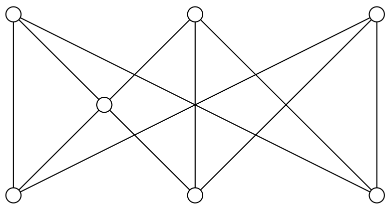
Diskreetne matemaatika 2012

8. praktikum

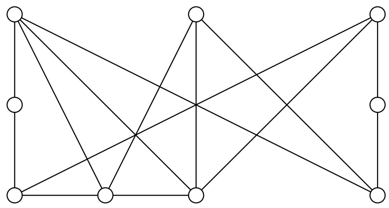
Reimo Palm

Praktikumiülesanded

1. Kas järgmised graafid on tasandilised?



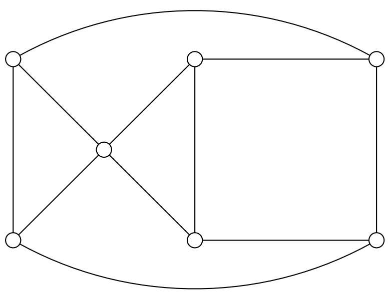
a)



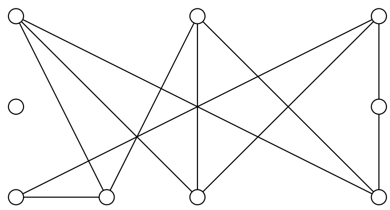
b)

Lahendus. a) Jah. Vahetades kahe parempoolse tipu asukohad, saame graafi joonistada nii nagu joonisel 1.

b) Ei. Graaf sisaldab alamgraafi, mis on homöomorfne graafiga $K_{3,3}$ (joonis 2).



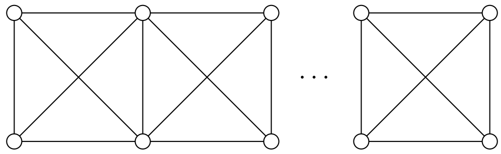
Joonis 1.



Joonis 2.

2. a) Leida kõik naturaalarvud n, mille korral n-mõõtmeline kuup Q_n on tasandiline.

b) Leida kõik naturaalarvud n, mille korral $2n$-tipuline graaf

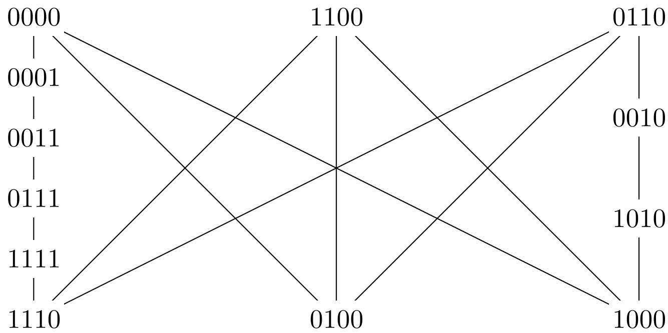


on tasandiline.

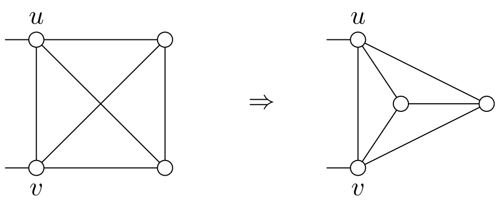
c) Leida kõik naturaalarvud n, mille korral tsükli C_n täiend $\overline{C}_n$ on tasandiline.

Lahendus. a) Graafid Q_1, Q_2, Q_3 on tasandilised. Graaf Q_4 ei ole tasandiline, sest ta ei sisalda tsükleid pikkusega 3, aga tema tippude arv $n = 16$ ja servade arv $m = 32$ ei rahulda võrratust $m \leqslant 2n - 4$. Graafid Q_n, kus $n \geqslant 5$, ei ole tasandilised, sest igaüks neist sisaldab alamgraafina graafi Q_4.

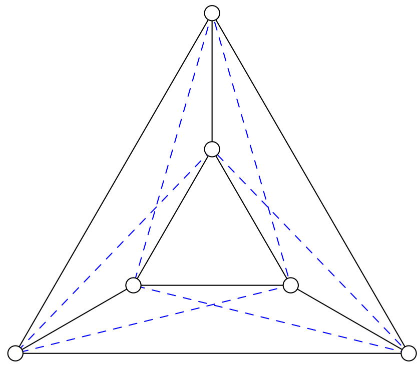
Seda, et graaf Q_4 ei ole tasandiline, võib põhjendada ka asjaoluga, et ta sisaldab alamgraafi, mis on homöomorfne graafiga $K_{3,3}$. Leiame graafis Q_4 kuuetipulise tsükli 0000–1000–1100–1110–0110–0100–0000 ning ühendame selle vastastipud tipukaupa lõikumatute ahelatega:



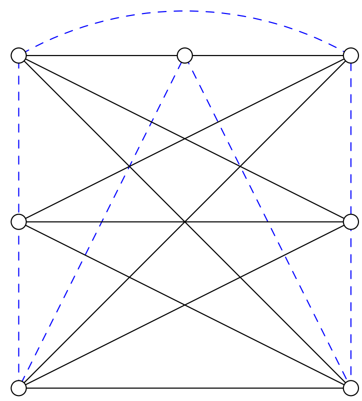
b) Graaf on tasandiline iga n korral. Seda võib tõestada näiteks induktsiooniga n järgi. Kui $n = 1$, siis väide kehtib. Kui $n > 1$, siis joonistame graafi osa vasakpoolsest otsast kuni servani uv tasandiliselt, seejärel valime ühe kahest tahust, mida piirab serv uv, ning lisame graafi osa servast uv kuni parempoolse otsani, joonistades selle nii, nagu näidatud paremal:



c) Graafid $\overline{C}_3$, $\overline{C}_4$, $\overline{C}_5$ on tasandilised. Graaf $\overline{C}_6$ on tasandiline (joonis 3, punktiiriga on tähistatud tsükkel C_6). Graaf $\overline{C}_7$ ei ole tasandiline, sest ta sisaldab alamgraafi, mis on homöomorfne graafiga $K_{3,3}$ (joonis 4, punktiiriga



Joonis 3.



Joonis 4.

on tähistatud tsükkel C_7). Graafid $\overline{C}_n$, kus $n \geqslant 8$, ei ole tasandilised, sest igaüks neist sisaldab alamgraafina graafi $\overline{C}_7$.

Graaf $\overline{C}_n$ sisaldab n tippu ja $m = n(n-1)/2 - n = n(n-3)/2$ serva. Et juhul $n \geqslant 6$ sisaldab ta tsükleid pikkusega 3, siis tingimusest $m \leqslant 3n - 6$ saame $n < 8$, st graaf pole tasandiline, kui $n \geqslant 8$. Juht $n = 7$ tuleb ikkagi eraldi läbi vaadata.

3. Olgu G mingi 24-tipuline 3-regulaarne tasandiline graaf. Leida graafi G tasandilise esituse tahkude arv.

Lahendus. Kasutame Euleri valemit $n - m + t = 2$, kus n on graafi tippude arv, m servade arv ja t tahkude arv. Antud graafi G korral $n = 24$. Et G tipuastmete summa on $24 \cdot 3 = 72$ ja see võrdub servade arvu kahekordsega, siis $m = 72 : 2 = 36$. Järelikult $t = 2 - n + m = 14$.

4. Graafi G *siseümbermõõduks* $\gamma(G)$ nimetatakse selle graafi kõige lühema tsükli pikkust. Tõestada, et kui G on n tipu ja m servaga sidus tasandiline lihtgraaf, mille korral $\gamma(G) \geqslant 3$, siis

$$m \leqslant \frac{\gamma(G)}{\gamma(G) - 2}(n - 2).$$

Lahendus. Olgu t graafi G tahkude arv. Loendame hulga

$$X = \{(T, e)\colon \text{tahk } T \text{ sisaldab serva } e\}$$

elemente kahel viisil. Tahkude kaupa loendades saame $|X| \geqslant t\gamma(G)$, sest igal tahul on vähemalt $\gamma(G)$ serva (aga võib olla ka rohkem). Servade kaupa loendades saame $|X| = 2m$, sest iga serv kuulub kahele tahule. Järelikult $2m \geqslant t\gamma(G)$. Euleri valemist $t = 2 - n + m$. Seega $2m \geqslant (2 - n + m)\gamma(G)$, millest $m \leqslant \frac{\gamma(G)}{\gamma(G)-2}(n - 2)$.

5. Tõestada, et

a) Peterseni graaf (joonis 5) ei ole tasandiline;

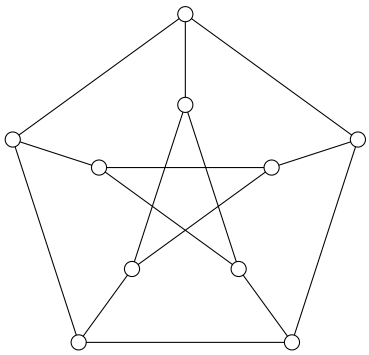
b) Peterseni graafist ükskõik millise serva kustutamisel saadud graaf ei ole tasandiline.

Lahendus. a) Peterseni graafil on 10 tippu ja 15 serva ning tema siseümbermõõt (lühima tsükli pikkus) on 5. Kui Peterseni graaf oleks tasandiline, siis eelmise ülesande põhjal peaks kehtima võrratus $15 \leqslant \frac{5}{3}(10-2)$ ehk $15 \leqslant 13\frac{1}{3}$, vastuolu.

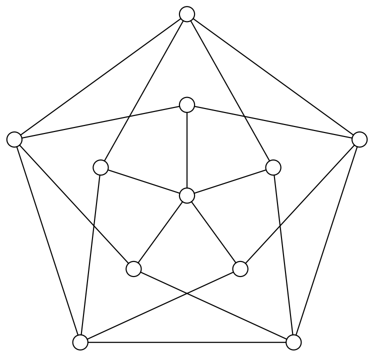
b) Kui Peterseni graafist serva kustutamisel saadud graaf oleks tasandiline, siis peaks analoogiliselt kehtima võrratus $14 \leqslant 13\frac{1}{3}$, jällegi vastuolu.

6. Tasandilist graafi, mille iga tahk (sh välimine) on kolmnurk, nimetatakse *triangulatsiooniks*. Tõestada, et iga triangulatsioon G sisaldab kahealuselist alamgraafi, millel on $2E(G)/3$ tippu.

Lahendus. Vaatleme graafi H, mille tippudeks on graafi G tahud ja kaks tippu on ühendatud servaga parajasti siis, kui vastavatel tahkudel graafis G on ühine serv (seda graafi nimetatakse graafiga G *duaalseks graafiks*). Et G on triangulatsioon, siis graaf H on regulaarne astmega 3. Graafis H ei leidu ka ühtegi silda, sest iga serv kuulub tsüklisse, mis moodustub graafi G ühise tipuga tahkudest. Loengus on tõestatud Tutte'i teoreemi järeldusena, et sildadeta 3-regulaarses graafis leidub täielik kooskõla. Selle kooskõla servadele vastavad graafis G tahkude ühised servad. Need moodustavad graafis G kahealuselise alamgraafi, mis koosneb teatavast hulgast eraldiseisvatest graafidest K_2. Selle alamgraafi tippude arv võrdub graafi G tahkude arvuga t. Et G igal tahul on 3 serva ja iga serv kuulub 2 tahule, siis $3t = 2E(G)$, millest $t = 2E(G)\,/\,3$.



Joonis 5. Peterseni graaf



Joonis 6. Grötzschi graaf

7. Leida $\chi(G)$, kui G on

a) Peterseni graaf (joonis 5);

b) Grötzschi graaf (joonis 6).

Lahendus. a) Et Peterseni graaf sisaldab paaritut tsüklit, siis $\chi(G) \geqslant 3$. Et Peterseni graafi puhul $\Delta(G) = 3$ ja graaf ei sisalda 4-tipulist klikki, siis Brooksi teoreemi kohaselt $\chi(G) \leqslant 3$. Järelikult $\chi(G) = 3$.

Peterseni graafi tippude värvimine 3 värviga on kujutatud joonisel 7.

b) Grötzschi graafi tipud saab värvida 4 värviga nagu joonisel 8. Oletame, et leidub tippude värvimine 3 värviga 1, 2 ja 3. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et välimisel tsüklil asuvate tippude värvid on järjekorras 1, 2, 3, 2, 3. Siis aga on sisemises ringis oleva viie tipu värvide hulgas kindlasti esindatud kõik kolm värvi 1, 2 ja 3, seetõttu ei saa ühegagi nendest värvidest värvida keskmist tippu. Kokkuvõttes $\chi(G) = 4$.

Grötzschi graaf on vähim kolmnurgavaba graaf, mille kromaatiline arv on 4.

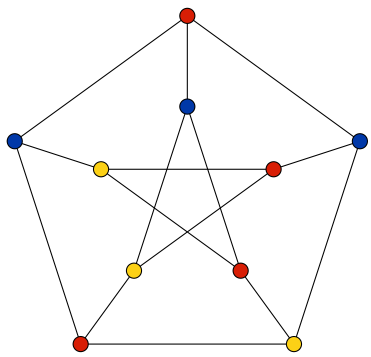
8. Brooksi teoreemi sõnastatakse erinevates allikates tihti erineval kujul. Näiteks:

a) kui graafis G on tippude maksimaalne aste ülimalt d, kus $d \geqslant 3$, ja G ei sisalda $(d+1)$-tipulist klikki, siis $\chi(G) \leqslant d$;

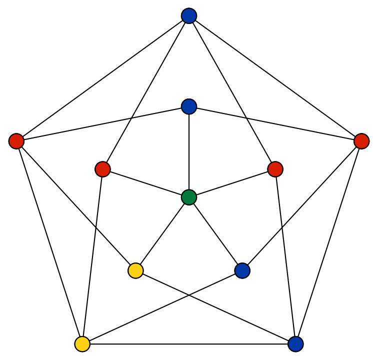
b) sidusas graafis G kehtib $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ parajasti siis, kui G on kas paaritu tsükkel või täisgraaf.

Tõestada, et need kaks kuju on omavahel samaväärsed.

Lahendus. a) $\Rightarrow$ b) Eeldame, et sidusas graafis G kehtib $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Kui $\Delta(G) = 1$, siis sidususe tõttu $G = K_2$. Kui $\Delta(G) = 2$, siis samuti



Joonis 7.



Joonis 8.

sidususe tõttu on graaf tsükkel, ja nimelt paaritu tsükkel, sest paaristsükli tipud saab värvida $\Delta(G)$ värviga. Kui $\Delta(G) \geqslant 3$, siis graaf G on $(\Delta(G)+1)$-tipuline täisgraaf, sest vastasel korral oleks tegemist sidusa graafiga, mis ei sisalda $(\Delta(G)+1)$-tipulist klikki ning punkti a) põhjal oleks $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

Vastupidi, kui G on paaritu tsükkel, siis $\Delta(G) = 2$ ja $\chi(G) = 3$; kui aga G on n-tipuline täisgraaf, siis $\Delta(G) = n - 1$ ja $\chi(G) = n$. Mõlemal juhul $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

b) $\Rightarrow$ a) Eeldame, et $\Delta(G) \leqslant d$, kus $d \geqslant 3$, ning G ei sisalda $(d + 1)$-tipulist klikki. Vaatleme graafis G suvalist sidusat komponenti K. Vastava teoreemi põhjal $\chi(K) \leqslant \Delta(K) + 1$.

- Kui K on paaritu lihttsükkel, siis $\chi(K) = 3 \leqslant d$.
- Kui K on täisgraaf, siis K tippude arv on ülimalt d, sest muidu leiduks graafis $(k+1)$-tipuline klikk. Nüüd aga $\Delta(K) \leqslant d-1$. Järelikult $\chi(K) \leqslant \Delta(K) + 1 \leqslant d$.
- Kui K ei ole paaritu lihttsükkel ega täisgraaf, siis eelduse ja eelnimetatud teoreemi põhjal $\chi(K) \leqslant \Delta(K) \leqslant \Delta(G) \leqslant d$.

Niisiis on graafi G suvalise sidusa komponendi K tipud värvitavad ülimalt d värviga. Järelikult $\chi(G) \leqslant d$.

9. Tõestada, et kui lihtgraafil G on n tippu ja m serva, siis

$$\chi(G) \geqslant \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

Lahendus. Tähistame $\chi(G) = k$. Graafi G tippude värvimine k värviga määrab graafi G tippude hulgal tükelduse, kus ühe tüki moodustavad sama värvi tipud. Olgu $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tükkide tippude arvud. Ühegi kahe sama värvi tipu vahel servi ei ole, kõik servad on nende tippude vahel, mis kuuluvad erinevatesse tükkidesse. Värvi i ja värvi j tükkide vahel saab olla maksimaalselt $n_i n_j$ serva (kui iga tipp esimesest tükist on seotud iga tipuga teisest tükist). Järelikult rahuldab graafi servade arv m võrratust

$$m \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} n_i n_j.$$

Kasutades võrdust

$$\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} n_i n_j$$

ning ruutkeskmise ja aritmeetilise keskmise vahelist võrratust

$$\Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} n_i^2\Big)^{1/2} \geqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} n_i,$$

saame

$$m \leqslant \frac{1}{2}\Bigg(\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i^2\Bigg) \leqslant \frac{1}{2}\Bigg(\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i\Big)^2 - \frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i\Big)^2\Bigg) = \frac{1}{2}\Big(n^2 - \frac{1}{k}n^2\Big),$$

millest saamegi

$$k \leqslant \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

Ülesanne. Selgitada, milliste graafide puhul kehtib ülesande võrratuses võrdus.

10. Olgu G lihtgraaf, $\overline{G}$ tema täiend ja n kummagi graafi tippude arv. Tõestada, et $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$.

Lahendus. Tõestame vastuväiteliselt. Olgu G vähim graaf, mille puhul ülesande võrratus ei kehti. Siis $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geqslant n + 2$. Valime graafist G suvalise tipu v ning vaatleme graafi $H = G \setminus v$. Selles $\chi(H) + \chi(\overline{H}) \leqslant (n-1) + 1 = n$.

Paneme tähele, et $\chi(G) = \chi(H) + 1$. Tõepoolest, $\chi(G) \leqslant \chi(H) + 1$, sest ainult tipule v võib olla vaja uut värvi. Samas $\chi(G) \geqslant \chi(H)$, sest H on G alamgraaf. Kui oleks $\chi(G) = \chi(H)$, siis võrratuste $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geqslant n + 2$ ja $\chi(H) + \chi(\overline{H}) \leqslant n$ tõttu oleks $\chi(\overline{G}) \geqslant \chi(\overline{H}) + 2$. See on aga võimatu, sest $\overline{H} = \overline{G} \setminus v$. Järelikult $\chi(G) = \chi(H) + 1$. Analoogiliselt $\chi(\overline{G}) = \chi(\overline{H}) + 1$. Seega ainsa võimalusena $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = n + 2$ ja $\chi(H) + \chi(\overline{H}) = n$.

Nüüd $\deg_G(v) \geqslant \chi(H)$, sest vastasel korral oleks $\chi(G) = \chi(H)$. Analoogiliselt $\deg_{\overline{G}}(v) \geqslant \chi(\overline{H})$. Seega $n - 1 = \deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) \geqslant \chi(H) + \chi(\overline{H}) = n$, vastuolu.

11. Tõestada, et kui $\chi(G) = k$, siis graafis G leidub vähemalt k tippu astmega vähemalt $k - 1$.

Lahendus. Olgu H graafi G (sisalduvuse mõttes) vähim alamgraaf, mille puhul $\chi(G) = k$ ning olgu v graafi H vähima astmega tipp. Et H on vähim, siis $\chi(H \setminus v) = k - 1$. Kui tipu v aste graafis H oleks ülimalt $k - 2$, siis jääks pärast graafi $H \setminus v$ värvimist $k - 1$ värviga vähemalt üks neist värvidest vabaks tipu v jaoks ning me saaksime graafi H värvida $k - 1$ värviga, vastuolu. Järelikult on iga tipp graafis H astmega vähemalt $k - 1$. Et $\chi(H) = k$, siis on graafis H vähemalt k tippu. Needsamad tipud on ka graafis G kõik astmega vähemalt $k - 1$.

12. Graafi G nimetatakse *k-kriitiliseks*, kui $\chi(G) = k$, aga graafi G iga pärisalamgraafi H korral $\chi(H) < k$.

a) Kirjeldada kõik 2-kriitilised graafid.

b) Kirjeldada kõik 3-kriitilised graafid.

Lahendus. a) Ainuke 2-kriitiline graaf on K_2. Kui graaf sisaldaks veel tippe või servi, siis ta ei oleks 2-kriitiline, sest nende tippude või servade eemaldamisel graafi kromaatiline arv 2 ei vähene.

b) Sellised graafid on parajasti paaritu pikkusega tsüklid C_{2n+1}. Et graafi kromaatiline arv on 3, siis ta ei ole kahealuseline. Järelikult sisaldab graaf paaritut tsüklit. Kui graaf sisaldaks veel tippe või servi, siis nende eemaldamisel graafi kromaatiline arv ei vähene ehk graaf poleks 3-kriitiline.

13. Tõestada, et kui G on k-kriitiline, kus $k \geqslant 2$, siis

a) G on sidus;

b) G iga tipu aste on vähemalt $k - 1$.

Lahendus. a) Et $\chi(G) = k$, siis graafis leidub sidus komponent K, mille korral $\chi(K) = k$. Kui graafis leiduks veel mõni sidus komponent, siis selle tippude või servade eemaldamisel graafi kromaatilne arv ei väheneks, st graaf poleks k-kriitiline.

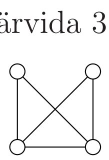
b) Oletame, et graafis G leidub tipp v, mille aste on ülimalt $k - 2$. Et G on k-kriitiline, siis $\chi(G \setminus v) \leqslant k - 1$. Siis aga saame ka tipu v värvida ühega nendest $k - 1$ värvist, sest vähemalt üks neist värvidest puudub tipu v naabrite seas. See tähendab, et $\chi(G) \leqslant k - 1$, vastuolu.

14. Tõestada, et

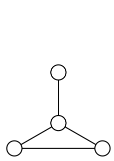
$$\chi(G) \leqslant 1 + \max_{H \subseteq G} \min_{v \in V(H)} \deg_H(v).$$

Lahendus. Kui $\chi(G) = 1$, siis võrratus kehtib. Eeldame, et $\chi(G) \geqslant 2$. Olgu H graafi G mingi $\chi(G)$-kriitiline alamgraaf. Eelmise ülesande põhjal siis $\min_{v \in V(H)} \deg_H(v) \geqslant \chi(G) - 1$. Siit $\chi(G) \leqslant 1 + \min_{v \in V(H)} \deg_H(v) \leqslant 1 + \max_{H \subseteq G} \min_{v \in V(H)} \deg_H(v)$.

15. Leida graafi kromaatiline polünoom. Leida, mitmel erineval viisil saab graafi tipud värvida 3 värviga.



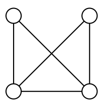
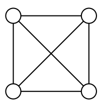
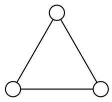
a)



b)

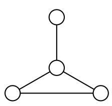
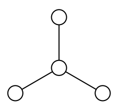
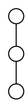
Lahendus. Kromaatilist polünoomi on võimalik arvutada loengus tõestatud rekurrentse seose abil, kasutades teda kas kujul $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$ ja suunates liikmeid järk-järgult nullgraafi poole, või kujul $P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$ ja suunates liikmeid täisgraafi poole – kuni tekivad graafid, mille kromaatilised polünoomid on lihtsasti leitavad (nullgraaf, täisgraaf, puu vms).

a) Kasutades võrdust $P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$, saame (tähistades graafi kromaatilist polünoomi graafi endaga)

 $=$  $+$  $= k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2) =$

$$= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k.$$

b) Kasutades võrdust $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$, saame

 $=$  $-$  $= k(k-1)^3 - k(k-1)^2 = k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k.$

Kolme värviga saab graafi G tipud värvida $P_G(3)$ viisil. Juhul a) saame $P_G(3) = 6$, juhul b) aga $P_G(3) = 12$.

16. Tõestada, et kui graafis G leidub sild e, siis $P_{G/e}(k) = \frac{1}{k} P_{G-e}(k)$.

Lahendus. Olgu $e = xy$ ning v tipp, mis vastab kokkutõmmatud servale e graafis G/e. Silla e kustutamisel laguneb graaf G kaheks sidusaks komponendiks K_1 ja K_2, mis sisaldavad vastavalt tippe x ja y. Igale graafi G/e värvimisele vastab graafi $G - e$ selline värvimine, kus tipud u ja v on sama värvi, ja vastupidi. Olgu tipu v värv näiteks i. Graafi K_1 värvimisi, kus tipp x on värvi i, on $\frac{1}{k} P_{K_1}(k)$, sest värve on kokku k ja neid võib värvimises vabalt permuteerida. Graafi K_2 värvimisi, kus tipp x on värvi i, on $\frac{1}{k} P_{K_2}(k)$. Järelikult graafi $G - e$ värvimisi, kus tipud x ja y on värvi i, on $\frac{1}{k} P_{K_1}(k) \cdot \frac{1}{k} P_{K_2}(k))$. Sama arutlus kehtib iga värvi i korral. Järelikult $P_{G/e}(k) = k(\frac{1}{k} P_{K_1}(k) \cdot \frac{1}{k} P_{K_2}(k)) = \frac{1}{k} P_{K_1}(k) P_{K_2}(k) = \frac{1}{k} P_{G-e}(k)$.

17.
a) Tõestada, et kui lihtgraafis G on n tippu ja m serva, siis tema kromaatilise polünoomi liikme k^{n-1} kordaja on $-m$.

b) Järeldada sellest, et ei leidu graafi, mille kromaatiline polünoom on $k^4 - 3k^3 + 3k^2$.

Lahendus. a) Tõestame induktsiooniga graafi G servade arvu m järgi, et $P_G(k) = k^n + mk^{n-1} + \ldots$, kus punktiir tähistab polünoomi astmega ülimalt $n-2$. Kui $m = 0$, siis $G = K_n$ ning $P_G(k) = k^n$ ning väide kehtib. Olgu nüüd $m \geqslant 1$. Valime graafist G mingi serva e. Siis $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$. Graafil $G-e$ on n tippu ja $m-1$ serva, graafil G/e aga $n-1$ tippu ja ülimalt

$m-1$ serva. Induktsiooni eelduse põhjal $P_{G-e}(k) = k^n - (m-1)k^{n-1} + \ldots$ ning $P_{G/e}(k) = k^{n-1} + \ldots$. Järelikult $P_G(k) = k^n - mk^{n-1} + \ldots$, kus punktiir tähistab polünoomi astmega ülimalt $n-2$.

b) Tegemist peaks olema graafiga, millel on 3 serva. Teiselt poolt, kui $k = 1$, siis polünoomi väärtus on nullist erinev, st see graaf peaks olema värvitav ühe värviga. Niisugune graaf aga ei saa sisaldada ühtegi serva.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

18. Tõestada, et kui G on n-tipuline tsükkel C_n, siis $P_G(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

Lahendus. Kasutades seost $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$, saame $P_{C_n}(k) = P_{A_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k)$, kus A_n tähistab n-tipulist ahelat. Avaldades selles seoses viimase liikme uuesti sama seose kaudu, saame järk-järgult

$$P_{C_n}(k) = P_{A_n}(k) - P_{A_{n-1}}(k) + P_{A_{n-2}}(k) - \ldots + (-1)^{n-2} P_{A_2}(k).$$

Et A_n on puu, siis $P_{A_i}(k) = k(k-1)^{i-1}$ ning

$$P_{C_n}(k) = k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + k(k-1)^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2} k(k-1).$$

See on geomeetriline jada algliikmega $a = (-1)^{n-2}k(k-1)$ ja teguriga $r = (-1)(k-1) = 1-k$. Geomeetrilise jada summa valemi põhjal

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= (-1)^{n-2}k(k-1)\frac{1-(-1)^{n-1}(k-1)^{n-1}}{1-(-1)(k-1)} = \\ &= (-1)^{n-2}(k-1) - (-1)^{2n-3}(k-1)^n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1). \end{aligned}$$

Teine lahendus. Teades $P_{C_n}(k)$ avaldise kuju, võib ülesande väite tõestada ka induktsiooniga. Kui $n = 3$, siis $P_{C_3}(k) = P_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2)$, samas kui avaldis annab $(k-1)^3 + (-1)^3(k-1) = (k-1)((k-1)^2 - 1) = (k-1)k(k-2)$. Suurema n korral $P_{C_n}(k) = P_{A_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k) = k(k-1)^{n-1} - \big((k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1)\big) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

19. Näitusesaali piirjooneks on n-nurkne hulknurk, mis võib olla mittekumer, aga mille küljed üksteist ei lõika.

a) Tõestada, et kui tõmmata hulknurga tippude vahele diagonaalid, mis jaotavad hulknurga sisepiirkonna kolmnurkadeks, siis tekib graaf, mille tipud saab korrektselt värvida 3 värviga.

b) Tõestada, et näitusesaali nurkadesse saab paigutada ülimalt $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ valvurit nii, et nende vaateväljad üheskoos katavad kogu näitusesaali.

Lahendus. a) Tõestame väite induktsiooniga n järgi. Kui $n = 3$, siis on tegemist kolmnurgaga, mille tipud saab värvida 3 värviga. Eeldame, et $n > 3$. Valime mingi diagonaali uv. Jaotame graafi kaheks osaks, millel on ainult diagonaal uv ühine. Induktsiooni eelduse põhjal saab kummagi osa värvida 3 värviga. Vajadusel värve permuteerides saab värvimise koostada nii, et tipud u ja v ühes osas on sama värvi nagu tipud u ja v teises osas. See annab kogu graafi värvimise 3 värviga.

b) Jaotame näitusesaali diagonaalide abil kolmnurkadeks. Kolmnurga nurgas istuv valvur näeb kogu kolmnurga sisemust. Punkti a) põhjal saab kõik graafi tipud värvida 3 värviga. Seejuures üks neist värvidest, näiteks värv 1, on selline, mis esineb mitte rohkem kui $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ tipus. Et iga kolmnurk sisaldab kõiki kolme värvi, siis esineb ka värv 1 igas kolmnurgas. Paigutame valvurid tippudesse, mis on värvitud selle värviga. Siis on nende vaateväljadega kaetud kogu näitusesaal.

20. Moodustame graafist G uue graafi H järgmise konstruktsiooniga. Olgu $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Lisame graafile $n+1$ uut tippu u ja u_1, u_2, $\ldots$, u_n ning ühendame tipu u iga tipuga u_i ning iga tipu u_i tipu v_i kõigi naabritega ($i = 1, 2, \ldots, n$). Graafi nimetatakse *kolmnurgavabaks*, kui ta ei sisalda alamgraafi, mis on isomorfne graafiga K_3. Olgu G kolmnurgavaba graaf, mille korral $\chi(G) = k$.

a) Tõestada, et graaf H on kolmnurgavaba.

b) Tõestada, et $\chi(H) = k + 1$.

Sellest järeldub, et leidub kui tahes suure kromaatilise arvuga kolmnurgavabasid graafe.

Lahendus. a) Et tippude $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vahel servi ei ole, siis võimalik kolmnurk ei saa sisaldada tippu u ega ka mitte rohkem kui ühte tippu tippude u_1, u_2, $\ldots$, u_n hulgast. Et graafis G kolmnurki pole, siis peab võimalik kolmnurk sisaldama täpselt ühte tippu nende tippude hulgast. Ent kui $\{u_a, v_b, v_c\}$ oleks kolmnurk, siis ka $\{v_a, v_b, v_c\}$ oleks kolmnurk, sest v_b ja v_c on ka tipu v_a naabrid. Seega leiduks kolmnurk graafis G, mis on võimatu.

b) Kõigepealt, $\chi(H) \leqslant k + 1$, sest kui graaf G on värvitud k värviga, siis võime värvida iga u_i sama värviga nagu on värvitud v_i ning värvida tipu u värviga $k + 1$. Teiselt poolt, $\chi(H) > k$, sest kui oleks $\chi(H) = k$, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et tipu u värv on k ning tippude u_1, u_2, $\ldots$, u_n värvid k-st erinevad. Et iga tipu v_i naabrid on ka tipu u_i naabrid, siis võime tipud v_1, v_2, …, v_n ümber värvida nii, et iga tipp v_i on sama värvi nagu tipp u_i. See annab meile graafi G tippude värvimise $k-1$ värviga, vastuolu.

21. Tõestada, et iga kahealuseline tasandiline lihtgraaf, mis on regulaarne astmega 3, sisaldab alamgraafina tsüklit C_4.

Lahendus. Et graafi iga tipp on astmega 3, siis graafis leidub tsükkel. Olgu γ graafi lühima tsükli pikkus. Lisaks olgu n graafi tippude arv, m servade arv ja t tahkude arv. Et igal tahul on vähemalt γ serva ja iga serv kuulub kahele tahule, siis $2m \geqslant \gamma t$ ehk

$$\gamma \leqslant \frac{2m}{t}.$$

Euleri valemi põhjal $t = 2 - n + m$, seega

$$\gamma \leqslant \frac{2m}{2-n+m}.$$

Et graafi iga tipu aste on 3 ja tipuastmete summa on kahekordne servade arv, siis $3n = 2m$, millest $m = \frac{3n}{2}$. Järelikult

$$\gamma \leqslant \frac{3 \cdot \frac{3n}{2}}{2-n+\frac{3n}{2}} = \frac{6n}{4+n} = 6 - \frac{24}{4+n}.$$

Et graaf on kahealuseline, siis on kõik tema tsüklid paarisarvulise pikkusega. Viimase võrratuse põhjal on vähima tsükli pikkus väiksem kui 6. Eelnevas saime, et graafis leidub tsükkel, ainukese võimalusena siis on vähima tsükli pikkus 4. See tähendab, et graafis leidub alamgraaf C_4.