

Lahendus. Selline tipp on näiteks maksimaalse pikkusega ahela otstipp. Kõik selle tipu naabrid asuvad sellesama ahela peal ning jäävad pärast otstipu eemaldamist omavahel ühendatuks ahela allesjääva osaga. Seega ei saa need tipud sattuda erinevatesse komponentidesse, nagu oleks eraldava tipu eemaldamisel.

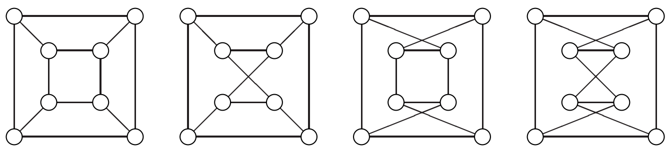
12. a) Kuuetipulise täisgraafi K_6 iga serv värvitakse kas siniseks või punaseks. Tõestada, et värvitud graafis leidub kolmnurk, mis koosneb täielikult ühte värvi servadest.

b) Viietipulise täisgraafi K_5 iga serv värvitakse kas siniseks või punaseks. Tõestada, et värvitud graafis leidub tsükkel, mis koosneb täielikult ühte värvi servadest.

Lahendus. a) Vaatleme ühte tippu. Sellest väljub 5 serva. Vähemalt 3 nendest servadest on ühte värvi. Kui nende 3 serva teiste otstippude seas leidub kaks, millevaheline serv on sama värvi nagu need servad ise, siis moodustavad otsitava kolmnurga need kaks tippu koos vaadeldava tipuga. Kui aga nende 3 serva teisi otstippe omavahel ühendavad servad on kõik teist värvi, siis moodustavad nad ise otsitava kolmnurga.

b) Täisgraafis K_5 on 10 serva. Vähemalt 5 nendest on sama värvi. Ent 5 tipu ja 5 servaga graafis leidub alati tsükkel.

13. Millised järgmiste graafide hulgast on omavahel isomorfsed?



Lahendus. Esimene ja kolmas graaf on omavahel isomorfsed, sest kui välimise tsükli tipud tähistada numbritega 1, 2, 3, 4 päripäeva ning nendega intsidentsed sisemise tsükli tipud tähtedega a, b, c, d, siis on kummalgi graafil täpselt samad servad: 12, 23, 34, 41, 1a, 2b, 3c, 4d, ab, bc, cd, da.

Samamoodi võime veenduda, et teine ja neljas graaf on isomorfsed.

Esimene ja teine graaf ei ole isomorfsed, sest esimene graaf on kahealuseline (ühe aluse moodustavad kaks välimise tsükli vastastippu ja nendega mitteseotud kaks sisemise tsükli vastastippu), mistõttu graafis ei leidu paaritu pikkusega tsükleid, teises graafis aga on olemas tsükkel pikkusega 5 (kolm järjestikust tippu välimisel tsüklil ning tagasi läbi kahe tipu sisemisel tsüklil).

14. Vaatleme graafi G, mille korral $V(G) = \{1,2,3\} \times \{1,2\}$ ning $E(G) = \big\{\big((a,b),(c,d)\big) \colon a+b+c+d \text{ on paaritu}\big\}$. Tõestada, et graaf G on isomorfne graafiga $K_{3,3}$.

Lahendus. Jaotame graafi tipud kaheks hulgaks: $X = \{(1,1),(2,2),(3,1)\}$ ning $Y = \{(1,2),(2,1),(3,2)\}$. Hulga X elementides on komponentide summa paaris, hulga Y elementides paaritu. Kui (a,b) ja (c,d) kuuluvad samasse hulka, siis graafis nende vahel serva ei ole, sest $a+b+c+d$ on kindlasti paaris. Kui (a,b) ja (c,d) kuuluvad erinevatesse hulkadesse, siis $a+b+c+d$ on paaritu ja nende elementide vahel on serv.

15. Olgu G graaf, kus $V(G) = \mathcal{P}(\{x,y,z\})$ ja $E(G) = \{\{A,B\}\colon A \subseteq B,\ A \neq B\}$, ning H graaf, kus $V(H) = \{d\colon d \mid 30,\ d \in \mathbb{N}\}$ ja $E(G) = \{\{a,b\}\colon a \mid b,\ a \neq b\}$. Tõestada, et graafid G ja H on isomorfsed.

Lahendus. Defineerime funktsiooni $f\colon V(G) \to V(H)$ selliselt, et $f(\{x\}) = 2$, $f(\{y\}) = 3$, $f(\{z\}) = 5$ ning suvalise hulga $A \subseteq V(G)$ korral $f(A) = \prod_{a\in A} f(\{a\})$. See funktsioon on injektiivne, sest erinevatele hulkadele A ja B vastavad korrutised $f(A)$ ja $f(B)$ erinevad vähemalt ühe algteguri 2, 3 või 5 poolest. Samuti on see funktsioon sürjektiivne, sest iga arv $d \in V(H)$ esitub algtegurite 2, 3, 5 korrutisena, kus iga algteguri astendaja on ülimalt 1. Järelikult on funktsioon f isomorfism graafide G ja H vahel.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

16. Olgu X mingi hulk ja ϱ sellel hulgal määratud refleksiivne ja transitiivne relatsioon.

a) Tõestada, et relatsioon $\sigma = \varrho \cap \varrho^{-1}$ on ekvivalents hulgal X.

b) Tõestada, et relatsioon $\bar{\varrho} = \{(x/\sigma, y/\sigma)\colon x\ \varrho\ y\}$ on osaline järjestus hulgal X/σ.

Lahendus. a) Tõestame, et relatsioon σ on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

- Relatsioon σ on refleksiivne, sest ϱ refleksiivsuse tõttu sisaldavad nii ϱ kui ka ϱ^{-1} kõiki paare kujul (x,x), kus $x \in X$.
- Kui $(x,y) \in \sigma$, siis $(x,y) \in \varrho \cap \varrho^{-1}$, kust $(x,y) \in \varrho$ ja $(x,y) \in \varrho^{-1}$. Viimastest seostest saame $(y,x) \in \varrho^{-1}$ ja $(y,x) \in \varrho$. Siit $(y,x) \in \varrho \cap \varrho^{-1}$ ehk $(y,x) \in \sigma$. Järelikult on relatsioon σ sümmeetriline.
- Kui $(x,y) \in \sigma$ ja $(y,z) \in \sigma$, siis $(x,y) \in \varrho \cap \varrho^{-1}$ ja $(y,z) \in \varrho \cap \varrho^{-1}$. Järelikult $(x,y) \in \varrho$, $(x,y) \in \varrho^{-1}$, $(y,z) \in \varrho$, $(y,z) \in \varrho^{-1}$. Esimesest ja kolmandast seosest saame ϱ transitiivsuse tõttu $(x,z) \in \varrho$, teisest ja

neljandast seosest aga $(y, x) \in \varrho$, $(z, y) \in \varrho$, millest jällegi ϱ transitiivsuse tõttu $(z, x) \in \varrho$ ehk $(x, z) \in \varrho^{-1}$. Seega $(x, z) \in \varrho$ ja $(x, z) \in \varrho^{-1}$, millest $(x, z) \in \varrho \cap \varrho^{-1}$ ehk $(x, z) \in \sigma$. Järelikult on relatsioon σ transitiivne.

b) Tõestame, et relatsioon $\bar{\varrho}$ on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.

- Olgu $A \in X/\sigma$ suvaline element (st ekvivalentsiklass). Siis mingi $x \in X$ korral $A = x/\sigma$. Relatsiooni ϱ refleksiivsuse tõttu $x \ \varrho \ x$. Järelikult $(x/\sigma, x/\sigma) \in \bar{\varrho}$. Seega $(A, A) \in \bar{\varrho}$.

- Eeldame, et mingite elementide A, $B \in X/\sigma$ korral $(A, B) \in \bar{\varrho}$ ja $(B, A) \in \bar{\varrho}$. Olgu $A = x/\sigma$ ja $B = y/\sigma$, kus x, y on mingid elemendid hulgast X. Siis $(x, y) \in \varrho$ ja $(y, x) \in \varrho$. vastavalt relatsiooni $\bar{\varrho}$ definitsioonile. Viimasest seosest saame $(x, y) \in \varrho^{-1}$. Et $\sigma = \varrho \cap \varrho^{-1}$, siis $(x, y) \in \sigma$. Et σ on ekvivalents, siis elemente x ja y sisaldavad ekvivalentsiklassid langevad kokku. Seega $x/\sigma = y/\sigma$ ehk $A = B$. Järelikult on relatsioon $\bar{\varrho}$ antisümmeetriline.

- Eeldame, et $(A, B) \in \bar{\varrho}$ ja $(B, C) \in \bar{\varrho}$. Hulgas X leiduvad elemendid x, y ja z nii, et $A = x/\sigma$, $B = y/\sigma$ ja $C = z/\sigma$. Vastavalt relatsiooni $\bar{\varrho}$ definitsioonile $(x, y) \in \varrho$ ja $(y, z) \in \varrho$. Et ϱ on transitiivne, siis ka $(x, z) \in \varrho$. Kasutades jällegi relatsiooni $\bar{\varrho}$ definitsiooni, saame $(x/\sigma, z/\sigma) \in \bar{\varrho}$ ehk $(A, C) \in \bar{\varrho}$. Seega on relatsioon $\bar{\varrho}$ transitiivne.

17. $2n$-tipulises lihtgraafis leidub täpselt kaks sama astmega tippu.

a) Milline on nende kahe tipu aste?

b) Kas vastus on üheselt määratud?

Lahendus. a) Et graafil on $2n$ tipu hulgas täpselt kaks võrdse astmega tippu, siis esineb graafi tipuastmete seas parajasti $2n - 1$ erinevat arvu. Et aga graafis ei saa korraga olla tippu astmega 0 ja tippu astmega $2n - 1$, siis on graafi tipuastmeteks kas arvud $0, \ldots, 2n - 2$ või arvud $1, \ldots, 2n - 1$.

Tõestame induktsiooniga, et kui graafi tipuastmeteks on $0, \ldots, 2n-2$, siis võrdse astmega tippude aste on $n-1$. Kui $n = 1$, siis on graafi tipuastmed 0 ja 0 ehk mõlemad $n-1$; tegemist on kahest isoleeritud tipust koosneva graafiga. Eeldame, et väide kehtib, kui $n = k - 1$, ning olgu $n = k$. Siis on on meil tegemist $2k$-tipulise graafiga. Tippe astmega 0 pole selles rohkem kui üks, sest tipp astmega $2k - 2$ on ühendatud kõigi tippudega peale ühe. Ka tippe astmega $2k - 2$ pole rohkem kui üks, sest iga selline tipp on ühendatud kõigi tippudega peale astmega 0 tipu, seega kui niisuguseid tippe oleks rohkem, siis ei saaks graafis leiduda tippe astmega 1. Eemaldame nüüd graafist tipud astmetega 0 ja $2k-2$. Sellega väheneb iga ülejäänud tipu aste ühe võrra. Järele jääb $2(k-1)$-tipuline graaf, milles esineb samuti täpselt kaks võrdse astmega tippu ning mille tippude astmed on $0, 1, \ldots, 2k-4 = 2(k-1)-2$. Induktsiooni eelduse põhjal on võrdse astmega tipud selles graafis mõlemad astmega $k-2$. Järelikult enne kahe tipu eemaldamist oli nende tippude aste $k-1$.

Tõestame nüüd, et kui graafi tipuastmeteks on $1, \ldots, 2n-1$, siis võrdse astmega tippude aste on n. Moodustame graafi täiendi. Et $2n$-tipulise täisgraafi maksimaalne tipuaste on $2n-1$, siis on saadud graafi tippude astmed $0, \ldots, 2n-2$. Ka selles graafis leidub täpselt kaks võrdse astmega tippu. Eelneva põhjal on nende tippude aste $n-1$. Järelikult esialgses graafis oli nende tippude aste $2n-1-(n-1) = n$.

b) Vastus ei ole üheselt määratud, sest iga n korral leidub kaks ülesande tingimusi rahuldavat graafi, millest ühes on võrdse astmega tippude aste $n-1$ ja teises n. Esimese graafi saame moodustada näiteks kahetipulisest nullgraafist, rakendades $n-1$ korda järgmist operatsiooni: lisame graafile kaks uut tippu ning ühendame ühe nendest kõigi varem graafis olnud tippudega; teiseks graafiks sobib selle graafi täiend.

18. Olgu G lihtgraaf, mille iga tipu aste on 3. Tõestada, et graafis G leidub tsükkel, mille pikkus on paarisarv.

Lahendus. Vaatleme graafis maksimaalse pikkusega ahelat $v_1v_2\ldots v_n$. Maksimaalsuse tõttu asuvad tipu v_1 kõik kolm naabrit sellel ahelal, olgu need naabrid lisaks tipule v_2 veel tipud v_i ja v_j, kus $i < j$. Kui vähemalt üks tsüklitest $v_1v_2\ldots v_iv_1$ ja $v_1v_2\ldots v_jv_1$ on paarisarvulise pikkusega, siis väide kehtib. Kui mõlemad tsüklid on paarituarvulise pikkusega, siis on tsükkel $v_1v_i\ldots v_jv_1$ paarisarvulise pikkusega, sest ahelad $v_1v_2\ldots v_i$ ja $v_1v_2\ldots v_j$ on paarisarvulise pikkusega ja seetõttu on ka ahel $v_i\ldots v_j$ paarisarvulise pikkusega.

19. Olgu $A \subseteq \mathbb{N}$ lõplik hulk ning $G_A = (A, E)$ graaf, kus kõikide r, $s \in A$ korral $rs \in E$ parajasti siis, kui $\mathrm{SÜT}(r, s) > 1$. Tõestada, et iga lihtgraafi G korral leidub selline hulk A, et graaf G on isomorfne graafiga G_A.

Lahendus. Olgu n graafi G tippude arv ja m servade arv. Seame tippudele vastavusse algarvud $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ning servadele algarvud $q_1, q_2, \ldots, q_m$ nii, et kõik algarvud on paarikaupa erinevad. Olgu nüüd iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral a_i arvu p_i ja kõigi i-nda tipuga intsidentsetele servadele vastavate arvude q_j korrutis. Otsitav hulk on $A = \{a_i\}$.

Tõepoolest, kõik arvud a_i on erinevad, sest igaüks jagub vähemalt ühe algarvuga p_i, millega ükski teine ei jagu. Kui graafis G on tipud i ja i' ühendatud servaga j, siis jaguvad a_i ja $a_{i'}$ mõlemad arvuga q_j, mistõttu $\text{SÜT}(a_i, a_{i'}) > 1$. Kui graafis G on tipud i ja i' servaga ühendamata, siis pole arvudel a_i ja $a_{i'}$ ühtegi ühist algtegurit, mistõttu $\text{SÜT}(a_i, a_{i'}) = 1$. Järelikult on graafid G ja G_A isomorfsed.

20. Olgu k naturaalarv ning $\mathcal{O}_k$ nn *k-paaritu graaf*, mille korral $V(\mathcal{O}_k) = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2k+1\} \colon |A| = k\}$ ning $E(\mathcal{O}_k) = \{\{A, B\} \colon A \cap B = \emptyset\}$. Tõestada, et kui $k \geqslant 3$, siis graaf $\mathcal{O}_k$ sisaldab tsüklit pikkusega 6, aga ei sisalda tsüklit, mille pikkus on väiksem kui 6.

Lahendus. Vaatleme graafi $\mathcal{O}_k$ suvalist serva AB. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ ja $B = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ (vastasel juhul muudame elementide järjekorda). Tippudel A ja B ei leidu ühist naabertippu, sest hulk C, mille puhul $A \cap C = \emptyset$ ja $B \cap C = \emptyset$, saab sisaldada ülimalt ühte elementi (elementi $2k+1$) ega rahulda seetõttu tingimust $k \geqslant 3$. Seega ei leidu graafis tsüklit pikkusega 3.

Olgu X tipu A suvaline B-st erinev naabertipp ning Y tipu B suvaline A-st erinev naabertipp. Siis $X \cap Y = \{2k+1\}$, mistõttu $XY \notin E(G)$. Seega ei leidu graafis ka tsüklit pikkusega 4.

Tippudel X ja Y ei leidu ühist naabertippu, sest hulk Z, mille puhul $X \cap Z = \emptyset$ ja $Y \cap Z = \emptyset$, saab sisaldada ülimalt kahte elementi (üks element hulgast $\{1, 2, \ldots, k\}$ ja teine element hulgast $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$) ning ei rahulda jällegi tingimust $k \geqslant 3$. Seega ei leidu graafis tsüklit pikkusega 5.

Graafis leidub tsükkel $\{1, 2, \ldots, k-1, k\} \to \{k+2, k+3, \ldots, 2k+1\} \to \{1, 2, \ldots, k-1, k+1\} \to \{k, k+3, \ldots, 2k+1\} \to \{1, 2, \ldots, k-1, k+2\} \to \{k+1, k+3, \ldots, 2k+1\} \to \{1, 2, \ldots, k-1, k\}$, mille pikkus on 6.