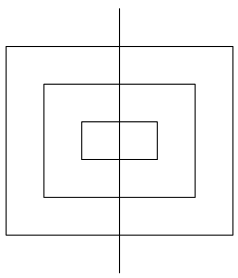
Diskreetne matemaatika 2012

3. praktikum

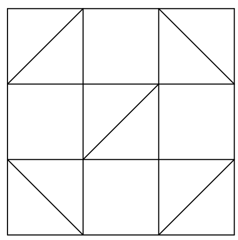
Reimo Palm

Praktikumiülesanded

1. Teha kindlaks, kas järgmisi kujundeid saab joonistada ilma pliiatsit paberilt tõstmata ja ühtegi joont korduvalt läbimata.



a)



b)

2. a) Tõestada, et kui sidusas graafis leidub täpselt kaks paaritu astmega tippu, siis leidub graafis Euleri ahel, mis algab ühes neist tippudest ja lõpeb teises.

b) Olgu G sidus graaf, milles leidub $m > 0$ paaritu astmega tippu. Tõestada, et graafis leidub $m/2$ ahelat nii, et graafi G iga serv asub täpselt ühel neist ahelatest.

3. a) Tõestada, et igas suunamata graafis G saab servadele omistada suunad nii, et iga tipu $v \in G$ korral $|\overrightarrow{\deg}(v) - \overleftarrow{\deg}(v)| \leqslant 1$.

b) Leida selline servade suunamise viis ülesandes 7c) kujutatud Peterseni graafis.

4. Näituseruum jaguneb paljudeks üksteisega lõikuvateks koridorideks. Koridoride seintele on välja pandud pildid mõlemat kätt. Külastaja võib mööda koridori liikudes vaadata pilte kas ainult ühel seinal või mõlemal seinal. Ruumil on ainult üks uks. Tõestada, et külastaja võib siseneda näituseruumi, teha ringkäigu ja väljuda nii, et ta näeb iga pilti täpselt üks kord.

5. Tõestada, et iga sidusa lihtgraafi G puhul kehtib üks järgmistest tingimustest.

a) G on Euleri graaf.

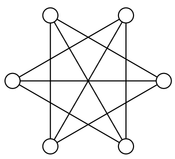
b) G on saadav teatavast Euleri lihtgraafist ühe tipu kustutamise teel.

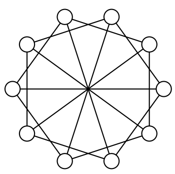
Kas leidub sidus lihtgraaf, mis rahuldab korraga mõlemat tingimust?

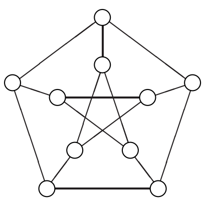
6. Paigutada ringjoonele 4 nulli ja 4 ühte nii, et saadav numbrite ring sisaldaks päripäeva lugedes iga arvukolmikut 000, 001, ..., 111 täpselt üks kord.

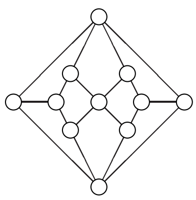
Juhis. Vaadelda suunatud graafi tippudega 000, 001, ..., 111 ning leida selles Hamiltoni tsükkel.

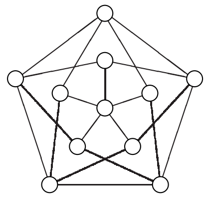
7. Kui graafis leidub Hamiltoni tsükkel, siis leida see. Vastasel korral tõestada, et Hamiltoni tsüklit ei ole.

a) 

b) 

c)  *Peterseni graaf*

d)  *Herscheli graaf*

e)  *Grötzschi graaf*

8. Tõestada, et $K_{n,n+1}$ ei ole Hamiltoni graaf ühegi $n \geqslant 1$ korral.

9. Tõestada, et $K_{n,n}$ on Hamiltoni graaf iga $n \geqslant 2$ korral.

10. Tõestada, et kui igal koosviibimisest osavõtjal on ülejäänute hulgas tuttavaid rohkem kui võõraid, siis saab kõik osavõtjad panna istuma ümmarguse laua ümber nii, et igaüks tunneb oma mõlemat naabrit.

11. Olgu G selline vähemalt 4-tipuline graaf, et iga kolme erineva tipu u, v, w korral sisaldab nende tippude poolt indutseeritud alamgraaf vähemalt kaks serva. Tõestada, et G on Hamiltoni graaf.

12. *Gray kood* on n-bitiste kahendarvude 0, 1, …, $2^n - 1$ järjestus, kus iga kaks järjestikust kahendarvu erinevad täpselt ühe biti poolest.

a) Tõlgendada n-bitist Gray koodi n-mõõtmelise kuubi (vt eelmise praktikumi ülesanded) abil.

b) Leida üks 3-bitine Gray kood.

c) Tõestada, et iga positiivse täisarvu n korral leidub n-bitine Gray kood.

Koduülesanded

Valida vähemalt kaks järgmistest ülesannetest ja esitada nende lahendused kahe nädala jooksul.

13. Olgu n positiivne täisarv ja $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vaatleme graafi G_n, mille korral $V(G) = \{A \subseteq X_n \colon |A| = 2\}$ ning $E(G) = \{\{A, B\} \colon A \cap B \neq \emptyset\}$. Leida kõik positiivsed täisarvud n, mille korral G_n on Euleri graaf.

14. Samal tippude hulgal määratud graafide G_1 ja G_2 *sümmeetriliseks vaheks* nimetatakse graafi $G = G_1 \,\Delta\, G_2$, mille tippude hulk on $V(G) = V(G_1) = V(G_2)$ ning servade hulk $E(G) = E(G_1) \,\Delta\, E(G_2)$. Tõestada, et kui G_1 ja G_2 on graafid, mille iga sidus komponent on Euleri graaf, siis ka $G_1 \,\Delta\, G_2$ on graaf, mille iga sidus komponent on Euleri graaf.

15. Graafide G ja H *korrutiseks* $G \times H$ nimetatakse graafi tippude hulgaga $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ ning servade hulgaga $E(G \times H) = \{\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} \colon u_1 = u_2,\ \{v_1, v_2\} \in E(G)$ või $v_1 = v_2,\ \{u_1, u_2\} \in E(G)\}$. Olgu G ja H mõlemad n-tipulised ahelad. Tõestada, et graafis $G \times H$ leidub Hamiltoni tsükkel parajasti siis, kui n on paarisarv.

16. Tõestada, et kui graafist G saab eemaldada mingi arvu m tippe nii, et järelejääv graaf koosneb rohkem kui m sidusast komponendist, siis graaf G ei ole Hamiltoni graaf.