Diskreetne matemaatika 2012

7. praktikum

Reimo Palm

Praktikumiülesanded

1. Leida $\chi'(G)$, kui G on

a) n-tipuline ahel;

b) n-tipuline tsükkel;

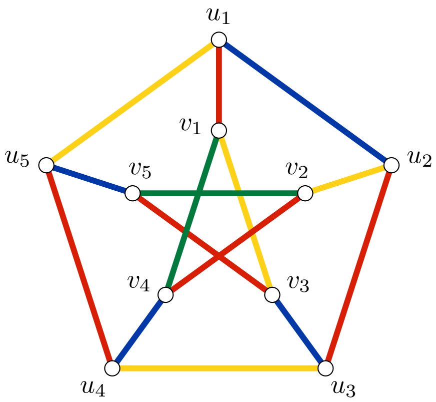
c) Peterseni graaf;

d) puu.

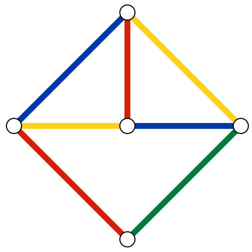
Lahendus. a) Kui $n > 2$, siis $\chi'(G) = 2$; kui $n = 2$, siis $\chi'(G) = 1$. Ahela servad võime värvida vaheldumisi ühe ja teise värviga. Vähim värvide arv on vähemalt niisama suur kui ahela maksimaalne tipuaste.

b) Kui n on paaris, siis $\chi'(G) = 2$; kui n on paaritu, siis $\chi'(G) = 3$. Kui n on paarisarv, siis saame tsükli servad värvida vaheldumisi ühe ja teise värviga. Need 2 värvi on ka miinimum, sest graafi maksimaalne tipuaste on 2. Kui n on paaritu arv, siis saame tsükli servad värvida kolme värviga. Kahest värvist ei piisa, sest iga tipu juures peaks siis olema üks ühte ja teine teist värvi serv, seega kumbagi värvi servade koguarv peaks olema võrdne, mis paaritu n korral on võimatu.

c) $\chi'(G) = 4$. Vastav värvimine on esitatud joonisel 1. Kolmest värvist ei piisa. Tõepoolest, oletame, et piisab. Olgu $u_1u_2u_3u_4u_5u_1$ välimine tsükkel ja olgu iga $i = 1, \ldots, 5$ korral v_i tipu u_i naabertipp sisemisel tsüklil. Välimisel tsüklil peavad siis esinema kõik kolm värvi. Seejuures üks värv esineb üks kord, ülejäänud kaks värvi kaks korda. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et servade u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1 värvid on vastavalt 1, 2, 3, 2, 3. Siis servade u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5 värvid peavad olema vastavalt 2, 3, 1, 1, 1. Nüüd aga näeme, et värv 1 ei saa olla sisemise tsükli ühelgi serval. Sellel tsüklil peaks siis esinema kolm korda üks ja sama värv, mis tähendab, et vähemalt kaks järjestikust serva sellel tsüklil peaksid olema sama värvi.



Joonis 1.



Joonis 2.

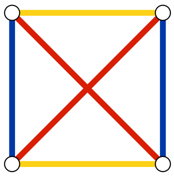
d) $\chi'(G) = \Delta(G)$. Selle võrduse võime tõestada induktsiooniga. Olgu G puu, x tema leht ja y selle lehe naabertipp. Graafi $G \setminus x$ saame värvida $\Delta(G \setminus x)$ värviga ning et $\Delta(G) \geqslant \Delta(G \setminus x)$, siis ka $\Delta(G)$ värviga. Seejuures tipu y aste graafis $G \setminus x$ on väiksem kui $\Delta(G)$, sest muidu oleks tipu y aste graafis G suurem kui $\Delta(G)$. Järelikult leidub värv, mida graafis $G \setminus x$ tipu y juures ei kasutata, selle värviga saame värvida serva xy.

2. a) Leida vähima tippude arvuga graaf G, mille korral $\chi'(G) > \Delta(G)$.

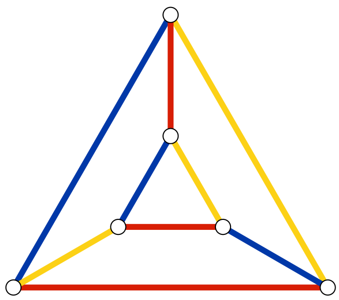
b) Leida vähima tippude arvuga graaf G, mis pole paaritu tsükkel ja mille korral $\chi'(G) > \Delta(G)$.

Lahendus. a) K_3;

b) Graaf, mis on saadud graafist K_4 ühe serva tükeldamisel uue tipuga (joonis 2). Kui oletada, et selle graafi puhul $\chi'(G) = 3$, siis pannes paika ülemise tipuga intsidentsete servade värvid, on ülejäänud servade värvid üheselt määratud ning kaks alumise tipuga intsidentset serva peaksid olema sama värvi. See on ka vähima tippude arvuga selline graaf, sest 4-tipuline graaf G, kus $\Delta(G) = 3$, on alati värvitav 3 värviga, sest graafi K_4, mille alamgraaf ta



Joonis 3.



Joonis 4.

on, on värvitav 3 värviga (joonis 3); 4-tipuline graaf G, kus $\Delta(G) = 2$, on ahel või paarispikkusega tsükkel.

3. Tõestada, et kui G on 3-regulaarne Hamiltoni graaf, siis $\chi'(G) = 3$.

Lahendus. Olgu C Hamiltoni tsükkel selles graafis. Et kõik G tipud on paaritu astmega, siis G tippude arv ehk tsükli C tippude arv on paaris. Järelikult piisab tsükli C servade värvimiseks kahest värvist. Ülejäänud servad graafis G ühendavad tsükli tippe omavahel. Et iga tipu aste on 3, siis väljub igast tipust täpselt üks värvimata serv. Seega kui värvida kõik need servad kolmanda värviga, siis on iga tipu juures kõik servad eri värvi.

4. Sidusat graafi G nimetatakse χ'-*kriitiliseks*, kui $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ ning suvalise serva eemaldamisel graafi kromaatiline arv väheneb.

a) Leida 5-tipuline χ'-kriitiline graaf G, mille korral $\Delta(G) = 3$.

b) Tõestada, et ei leidu 4- ega 6-tipulist χ'-kriitilist graafi G, mille korral $\Delta(G) = 3$.

Lahendus. a) Sobib näiteks graaf joonisel 2.

b) Olgu G mingi 4-tipuline graaf, mille korral $\Delta(G) = 3$. Iga 4-tipuline graaf on 4-tipulise täisgraafi K_4 alamgraaf. Graafi K_4 servade värvimiseks piisab aga kolmest värvist. Järelikult $\chi'(G) \leqslant 3$ ehk $\chi'(G) \neq \Delta(G) + 1$.

Oletame, et leidub 6-tipuline χ'-kriitiline graaf G, mille korral $\Delta(G) = 3$. Siis $\chi'(G) = 4$. Kõigepealt, graafis G ei leidu rippuvaid tippe, sest kui näiteks x oleks rippuv tipp ja y tema naaber, siis serva xy eemaldamisel saadud graaf oleks värvitav 3 värviga esialgse graafi χ'-kriitilisuse tõttu, aga tipu y aste selles graafis oleks väiksem kui 3; seega saaks graafis G ka serva xy värvida ühega neist kolmest värvist.

Järelikult on graaf G selline, kus osa tippe on astmega 3 ja ülejäänud astmega 2. Et paaritu astmega tippe on graafis alati paarisarv ja tippude koguarv on paaris, siis ka astmega 2 tippe on graafis paarisarv. Ühendame kõik astmega 2 tipud paarikaupa servaga (sellega võib graafi tekkida kordseid servi, aga see midagi ei muuda). Tulemuseks saame 3-regulaarse graafi H, kus samuti $\chi'(H) = 4$. Graafis H on $6 \cdot 3 : 2 = 9$ serva. Kui need servad 4 värviga ära värvida, siis leidub värv, mida kasutatakse 3 korda. Et H sisaldab 6 tippu, siis moodustavad need 3 serva graafi H täieliku kooskõla. Jättes need servad graafist H ära, jääb järele graaf, mille iga tipu aste on 2. See on graaf, mille iga sidus komponent on tsükkel. Kui kõik need tsüklid on paarisarvulise pikkusega, värvime nende servad vaheldumisi kahe värviga ning kokkuvõttes saame graafi H servade värvimise 3 värviga. Vastasel korral peab järelejäänud graaf koosnema kahest eraldiseisvast tsüklist pikkusega 3. Siis aga saame jällegi graafi H, milles kummagi tsükli tipud on omavahel vastavalt servaga ühendatud, värvida ära 3 värviga (joonis 4). Kokkuvõttes oleme saanud, et $\chi'(H) = 3$, vastuolu.

5. a) Tõestada, et kui G on Euleri graaf, mis pole paaritu tsükkel, siis graafi G servad saab värvida kahe värviga nii, et igas tipus on esindatud mõlemad värvid.

b) Tõestada, et kui G ei ole Euleri graaf, aga on sidus, siis graafi G servad saab värvida kahe värviga nii, et igas tipus, mille aste on vähemalt 2, on esindatud mõlemad värvid.

Lahendus. a) Leiame graafis G Euleri tsükli C. Et G pole paaritu tsükkel, siis leidub graafis G tipp v, mille aste on suurem kui 2. Alustame tipust v ning värvime tsükli C servad vaheldumisi kahe värviga, kuni jõuame tagasi tippu v. Siis igas tipus, mis pole v, on esindatud mõlemad värvid, sest tsükkel C siseneb sinna ja väljub sealt vähemalt üks kord. Ka tipu v juures on esindatud mõlemad värvid, sest tsükkel C peab külastama tippu v lisaks algusele ja lõpule veel vähemalt üks kord, et kasutada ära kõik tipuga intsidentsed servad, mida on rohkem kui 2.

b) Kui G ei ole Euleri graaf, siis temas leidub paaritu astmega tippe. Lisame graafile uue tipu u ja ühendame ta servaga iga paaritu astmega tipuga. Sellega muutub paaritu astmega tippude aste paarisarvuks, tipu u enda aste on samuti paarisarv, sest graafis on paaritu astmega tippe paarisarv. Järelikult saame tulemuseks sidusa graafi, mille iga tipu aste on paarisarv. Selles graafis leidub Euleri tsükkel. Värvime selle tipud vaheldumisi kahe värviga nagu eelmises punktis, alustades tipust u. Kui nüüd jätta ära lisatud servad ja tipp u, siis on ülesande tingimused täidetud – iga paarisastmega tipu sisenevad ja väljuvad servad jäävad samaks, iga paaritu astmega tippu, mille aste on vähemalt 2, külastas leitud tsükkel vähemalt kaks korda ning ka pärast ühe serva eemaldamist jääb kumbagi värvi servadest vähemalt üks alles.

6. a) Tõestada, et kui G lihtgraaf, milles $|V(G)| = 2n + 1$ ja $|E(G)| > n\Delta(G)$, siis $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

b) Punkti a) kasutades tõestada, et kui graaf G on saadud paaris tippude arvuga regulaarsest lihtgraafist ühe serva uue tipuga tükeldamisel, siis $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

c) Punkti a) kasutades tõestada, et kui graaf G on saadud paaritu tippude arvuga k-regulaarsest lihtgraafist vähem kui $k/2$ serva kustutamisel, siis $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Lahendus. a) Vizingi teoreemi põhjal kas $\chi'(G) = \Delta(G)$ või $\chi'(G) = \Delta(G)+1$. Oletame, et graafi G servad saab värvida $\Delta(G)$ värviga. Iga värvi servad moodustavad graafi G kooskõla. Et graafil on $2n + 1$ tippu, siis saab see kooskõla ühendada maksimaalselt $2n$ tippu ning koosneda maksimaalselt n

servast. Et erinevaid värve on oletuse kohaselt $\Delta(G)$, siis üldse saab värvitud olla ülimalt $n\Delta(G)$ serva. Järelikult kui graafis on rohkem servi, siis neid $\Delta(G)$ värviga ära värvida ei saa, vaid peab kasutama $\Delta(G) + 1$ värvi.

b) Olgu esialgses graafis $2n$ tippu ning iga tipu aste k. Siis $V(G) = 2n+1$ ja $E(G) = nk+1$. Juhul $k = 1$ on ülesande väite kehtivus ilmne, juhul $k \geqslant 2$ on $k = \Delta(G)$, mistõttu $|E(G)| > n\Delta(G)$ ning väite kehtivus järeldub otse punktist a).

c) Olgu esialgses graafis $2n + 1$ tippu. Selles graafis on siis $(2n + 1)k/2 = nk + k/2$ serva. Kui kusutada vähem kui $k/2$ serva, siis jääb järele rohkem kui nk serva. Lõppjärelduse saame nüüd samamoodi nagu punktis b).

7. Lihtgraafide G ja H korrutis on teatavasti lihtgraaf $G \times H$ tippude hulgaga $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ ning servade hulgaga $E(G \times H) = \{\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} \colon u_1 = u_2,\ \{v_1, v_2\} \in E(G)$ või $v_1 = v_2,\ \{u_1, u_2\} \in E(G)\}$.

a) Kasutades Vizingi teoreemi, tõestada, et $\chi'(G \times K_2) = \Delta(G \times K_2)$.

b) Tõestada, et kui H on mittetriviaalne ja $\chi'(H) = \Delta(H)$, siis $\chi'(G \times H) = \Delta(G \times H)$.

Lahendus. a) Ilmselt $\Delta(G \times K_2) = \Delta(G) + 1$. Kujutame ette kahte graafi G eksemplari, mis on Vizingi teoreemi põhjal ühesugusel viisil värvitud ülimalt $\Delta(G) + 1$ värviga. Et graafi G iga tipu aste on ülimalt $\Delta(G)$, siis on graafi G kahes eksemplaris kahte vastavat tippu ühendava serva värvimiseks alati vähemalt üks värv $\Delta(G) + 1$ värvist vaba ning me võime ühendava serva alati värvida ühe vaba värviga.

b) Ilmselt $\Delta(G \times H) = \Delta(G) + \Delta(H)$. Värvime graafi G kõik eksemplarid ühesugusel viisil vähima arvu värvidega. Iga tipu juures on siis kasutatud ülimalt $\Delta(G)$ erinevat värvi. Vaatleme suvalist tippu graafis G. Valime $\Delta(G) + \Delta(H)$ värvi seast need $\Delta(H)$ värvi, mida pole selle tipu juures veel kasutatud, ning värvime selle tipu erinevaid eksemplare ühendavad graafi H servad nende värvidega. Et $\chi'(H) = \Delta(H)$, siis see on võimalik. Niimoodi saame iga tipu korral värvida graafi G erinevaid eksemplare ühendavad servad ülimalt $\Delta(H)$ vaba värviga.

8. *Kempe argument.* Tõestustes, mis puudutavad graafi servade värvimist, kasutatakse sageli järgmist mõttekäiku. Olgu G graaf, mille servad on värvitud korrektselt vähemalt kahe värviga, olgu i ja j mingid kaks värvi nende hulgast. Vaatleme graafi G alamgraafi $H(i, j)$, mis on indutseeritud neid kahte värvi servade poolt. Olgu K alamgraafi $H(i, j)$ suvaline sidus komponent.

a) Tõestada, et K on ahel (lahtine või kinnine).

b) Tõestada, et K servad on vaheldumisi värvi i ja värvi j.

c) Tõestada, et kui graafis G vahetada komponenti K kuuluvate servade värvid omavahel ning ülejäänud servade värvid jätta samaks, siis tulemuseks on uus G korrektne värvimine samade värvidega.

Sellist servade ümbervärvimise viisi nimetatakse Kempe argumendiks.

Lahendus. Need väited on üsna ilmsed, aga esitame siiski mõned põhjendused.

a) Komponendis K ei saa olla tippu astmega 3, sest muidu esineks mingi tipu juures kaks ühte värvi serva. Järelikult on kõik tipud astmega ülimalt 2. Selline graaf on aga ahel või tsükkel (selle nägemiseks valime tipu astmega 1, või kui sellist ei ole, siis suvalise tipu astmega 2, ning hakkame liikuma mööda K servi, liikudes igal sammul tippu, kus me pole veel viibinud).

b) Kui mingi serv on värvi i, siis tema mõlema otstipuga intsidentsed servad (kui neid leidub) on värvi j, sest kui mõni neist oleks värvi i, siis asuks vastava tipu juures kaks ühte värvi serva. Samuti on värvi j serva naaberservad alati värvi i. Seega läbides ahel või tsükli K servhaaval, vaheldub serva värv igal sammul.

c) Kui v on graafi G tipp, mis ei kuulu komponenti K, siis seal servade värvid ei muutunud. Kui v on ahela või tsükli K sisetipp (tal on olemas kaks naabrit, mis kuuluvad samuti komponenti K), siis esinevad tipu v juures samad värvid nagu enne, ainult kahel serval on värvid i ja j omavahel vahetunud. Kui K on ahel ja v on tema otstipp, siis K maksimaalsusest järeldub, et tipu v juures hulgas puudub kas värvi i või värvi j serv. Kui pärast värvide i ja j vahetamist selline serv tekib, siis ei lange tema värv kokku tipu v mõne teise serva värviga; ülejäänud servade värvid tipus v jäävad samaks.

9. Vaatleme teoreemi „Kui G on kahealuseline graaf, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$“. Seda teoreemi on lihtne tõestada ka ilma kooskõlade teooriat kasutamata, induktsiooniga graafi G servade arvu järgi.

a) Formuleerida ja tõestada induktsiooni baas.

b) Eeldame, et väide kehtib graafist G väiksema servade arvuga, kuid sama tippude arvuga graafide korral. Eemaldame graafist G ühe serva $e = uv$. Tõestada, et graafi $G \setminus e$ servad saab värvida $\Delta(G)$ värviga nii, et sama tipuga intsidentsed servad on alati eri värvi.

c) Tõestada, et nende $\Delta(G)$ värvi seas leiduvad värvid c ja d nii, et värvitud graafis $G \setminus e$ ei esine värvi c tipu u juures ega värvi d tipu v juures.

d) Olgu P tipust u algav maksimaalse pikkusega ahel, mis koosneb ainult värvi c või värvi d servadest. Tõestada, et see ahel ei sisalda tippu v ega naase tippu u.

e) Vahetame ahelal P värvid c ja d. Tõestada graafi $G \setminus e$ servade värvimine jääb korrektseks.

f) Tõestada, et graafis G saab serva e värvida nii, et tulemuseks on graafi G korrektne värvimine $\Delta(G)$ värviga.

Lahendus. Kui G servade arv on 0, siis saab G servad värvida $\Delta(G) = 0$ värviga. Kui G servade arv on 1, siis saab G servad värvida $\Delta(G) = 1$ värviga. Eeldame, et väide kehtib graafist G väiksema servade arvuga, kuid sama tippude arvuga graafide korral. Eemaldame graafist G ühe serva $e = uv$. Järele jääb kahealuseline graaf. Induktsiooni eelduse põhjal saab graafi $G \setminus e$ servad värvida $\Delta(G \setminus e)$ värviga. Et $\Delta(G) \geqslant \Delta(G \setminus e)$, siis saab graafi $G \setminus e$ servad värvida ka $\Delta(G)$ värviga (iga värvi ei pea kasutama). Tippude u ja v aste graafis $G \setminus e$ on väiksem kui $\Delta(G)$ ehk on ülimalt $\Delta(G) - 1$, sest graafis G oli nende asta ülimalt $\Delta(G)$. Järelikult leidub kummagi tipu korral vähemalt üks värv $\Delta(G)$ värvi hulgast, mida selles tipus ei esine. Olgu need värvid tippude u ja v korral vastavalt c ja d. Vaatleme tipust u algavat maksimaalse pikkusega ahelat, mille iga serv on kas värvi c või värvi d. Sellel ahelal esinevad värvid c ja d vaheldumisi, kusjuures esimene värv on d. See ahel ei saa sisaldada tippu v, sest tippu v sisaldavasse alusesse saab ta siseneda ainult pärast paaritut sammu, mille korral ahela serv on värvi d – seda värvi serva tipus v aga ei esine. See ahel ei saa ka naasta tippu u, sest seda saaks ta teha ainult pärast paarissammu, mille korral ahela serv on värvi c – siis aga esineks tipus u värv c kaks korda. Vahetame nüüd vaadeldaval ahelal värvid c ja d. Vastavalt Kempe argumendile jääb graafi $G \setminus e$ värvimine korrektseks, kuid tipust u kaob värv d. Nüüd on nii tipus u kui ka tipus v värv d vaba ning me võime selle värviga värvida serva uv.

10. Olgu G regulaarne graaf astmega 3 (nn *kuupgraaf*), millel leidub täpselt üks korrektne servade värvimine $\chi'(G)$ värviga (värvide permutatsiooni täpsusega).

a) Tõestada, et $\chi'(G) = 3$.

b) Tõestada, et graafis G leidub 3 Hamiltoni tsüklit.

Lahendus. a) Vastavalt Vizingi teoreemile $\chi'(G) = 3$ või $\chi'(G) = 4$. Oletame, et $\chi'(G) = 4$ ning graafi G servad on värvitud värvidega 1, 2, 3, 4.

Vaatleme graafi G alamgraafi $H(1,2)$, mille indutseerivad värvi 1 ja värvi 2 servad. See alamgraaf on sidus, sest vastasel korral võiksime ühes tema sidusas komponendis värvid 1 ja 2 vahetada ning saada graafi G teise korrektse servade värvimise (mis ei ole saadav esimesest värvide permutatsiooni teel). Järelikult on see komponent Hamiltoni ahel või Hamiltoni tsükkel. Samamoodi on komponent $H(3,4)$ Hamiltoni ahel või Hamiltoni tsükkel. Seega esitub graafi G servade hulk kahe Hamiltoni ahela või Hamiltoni tsükli lõikumatu ühendina. Et n-tipulises Hamiltoni ahelas on $n-1$ serva ja n-tipulises Hamiltoni tsüklis n serva, siis on graafi servade arv vähemalt $2n-2$, kus n on graafi G tippude arv. Teiselt poolt, et graaf G on regulaarne astmega 3, on seal $3n/2$ serva. Seega $3n/2 \geqslant 2n-2$, millest $n \leqslant 4$. Seega $G = K_4$. Selle graafi puhul aga $\chi'(G) = 3$, vastuolu.

b) Olgu n graafi G tippude arv ning a, b, c vastavalt värvi 1, 2, 3 servade arv. Vaatleme graafis G värvi 1 ja 2 servade indutseeritud alamgraafi $H(1,2)$. Analoogiliselt eelmise punktiga näeme, et $H(1,2)$ on Hamiltoni ahel tippude arvuga $n-1$ või Hamiltoni tsükkel tippude arvuga n. Järelikult $a+b \leqslant n$. Analoogiliselt $b+c \leqslant n$ ja $c+a \leqslant n$. Liites need võrratused, saame $a+b+c \leqslant 3n/2$, millest $a = b = c = n/2$. Järelikult $a+b = n$, $b+c = n$ ja $c+a = n$. Seega on alamgraaf $H(1,2)$ ning analoogiliselt alamgraafid $H(2,3)$ ja $H(3,1)$ Hamiltoni tsüklid.

Koduülesanded

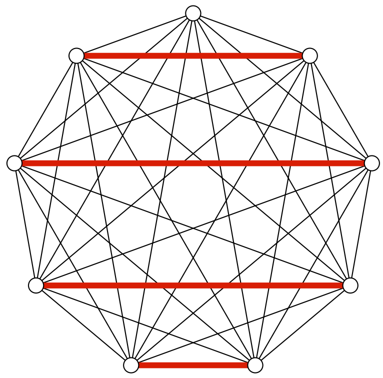
Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

11. Leida $\chi'(K_n)$.

Lahendus. Graafi K_n maksimaalne tipuaste on $\Delta(K_n) = n-1$.

Olgu kõigepealt n paaritu arv. Korrektses värvimises katab iga värv paarisarvu tippe, st maksimaalselt $n-1$ tippu ehk maksimaalselt $(n-1)/2$ serva. Et graafil K_n on $n(n-1)/2$ serva, siis kulub kõigi servade katmiseks vähemalt n värvi. Järelikult $\chi'(K_n) \geqslant \Delta(K_n)+1$. Tõestame nüüd, et n värvist piisab. Paigutame n punkti korrapärase n-nurga kujuliselt ning joonistame kõik küljed ja diagonaalid. Iga külje korral värvime ühte värvi selle külje ja kõik temaga paralleelsed diagonaalid (joonis 5). Kokku kasutame seega n värvi. Sellega saavad tõepoolest kõik graafi servad värvitud, sest arvu n paarituarvulisuse tõttu on iga diagonaal paralleelne täpselt ühe küljega. Järelikult kui n on paaritu, siis $\chi'(K_n) = \Delta(K_n)+1 = n$.

Olgu nüüd n paarisarv. Moodustame n tipust püramiidi, mille põhjaks on korrapärane $(n-1)$-nurk. Värvime kõik selle $(n-1)$-nurga küljed ja diagonaalid $n-1$ värviga, nagu eelnevas. Sellega on põhja iga tipu juures värvitud



Joonis 5.

$n-2$ serva ja värvimata 1 serv. Seejuures on põhja iga tipu juures puudu erinev värv, nimelt see, millega on värvitud selle tipu vastaskülg. Järelikult saame põhja tippudest püramiidi tippu viivad $n-1$ serva värvida $n-1$ värviga. Seega $\chi'(K_n) \leqslant \Delta(K_n)$. Teiselt poolt alati $\chi'(K_n) \geqslant \Delta(K_n)$. Järelikult kui n on paaris, siis $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) = n-1$.

Märkus. Vizingi teoreemi abil saame lihtsustada vastuse leidmist paaritu n korral. Kui oleme tõestanud, et $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)+1$, siis võime Vizingi teoreemi põhjal järeldada, et $\chi'(G) = \Delta(G)+1$.

12. Olgu G lihtgraaf, mille tippude arv n on paaris, ning $\overline{G}$ tema täiend (samuti lihtgraaf).

a) Tõestada, et $\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) \geqslant n-1$. Tuua näide graafist G, mille puhul kehtib võrdus.

b) Tõestada, et $\chi'(G)+\chi'(\overline{G}) \leqslant 2(n-1)$. Tuua näide graafist G, mille puhul kehtib võrdus.

Lahendus. a) Iga tipu v korral $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = n-1$. Järelikult

$$\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) \geqslant \Delta(G) + \Delta(\overline{G}) \geqslant n-1.$$

Võrdus kehtib siis, kui $G = K_n$, sest eelmise ülesande järgi paaris n korral $\chi'(K_n) = n-1$, lisaks $\chi'(O_n) = 0$.

b) Et G ja $\overline{G}$ on mõlemad graafi K_n alamgraafid, siis $\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) \leqslant 2\chi'(K_n) = 2(n-1)$. Võrdus kehtib siis, kui $G = K_{1,n-1}$. Siis ilmselt $\chi'(G) = n-1$, samuti $\chi'(\overline{G}) = n-1$, sest $\overline{G}$ servad indutseerivad paaritu tippude arvuga täisgraafi K_{n-1}, kus eelmise ülesande põhjal $\chi'(K_{n-1}) = n-1$.

13. Tõestada vahetu arutlusega, et kui G on paaritu tippude arvuga mittetühi regulaarne lihtgraaf, siis $\chi'(G) = \Delta(G)+1$.

Lahendus. Olgu graafil $2n+1$ tippu, millest igaühe aste on k. Siis $\Delta(G) = k$. Et iga värv katab kokku paarisarvu tippe, siis katab iga värv maksimaalselt $2n$ tippu ehk n serva. Graafil G on aga $(2n+1)k/2 = nk + k/2$ serva. Seega ei piisa graafi servade värvimiseks k värvist, sest need kataksid maksimaalselt nk serva (ning $k \neq 0$). Vizingi teoreemi põhjal piisab servade värvimiseks aga $k+1$ värvist.

14. Olgu G sidus graaf, mis pole paaritu lihttsükkel. Tõestada, et kui graafi G kõigi tsüklite pikkused on sama paarsusega, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Lahendus.

Kui kõik graafi G tsüklid on paarisarvulise pikkusega või tsükleid üldse pole, siis on G kahealuseline ning väide järeldub vastavast teoreemist. Eeldame seetõttu, et kõik G tsüklid on paaritu pikkusega.

Tõestame, et graafis G pole ühelgi kahel tsüklil ühist serva. Tõepoolest, kui oletada, et näiteks tsüklitel C_1 ja C_2 leidub ühine serv uv, siis olgu a tipust v tipu u suunas liikudes viimane tipp, mis on ühine mõlemale tsüklile. Samas suunas liikudes leiame tsüklil C_1 esimese tipu, mis kuulub tsüklile C_2, ning tsüklil C_2 esimese tipu, mis kuulub tsüklile C_1; olgu b neist kahest tipust see, millest tippu a viiv ahel mööda emba-kumba tsüklit liikudes on lühim. Siis oleme leidnud kolm ühiste servadeta ahelat tipust a tippu b: tsükli C_1 osa, tsükli C_2 osa ja nimetatud lühim ahel. Vähemalt kahel neist on pikkus sama paarsusega ning neid kahte ahelat tippudest a ja b liites tekib paarisarvulise pikkusega tsükkel, vastuolu.

Et graaf G on sidus ja pole paaritu tsükkel, siis $\Delta(G) \geqslant 3$. Olgu C suvaline (paaritu) tsükkel graafis G. Värvime C servad kolme värviga. Tsükli C servade eemaldamisel jaguneb graaf G teatavaks arvuks sidusateks komponentideks. Olgu K mingi neist komponentidest. Et graafis G ei leidu ühise servaga tsükleid, siis on komponent K ühendatud tsükli C külge täpselt ühe tipuga v. See komponent on sama tüüpi nagu graaf G ise ning tema tippude aste ei ole suurem kui $\Delta(G)$, seega võime tema servad värvida rekursiivselt $\Delta(G)$ värviga. Et tipu v aste komponendis K ei ole suurem kui $\Delta(G) - 2$, siis saame vajadusel selles komponendis värvid vahetada nii, et tipuga v intsidentsed servad komponendis K on kõik erinevat värvi tipuga v intsidentsetest servades tsüklis C. Kokkuvõttes saame graafi G servade värvimise $\Delta(G)$ värviga. Kui graafis G tsükleid ei leidu, siis on graaf puu ning tema servad saab värvida ikkagi $\Delta(G)$ värviga.