Diskreetne matemaatika 2012

5. praktikum

Reimo Palm

Käesolevas teemas vaatleme komplekti omavahel ekvivalentseid teoreeme, mis on märkimisväärselt tugevad ja sisukad. Nende hulka kuuluvad Fordi-Fulkersoni teoreem, Königi-Egerváry teoreem, Halli teoreem, Königi teoreem, Mengeri teoreem, Dilworthi teoreem, Birkhoffi – Von Neumanni teoreem, Berge'i teoreem, Tutte'i teoreem.

Praktikumiülesanded

1. 52-kaardilise kaardipaki kaardid laotakse tabelisse, millel on 13 rida ja 4 veergu. Tõestada, et on võimalik valida igast reast üks kaart nii, et valitud 13 kaardi hulka kuulub täpselt üks kaart igast kõrgusest.

Juhis. $X = \{\text{kõrgused}\}$, $Y = \{\text{read}\}$, $E = \{\{x, y\}\colon \text{kaart kõrgusega } x \text{ esineb tabeli reas } y\}$.

Lahendus. Vaatleme kahealuselist graafi $G = (X \cup Y, E)$, kus $X = \{\text{kõrgused}\}$, $Y = \{\text{read}\}$ ja $E = \{\{x, y\}\colon \text{kaart kõrgusega } x \text{ esineb tabeli reas } y\}$. Olgu $S \subseteq X$ suvaline. Et iga kõrguse puhul on selle kõrgusega kaarte täpselt 4, siis kaarte, mille kõrgus kuulub hulka S, on kokku täpselt $4|S|$. Et üks tabeli rida saab sisaldada ülimalt 4 neist kaartidest, siis esinevad need kaardid üldse vähemalt $4|S| / 4 = |S|$ reas. See tähendab, et graafis G kehtib $|N(S)| \geqslant |S|$. Halli teoreemi põhjal leidub graafis G kooskõla, mis katab kõik hulga X elemendid. See kooskõla näitab iga kõrguse jaoks kätte rea, millest tuleb selle kõrgusega kaart valida.

2. Olgu $m \leqslant n$. *Ladina ristkülikuks* nimetatakse maatriksit mõõtmetega $m \times n$, mille elemendid kuuluvad hulka $\{1, 2, \ldots, n\}$ ning esinevad selle maatriksi igas reas ja igas veerus mitte üle ühe korra. *Ladina ruuduks* nimetatakse ladina ristkülikut, kus $m = n$. Tõestada, et iga ladina ristküliku saab $n - m$ rea lisamise teel täiendada ladina ruuduks.

Juhis. Induktsioon; $X = \{\text{maatriksi veerud}\}$, $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{\{i, j\}\colon \text{veerus } i \text{ puudub arv } j\}$.

Lahendus. Tõestame, et kui $m < n$, siis saab ladina ristkülikule lisada alati ühe rea. Korrates seda arutluskäiku $n-m$ korda, saame seega ristkülikule lisada $n-m$ rida.

Vaatleme kahealuselist graafi $G = (X \cup Y, E)$, kus $X = \{\text{maatriksi veerud}\}$, $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{\{i, j\}\colon \text{veerus } i \text{ puudub arv } j\}$. Et igas ladina ristküliku veerus esineb täpselt m erinevat arvu, siis puudub igast veerust täpselt $n-m$ hulga Y arvu. Järelikult on graafis G iga hulka X kuuluva tipu aste $n-m$. Teiselt poolt puudub iga arv ülimalt $n-m$ veerus, sest kui mõni arv i puuduks rohkem kui $n-m$ veerus, siis ta esineks vähem kui m veerus. Et $m \times n$-ristkülikus on kokku mn arvu, siis peab mingi teine arv j esinema rohkem kui m veerus. Siis aga leiduks ristkülikus kaks rida, kus arv j esineb samas veerus, ning tegemist poleks ladina ristkülikuga. Järelikult on graafis G iga hulka Y kuuluva tipu aste ülimalt $n-m$.

Olgu nüüd $S \subseteq X$ suvaline alamhulk. Et hulga X kõigi tippude aste on $n-m$, siis hulga S tippudega on intsidentsed täpselt $(n-m)|S|$ serva. Et hulga Y kõigi tippude aste on ülimalt $n-m$, siis jagunevad need servad hulgas Y vähemalt $(n-m)|S|\,/(n-m) = |S|$ tipu vahel. Järelikult $|N(S)| \geqslant |S|$. Halli teoreemi põhjal leidub graafis G kooskõla, mis katab hulga X. See kooskõla seab ristküliku igale veerule vastavusse arvu, mis selles veerus puudub.

3. Hulkade A_1, A_2, …, A_n *transversaaliks* nimetatakse hulka T, mille saab elemente sobivalt järjestades esitada kujul $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, kus iga i korral $t_i \in A_i$. Tõestada, et hulkadel A_1, A_2, …, A_n leidub transversaal parajasti siis, kui iga $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ korral $|\cup_{i \in I} A_i| \geqslant |I|$.

Juhis. $X = \{A_i\}$, $Y = \cup A_i$, $E = \{\{A, x\}\colon \text{hulk } A \text{ sisaldab elementi } x\}$.

Lahendus. Eeldame, et hulkadel A_1, A_2, …, A_n leidub transversaal $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, kus iga i korral $t_i \in A_i$. Siis iga $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ korral $|\cup_{i \in I} A_i| \geqslant |\cup_{i \in I} \{t_i\}| \geqslant |I|$, sest transversaali elemendid on kõik erinevad.

Vastupidi, eeldame, et iga $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ korral $|\cup_{i \in I} A_i| \geqslant |I|$. Vaatleme kahealuselist graafi $G = (X \cup Y, E)$, kus $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $Y = \cup_{i=1}^{n} A_i$ ning $E = \{\{A, x\}\colon \text{hulk } A \text{ sisaldab elementi } x\}$. Olgu $S \subseteq X$ ning $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ vastav indeksite hulk. Siis $N(S) = \cup_{i \in I} A_i$. Kasutades eeldust, saame nüüd $|N(S)| = |\cup_{i \in I} A_i| \geqslant |I| = |S|$. Seega Halli teoreemi põhjal leidub graafis G kooskõla, mis katab hulga X. See kooskõla seab igale hulgale A_i vastavusse omaette elemendi t_i.

4. Kas hulga $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kõigi 3-elemendiliste alamhulkade komplektil leidub transversaal?

Lahendus. Ei leidu, sest selle hulga 3-elemendiliste alamhulkade arv on $\binom{5}{3} = 10$, aga hulgas on ainult 5 erinevat elementi.

5. Tõestada Halli teoreemi piisavuse osa Mengeri teoreemi abil.

a) Lisada graafile G kaks tippu u ja v, millest üks on seotud alusega X ja teine alusega Y.

b) Tõestada, et Halli teoreemis nimetatud omadusega kooskõla leidub parajasti siis, kui paarikaupa ühiste sisetippudeta ahelate arv tipust s tippu t on $|X|$.

c) Järeldada Mengeri teoreemist, et see tingimus on täidetud siis, kui iga tippe s ja t eraldav tippude hulk S graafis G koosneb vähemalt $|X|$ tipust.

d) Jaotada hulga S tipud vastavalt alustele X ja Y kaheks hulgaks A ja B.

e) Tõestada, et $|X \setminus A| \leqslant |B|$, kasutades asjaolu, et S on eraldav hulk ning et $X \setminus A$ rahuldab Halli teoreemi piisavuse osa eeldusi.

f) Järeldada, et $|S| \geqslant |X|$.

Lahendus. Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuseline graaf alustega X ja Y. Eeldame, et iga $S \subseteq X$ korral $|N(S)| \geqslant |S|$. Lisame graafile G kaks tippu s ja t ning ühendame tipu s kõigi hulga X tippudega ja tipu t kõigi hulga Y tippudega.

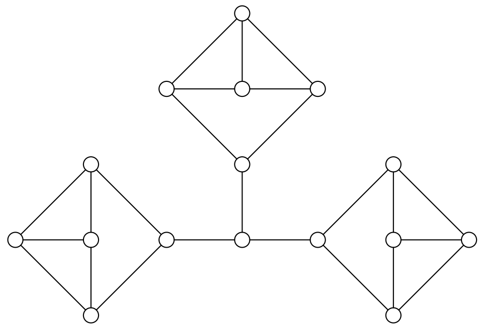
Graafis G leidub kõiki hulga X tippe kattev kooskõla parajasti siis, kui erinevate, ühiste sisetippudeta ahelate arv tipust s tippu t on $|X|$. Tõepoolest, pikendades sellise kooskõla kõiki servi alguses tipuni s ja lõpus tipuni t, saame $|X|$ lõikumatut ahelat tippude s ja t vahel ning ka vastupidi, kui leidub $|X|$ lõikumatut ahelat, siis nende esimesed tipud (hulgas X) pärast tippu s on kõik erinevad ning ka järgmised tipud (hulgas Y) on kõik erinevad.

Tõestamaks, et maksimaalne lõikumatute ahelate arv tippude s ja t vahel on $|X|$, piisab Mengeri teoreemi põhjal tõestada, et tippe s ja t eraldavate hulkade vähim võimsus on $|X|$, st iga selline hulk sisaldab vähemalt $|X|$ elementi. Olgu S mingi tippe s ja t eraldav hulk. Olgu $A = S \cap X$ ja $B = S \cap Y$. Siis $N(X \setminus A) \subseteq B$, sest kui mingil tipul $u \in X \setminus A$ leiduks naaber $v \in Y \setminus B$, siis poleks S eraldav hulk, sest pärast selle eemaldamist leiduks ikkagi ahel s–u–v–t tipust s tippu t. Järelikult $|N(X \setminus A)| \leqslant |B|$. Teiselt poolt eelduse põhjal $|N(X \setminus A)| \geqslant |X \setminus A|$. Seega $|B| \geqslant |X \setminus A|$. Nüüd aga $|S| = |A| + |B| \geqslant |A| + |X \setminus A| = |X|$.

6. Vaatleme *Sylvesteri graafi* (joonis 1).

a) Leida Sylvesteri graafis maksimaalne kooskõla.

b) Leida Sylvesteri graafis minimaalne kate.



Joonis 1.

c) Võrrelda tulemusi. Kas siin on vastuolu mõne teoreemiga?

d) Tõestada, et Sylvesteri graafis ei leidu *täielikku kooskõla*, st kooskõla, mis haarab kõik tipud.

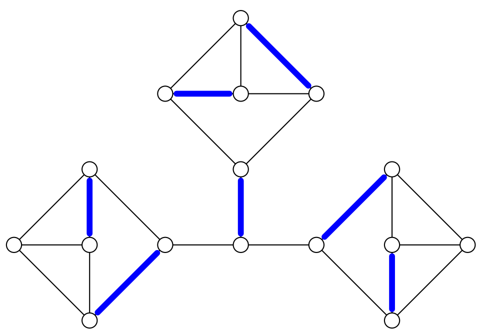
e) Tõestada, et iga $r > 1$ korral leidub regulaarne lihtgraaf astmega r, milles pole täielikku kooskõla.

Märkus. Sylvesteri graaf on on vähim paaritu astmega regulaarne graaf, kus ei leidu täielikku kooskõla.

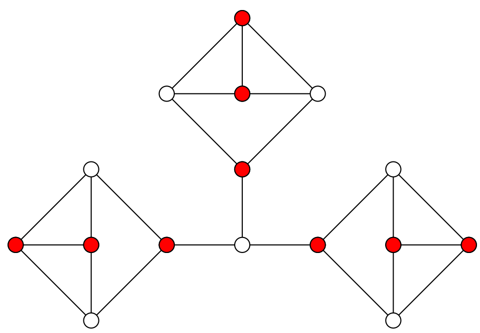
Lahendus. a) Maksimaalne kooskõla, suurusega 7 serva, on kujutatud joonisel 2.

b) Minimalne kate, suurusega 9 tippu, on kujutatud joonisel 3.

c) Tulemus ei ole vastuolus Königi teoreemiga („Graafid“, lk 56, teoreem 7.5), sest see teoreem kehtib kahealuseliste graafide kohta, kuid Sylvesteri graaf ei ole kahealuseline, sest seal esineb paaritu tsükkel. Tulemus ei ole vastuolus ka sellele eelneva lemmaga („Graafid“, lk 56, lemma 7.4), sest võrratus $|M| \leqslant |K|$ ehk $7 \leqslant 9$ kehtib; teine lause annab kooskõla maksimaalsusele ja katte minimaalsusele küll piisava, aga mitte tarviliku tingimuse.



Joonis 2.



Joonis 3.

d) Täielikus kooskõlas peaks keskmine tipp olema kaetud mingi kooskõlasse kuuluva servaga. Eemaldades selle serva ja tema mõlemad otstipud, jaguneb graaf kolmeks sidusaks komponendiks, millest igaühes tuleks eraldi leida täielik kooskõla. See aga pole võimalik, sest kaks neist komponentidest on paaritu arvu tippudega.

e) Kui r on paaris, siis selliseks graafiks sobib K_{r+1}. See on regulaarne graaf astmega r, samas ei leidu temas täielikku kooskõla, sest tippude arv on paaritu. Kui r on paaritu, siis ühendame täielikus nullgraafis O_{r+2} kõik tipud peale ühe servade abil paaridesse, viimase tipu aga ühendame servaga ühe suvalise ülejäänud tipu külge. Olgu G saadud graafi täiend. Graafis G on $r+2$ tippu, kusjuures $r+1$ neist on astmega r ning üks astmega $r-1$. Moodustame nüüd r eksemplari graafi G ning ühendame nad kõik astmega $r-1$ tippu pidi ühe uue tipu v külge. Nii saame graafi, mille iga tipu aste on r. Kui selles graafis leiduks täielik kooskõla, siis peaks see haarama ka keskmise tipu. Jättes ära keskmise tipu ja tema naabri selles kooskõlas, jaguneb graaf G parajasti r sidusaks komponendiks, millest igaühes peaks samuti leiduma täielik kooskõla. See on aga võimatu, sest nendes komponentides, kuhu tipu v naaber ei kuulunud, on tippe paaritu arv.

7. Leida maksimaalne kooskõla n-mõõtmelises kuubis Q_n. Mitu serva see sisaldab? Kas see on täielik kooskõla?

Lahendus. Selleks kooskõlaks sobib $M = \{\{b0, b1\} : b \in \{0,1\}^{n-1}\}$. (See tähendab, jaotame kuubi Q_n tipud kahte klassi $\{b0 : b \in \{0,1\}^{n-1}\}$ ja $\{b1 : b \in \{0,1\}^{n-1}\}$ ning ühendame esimese klassi iga tipu teise klassi sama $(n-1)$-kohalise prefiksiga tipuga.) See on tõepoolest kooskõla, sest iga tipp on ühendatud ainult ühe tipuga, samuti on see kooskõla täielik, sest iga tipp, olgu ta kujul $b0$ või kujul $b1$ on mingi hulka M kuuluva serva otstipp. Et M on täielik kooskõla ja graafis Q_n on 2^n tippu, siis kooskõlas M on $2^n : 2 = 2^{n-1}$ serva.

8. Kui palju täielikke kooskõlasid leidub

a) graafil $K_{n,n}$;

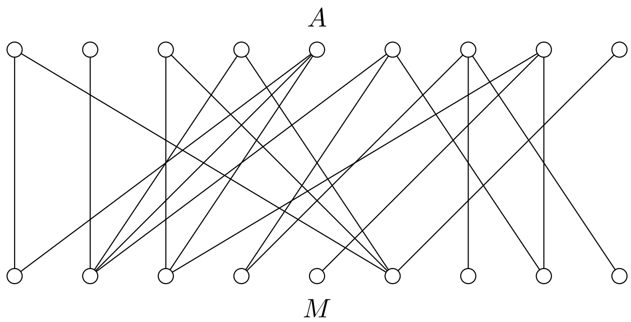
b) graafil K_{2n}?

Lahendus. Selles ülesandes eeldame, et graafi tipud on üksteisest eristatavad.

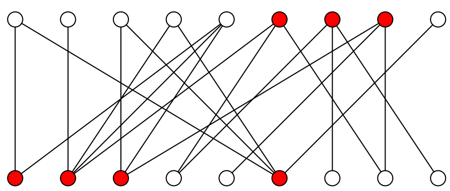
a) Nummerdame graafi $K_{n,n}$ kummagi aluse tipud arvudega 1, 2, ..., n. Graafis leidub parajasti niipalju täielikke kooskõlasid, kui mitmel viisil saab esimese aluse tippudele 1, 2, ..., n seada vastavusse teise aluse tipud 1, 2, ..., n mingis järjekorras. Selleks on $n!$ võimalust.

b) Nummerdame graafi K_{2n} tipud arvudega $1, 2, \ldots, 2n$. Võtame tipu 1 ja seame talle vastavusse ühe ülejäänud tippudest, selleks on $2n-1$ võimalust. Seejärel võtame allesjäänud tippude seast kõige väiksema numbriga tipu ning seame talle vastavusse ühe ülejäänud tippudest, selleks on $2n-3$ võimalust. Siis võtame jälle allesjäänute seast kõige väiksema numbriga tipu jne kuni kõik tipud on paaridesse jagatud. Täielike kooskõlade arv graafis on seega $(2n-1)(2n-3)\ldots\cdot 3\cdot 1=\frac{(2n)!}{2^n n!}$

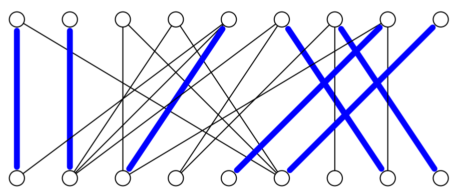
9. Ettevõtte tegevjuht soovib mitmest arendamisel olevast tootest valida välja parima, mida turule tuua. Selleks laseb ta iga toodet analüüsida kaheliikmelisel meeskonnal, mis koosneb arendajast ja müüjast, kes kirjutavad koos toote kohta aruande. Meeskonnad moodustatakse järgmise graafi põhjal; iga serv vastab ühele tootele ning selle otspunktid arendajale ja müüjale (vastavalt hulgad A ja M), kes seda analüüsivad. Milline on vähim inimeste arv, keda tegevjuht peab koosolekule kutsuma, et iga toote kohta oleks aruanne olemas? (Aruande võib esitada kas arendaja või müüja.)



Lahendus. Meil on vaja leida selles graafis minimaalne kate. Joonisel 4 on kujutatud kate võimsusega 7. Joonisel 5 on kujutatud kooskõla võimsusega samuti 7. Graafide õpiku lk 56 lemma 7.4 põhjal on need minimaalne kate ja maksimaalne kooskõla. Seega ülesande vastus on 7.



Joonis 4.



Joonis 5.

10. Tootmisüksuses tuleb ära teha n tööd $1, 2, \ldots, n$, igaüks võtab aega ühe päeva. Tööde tegemiseks on tootmisüksusel olemas kaks masinat. Esimene teeb korraga ühte tööd ja teeb selle ära ühe päevaga, teine aga teeb korraga kahte tööd ja teeb need mõlemad ära ühe päevaga. Tööde vahel kehtib osaline eelnevusjärjestus $\leqslant$, kus $i \leqslant j$ tähendab, et töö i peab olema tehtud enne, kui tööga j saab alustada. Eesmärk on teha ära kõik tööd nii, et suurus $p_1 + p_2$ oleks minimaalne, kus p_i on päevade arv, mille jooksul masin i on kasutuses. Formuleerida see ülesanne maksimaalse kooskõla leidmise ülesandena sobivalt defineeritud graafis.

Lahendus.

11. a) Olgu M kooskõla graafis G. Tõestada, et graafis G leidub maksimaalne kooskõla, mis katab kõiki neid tippe, mida katab ka M. *Juhis.* Berge'i teoreem.

b) Järeldada sellest, et iga tipu sidusas mittetriviaalses graafis saab katta mingi maksimaalse kooskõlaga.

c) Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuseline graaf ning $A \subseteq X$ ja $B \subseteq Y$. Tõestada, et kui graafis G leidub kooskõla, mis katab hulga A kõik tipud, ja kooskõla, mis katab hulga B kõik tipud, siis leidub graafis G ka kooskõla, mis katab hulga $A \cup B$ kõik tipud.

Lahendus. a) Kui M ei ole maksimaalne, siis Berge'i teoreemi põhjal leidub graafis M-laienev ahel. Vastavalt definitsioonile ei ole selle ahela otstipud kaetud kooskõlaga M, aga kõik vahepealsed tipud on. Kui sellel ahelal vahetada ära servade kuulumine/mittekuulumine hulka M, siis saame kooskõla M_1, mis katab ikka kõiki selle ahela vahepealseid tippe, st kooskõla M_1 katab kõiki neid tippe mis kooskõla M. Seejuures sisaldab M_1 ühe serva rohkem kui M. Kui ka M_1 ei ole maksimaalne, siis konstrueerime analoogiliselt kooskõla M_2 jne. Mingil sammul saame kooskõla M_k, milles enam M_k-laienevat ahelat ei leidu ning mis seetõttu on maksimaalne. See kooskõla katab kõiki neid tippe mis kõik eelmised kooskõlad, sealhulgas kõiki tippe, mida katab kooskõla M.

b) Sidusas mittetriviaalses graafis on iga tipp intsidentne mingi servaga. Olgu v suvaline tipp ja e temaga intsidentne serv. Vaatleme kooskõla, mis koosneb ainult servast e. Vastavalt punktile a) leidub maksimaalne kooskõla, mis katab serva e otstippe, st ka tippu v.

c) Olgu M ja N kooskõlad, mis katavad vastavalt hulga A ja B kõik tipud. Tõestame, et kooskõla M saab muuta kooskõlaks, mis katab ühe tipu v hulgast B. Ülesande väide järeldub siis induktsiooniga. Kui kooskõla M juba katab tipu v, siis sobib selleks kooskõlaks M ise. Vastasel korral valime kooskõlast N serva, mis katab tippu v. Kui selle serva teine otstipp kuulub hulka A, siis valime kooskõlast M serva, mis katab seda tippu. Kui selle serva teine otstipp kuulub hulka B, siis valime jälle kooskõlast N serva, mis katab seda tippu jne. Et M ja N on kooskõlad, siis saab selline servade valimine lõppeda kas siis, kui jõutakse tippu, mis jääb väljapoole hulki A ja B, või jõutakse tagasi tippu v. Defineerime nüüd uue kooskõla M_1, millesse lisame eelnevas valitud servadest need, mis kuuluvad kooskõlla N, ning lisame juurde kõik kooskõlla M kuuluvad valimata jäänud servad. Kooskõla M_1 katab kõik hulga A tipud ja tipu v.

12. Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuseline graaf. Tõestada, et servade arv graafi G maksimaalses kooskõlas on $|X| - \max_{X' \subseteq X}\{|X'| - |N(X')|\}$.

Lahendus. Olgu X_1 selline hulk X', mille korral avaldis $|X'| - |N(X')|$ saavutab maksimaalse väärtuse. Vaatleme suvalist kooskõla M. Hulka X_1 kuuluvaid tippe saab katta ülimalt $N(X_1)$ kooskõla M serva. Hulka $X \setminus X_1$ kuuluvaid tippe saab katta ülimalt $|X \setminus X_1| = |X| - |X_1|$ kooskõla M serva. Järelikult saab kooskõlas M olla ülimalt $|N(X_1)| + |X| - |X_1| = |X| - \max X' \subseteq X(|X'| - |N(X')|)$ serva. Seega ka maksimaalses kooskõlas on ülimalt niipalju servi.

Teiselt poolt, lisame graafile G juurde $\max_{X' \subseteq X}\{|X'| - |N(X')|\}$ tippu ning ühendame nad kõik aluse X kõigi tippudega. Siis iga $X' \subseteq X$ korral $|N(X')| \geqslant |X'|$. Halli teoreemi põhjal leidub muudetud graafis täielik kooskõla. Selles on täpselt $|X|$ serva. Kui lisatud tipud nüüd uuesti eemaldada, siis eemaldame sellest kooskõlast ülimalt $\max_{X' \subseteq X}\{|X'| - |N(X')|\}$ serva. Järele jääb kooskõla, kus on vähemalt $|X| - \max_{X' \subseteq X}\{|X'| - |N(X')|\}$ serva. Seega maksimaalses kooskõlas on vähemalt niipalju servi.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

13. Olgu X hulk, millel on kaks tükeldust (st esitust paarikaupa ühisosata mittetühjade alamhulkade ühendina) $X = \cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{n} B_i$, kus iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $|A_i| = |B_i| = k$. Tõestada, et leidub hulk $T \subseteq X$, mis on nii hulkade komplekti $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ kui ka hulkade komplekti $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ transversaal.

Juhis. $X = \{A_i\}$, $Y = \{B_i\}$, $E = \{\{A, B\} \colon A \cap B \neq \emptyset\}$.

Lahendus. Vaatleme kahealuselist graafi $G = (X \cup Y, E)$, kus alused on $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ja $Y = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ ning servade hulk $E = \{\{A, B\} \colon A \cap B \neq \emptyset\}$. Olgu $S \subseteq X$ suvaline. Hulkade komplekti S kuuluvad hulgad sisaldavad ühtekokku $k|S|$ elementi. Kõik need elemendid esinevad ka hulkade komplekti Y hulkades. Et üks hulk komplektis Y saab sisaldada ülimalt k neist elementidest, siis kuuluvad need elemendid vähemalt $k|S|\,/\,k = |S|$ erinevasse hulka. Graafi G mõistes tähendab see, et

$|N(S)| \geqslant |S|$. Halli teoreemi põhjal leidub graafis G kooskõla, mis katab kõik aluse X tipud. See seab igale hulgale komplektist X vastavusse erineva hulga komplektist Y nii, et nende hulkade ühisosa on mittetühi. Hulkade komplektide X ja Y ühise transversaali leidmiseks piisab seega valida igast vastavate hulkade paarist üks ühine element.

14. Antud on graaf G. Kaks mängijat A ja B mängivad järgmist mängu. Käigul olles märgistab kumbki mängija graafis ühe varem märgistamata tipu, mis (alates teisest käigust) on servaga ühendatud vastase poolt eelmisel käigul märgistatud tipuga. Käike tehakse kordamööda, alustab A. Võidab see, kes teeb viimase käigu.

a) Tõestada, et kui graafis G leidub täielik kooskõla, siis leidub võitev strateegia mängijal B.

b) Tõestada, et kui graafis G ei leidu täielikku kooskõla, siis leidub võitev strateegia mängijal A.

Lahendus. a) Eeldame, et graafis G leidub täielik kooskõla M. See jagab kõik graafi G tipud paaridesse, mille liikmed on omavahel servaga ühendatud. Ükskõik, millise tipu A märgistab, märgistab B selle tipu naabri kooskõlal M. Pärast mängija A iga käiku saab mängija B alati käigu teha. Seetõttu lõpeb mäng varem või hiljem B võiduga.

b) Eeldame, et graafis G ei leidu täielikku kooskõla. Olgu M mingi maksimaalne kooskõla selles graafis. Et M ei ole maksimaalne, siis leidub graafis tipp, mida kooskõla M ei kata. Esimesel käigul märgistab A selle tipu. Iga kord, kui mängija B märgistab mingi kooskõlasse M kuuluva tipu, märgistab A selle tipu paarilise kooskõlas M. Seejuures saab B oma käigul märgistada ainult kooskõlasse M kuuluvaid tippe, sest kui mängija B saaks mingil käigul märgistada mõne kooskõlasse M mittekuuluva tipu, siis moodustaksid mängijate A ja B poolt seni märgistatud tipud graafis M-laieneva ahela, mis Berge'i teoreemi kohalselt tähendaks seda, et M ei oleks täielik kooskõla. Et pärast B iga käiku saab A alati käigu teha, siis on A see, kes teeb viimase käigu.

15. a) Tõestada, et kahealuselises graafis G leidub täielik kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V(G)$ korral $|N(S)| \geqslant |S|$.

b) Tuua näide, millest nähtub, et eelnev väide ei jää kehtima, kui graafi G kahealuselisuse tingimusest loobuda.

Lahendus. a) Eeldame, et kahealuselises graafis G leidub täielik kooskõla M. Siis suvalise $S \subseteq V(G)$ korral $|N(S)| \geqslant |S|$, sest hulk $N(S)$ sisaldab vähemalt kõiki hulga S elementide paarilisi kooskõlas M.

Vastupidi, eeldame, et iga $S \subseteq V(G)$ korral $|N(S)| \geqslant |S|$. Olgu X ja Y graafi alused. Eeldusest järeldub, et ka iga $S \subseteq X$ korral $|N(S)| \geqslant |S|$. Halli teoreemi põhjal leidub graafis G kooskõla, mis katab kõik hulga X tipud. Järelikult $|X| \leqslant |Y|$. Rakendades analoogilist arutlust alusele Y, saame $|Y| \leqslant |X|$. Järelikult $|X| = |Y|$. Seega eelnevas leitud kooskõla katab ka kõik hulga Y tipud ehk on täielik kooskõla.

b) Vaatleme graafi K_3. Selles ei leidu täielikku kooskõla, kuid iga $S \subseteq V(G)$ korral $|N(S)| \geqslant |S|$: kui näiteks $|S| = 1$, siis $|N(S)| = 2$; kui $|S| = 2$, siis $|N(S)| = 3$, ülejäänud juhtudel $|N(S)| = |S|$.

16. Olgu A lõplik hulk, A_1, A_2, …, A_n tema alamhulgad ning d_1, d_2, … d_n naturaalarvud. Tõestada, et järgmised väited on omavahel samaväärsed.

a) Leiduvad paarikaupa ühisosata hulgad D_1, D_2, …, D_n nii, et iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $D_i \subseteq A_i$ ja $|D_i| = d_i$.

b) Iga $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ korral

$$\Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| \geqslant \sum_{i\in I} d_i.$$

Lahendus. a) $\Rightarrow$ b) Kasutades eeldusi, et iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $D_i \subseteq A_i$ ning et hulgad D_i on paarikaupa ühisosata, saame

$$\Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| \geqslant \Big|\bigcup_{i\in I} D_i\Big| = \sum_{i\in I} d_i.$$

b) $\Rightarrow$ a) Vaatleme kahealuselist graafi $G = (X \cup Y, E)$, kus X koosneb antud hulkade eksemplaridest: d_1 eksemplari hulka A_1, d_2 eksemplari hulka A_2 jne kuni d_n eksemplari hulka A_n, $Y = A$ ning $E = \{\{A, x\}\colon$ hulk A sisaldab elementi $x\}$. Olgu $S \subseteq X$ suvaline ning I nende indeksite i hulk, millele vastav hulk A_i on hulkade komplektis S esindatud. Siis

$$N(S) = \Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| \geqslant \sum_{i\in I} d_i \geqslant |S|.$$

Halli teoreemi põhjal leidub graafis G kooskõla, mis katab aluse X. See kooskõla seab igale hulgale A_i vastavusse d_i elementi hulgast A. Need elemendid moodustavadki sobiva hulga D_i.