

Aegridade analüüs

Raul Kangro

Tartu, 2011 sügis

Sisukord

1	Tähistused ja mõisted. Aegrea komponendid	5
1.1	Aegrea komponendid	5
1.1.1	Trendi leidmise meetodid	6
1.1.2	Dekompositsioonimeetodid. Sesoonne kohandamine.	13
2	Keskmistamisel põhinevad prognoosimeetodid. Prognoosimudeli headuse mõõdikud	15
2.1	Silumisel põhinevad lihtsamad prognoosivõtted perioodilist komponenti mit- te sisaldavate ridade jaoks	15
2.1.1	Ilma trendita aegrea prognoosimine	15
2.1.2	Trendiga aegrea prognoosimine. Holti meetod	16
2.2	Holt-Wintersi meetod sesoonse aegrea prognoosimiseks	18
2.2.1	Multiplikatiivne Holt-Wintersi meetod	18
2.2.2	Aditiivne Holt-Wintersi meetod	18
2.3	Prognoosimudeli headuse mõõdikud	19
2.4	Aegridade mudelid	19
3	Statsionaarsed aegread	21
3.1	Statsionaarsuse mõiste. Autokorrelatsioonifunktsioon	21
3.2	Periodogramm ja spekter	23
4	Lineaarsed mudelid ühemõõtmelise aegrea jaoks	25
4.1	Üldine lineaarne protsess, selle esitused, statsionaarsus ja pööratavus . . .	25
4.1.1	Lõpliku arvu parameetritega määratud lineaarsete protsesside klassid	28
4.1.2	Osautokorrelatsioonid	29
4.2	Autoregressiivsed protsessid	30
4.2.1	Autokorrelatsioonifunktsioon ja statsionaarsus	30
4.2.2	Osautokorrelatsioonid	32
4.2.3	AR(1) tüüpi mudelid	33
4.2.4	AR(2) tüüpi mudelid	33
4.3	Liikuva keskmise protsessid	36
4.3.1	Autokorrelatsioonid ja pööratavuse tingimused	36
4.3.2	MA(1) protsessi omadused.	36
4.3.3	MA(2) protsessi omadused.	38

4.4	ARMA(p,q) protsessid	38
4.5	ARMA(1,1) protsessid	38
4.6	Lineaarsed mudelid mittestatsionaarsete aegridade jaoks. Prognosisimine ja parameetrite hindamine	39
4.6.1	ARIMA mudelid	39
4.6.2	Aegridade prognoosimine ARIMA mudelite korral	40
4.6.3	ARIMA mudeli parameetrite hindamine	44
4.7	ARIMA tüüpi mudelite valikust	45
4.8	Sesoonsed ARIMA mudelid	46
5	Mitmemõõtmelised mudelid	48
5.1	Mitmene lineaarne regressioon ARIMA tüüpi vigadega	48
5.2	Ülekandefunktsiooni mudelid	48
5.2.1	Suuruste β_i hindamine	50
5.2.2	Mudeli kuju parameetrite b, r ja s valik	50

Sissejuhatus

Nii firmade kui ka tavainimeste elus mängivad suurt rolli ajas toimuvad ning teatud juhuslikkuse komponenti sisaldavad sündmused, mille efekt on sageli väljendatav erinevatele ajahetkedele vastavate numbrite jadadena ehk aegridadena. Näitena võib tuua sissetulekud ja väljaminekud, toodete läbimüügi maht, päevaste ja kuiste sademete hulk jms. Sellistes valdkondades juhuslikkus toob kaasa riske, mille haldamiseks on väga tähtis osata juhuslikkuse iseloomu kindlaks teha, mineviku andmete põhjal võimalikult täpseid prognoose leida ning mõningatel juhtudel ka ebasoovitavate tendentside ilmnemisel õigeaegselt sekku. Kõike seda võimaldab aegride teooria.

Ajalooliselt on praktikute poolt kasutusele võetud mitmeid **meetodeid** aegridega seotud ülesannete (nt. trendi leidmine, tulevikuväärtuste prognoosimine jms) lahendamiseks. Meetodi all mõistame siin kursuses arvutuseeskirja, mille rakendamine peaks andma soovitud tulemuse. Meetodid tuginevad enamasti nn tervel mõistusel ja intuitsioonil ning neid võib rakendada suvalisele ajas järjestatud andmete kogumile, kuid lahtiseks jääb küsimus tulemuste tegelikkusele vastavuse ja usaldusväärsuse osas.

Selleks, et olla (piisavalt) kindel selles, et arvutatud tulemused kajastavad reaalsust ning on kasutatavad ka tuleviku prognoosimisel, tuleb lähtuda aegrea matemaatilistest **mudelitest**. Mudel on matemaatiline kirjeldus selle kohta, kuidas juhuslikkus mõjutab aegreale vastavate andmete tekkimist. Mudelist lähtuvalt on võimalik kontrollida selle sobivust konkreetse aegrea kirjeldamiseks ning tuletada teoreetiliselt põhjendatud arvutuseeskirjad vaadeldavale mudelile vastava aegrea erinevate komponentide leidmiseks ning tuleviku prognoosimiseks koos konkreetsete usalduspiiridega leitavate hinnangute jaoks. Aegride teooria seisneb mudelite kirjeldamises ja nendele vastavate arvutuseeskirjade ning veahinnangute tuletamises.

Teooria rakendamine koosneb mitmetest etappidest, milleks on

1. Sobiva matemaatilise mudeli valik. Nagu me kursuse jooksul näeme, on võimalike mudelite hulk väga lai ning äärmiselt tähtis on leida võimalikult lihtne mudel, mis võimaldaks tegelikkust adekvaatselt kirjeldada.
2. Leitud mudeli kalibreerimine olemasolevate andmetega ning saadud konkreetse mudeli kirjeldusvõime kontroll. Kui selgub, et kirjeldusvõime on liiga madal, siis tuleb minna tagasi mudeli valiku juurde.
3. Kalibreeritud mudeli kasutamine tuleviku ennustamiseks, ennustuste veapiiride kindlakstegemine, vajadusel sobivate juhtimismehhanismide valik soovitud tulemusest tekkinud kõrvalekallete vähendamiseks.

Kõiki neid küsimusi (välja arvatud juhtimismehhanismide valik) vaadeldakse käesoleva kursuse raames. Samas tuleb silmas pidada, et tegemist on sissejuhatava kursusega aegride teooriast ning küllalt palju olulisi mudeleid ning tehnilisi vahendeid jääb selle kursuse raames käsitlemata. Aegride teooria aktuaalsusest annab aga tunnistust näiteks see fakt, et

2003. aasta Nobeli majanduspreemia anti välja just aegridade teooria alaste tööde põhjal
(R.F. Engle)

Peatükk 1

Tähistused ja mõisted. Aegrea komponendid

Mitteformaalselt on aegrida mingi ajas muutuva ja juhuslikest teguritest sõltuva suuruse erinevatele järjestatud ajavahemikele vastavate väärtuste kogum. Selleks võib olla näiteks teatud ajavahemike tagant mõõdetud konkreetse inimese kaal, aktsiahind, firma aastane kasum, kindlustusfirmale laekuvate kahjunõuete kogusumma päevade kaupa vms. Kui mõõtmised toimuvad pidevalt, siis on tegemist pideva ajaga aegreaga, vastasel korral öeldakse, et aegrida on diskreetse ajaga. Käesolevas kursuses käsitleme ainult selliseid diskreetseid aegridasid, kus väärtused vastavad võrdsete ajavahemike tagant tehtud mõõtmistele. Olgu selle ajavahemiku pikkus h , seega eeldame, et huvipakkuva suuruse Z väärtusi mõõdetakse ajamomentidel $\tau_i = \tau_0 + i h$, kus $i \in \mathbb{N}$ või $i \in \mathbb{Z}$. Selleks, et hoida tähistusi võimalikult lihtsana ning olla kooskõlas aegridade alase kirjanduse tavadega, tähistame ajamomendile τ_t vastavat juhuslikku suurust Z kujul Z_t ning selle teadaolevat väärtust kujul z_t , kus t on täisarvuline (või naturaalarvuline) indeks.

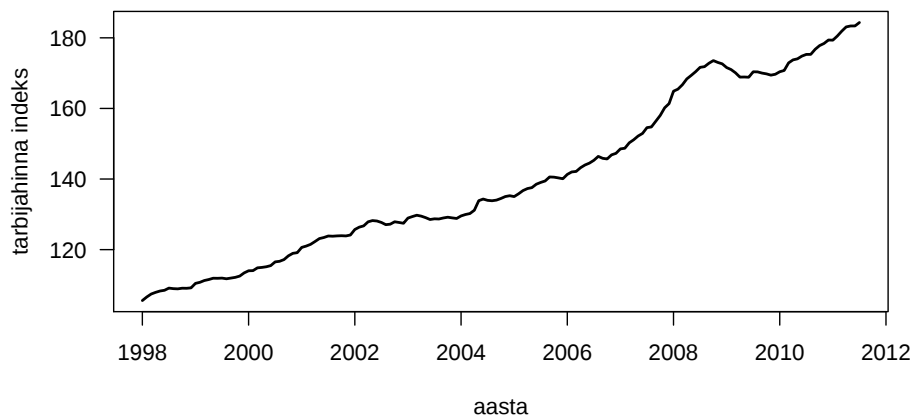
1.1 Aegrea komponendid

Aegreaga kirjeldatud juhusliku suuruse muutumisel ajas võib olla mitmeid erinevaid põhjuseid:

- Ümbritseva (majandus)keskkonna, firma juhtimiskultuuri vms tegurite pikaajaline mõju, mida nimetatakse **trendiks**.
- Kellaajast, nädalapäevast, kalendrikuust vms sõltuvad kindla perioodiga muutused. Kui perioodiks on aasta, siis nimetatakse selliseid muutusi **sesoonseteks muutusteks**.
- Jooksva aasta kalendrist sõltuvad muutused. Osade vaadeldavate suuruste väärtused sõltuvad näiteks töö- või kalendripäevade arvust kuus või kvartalis.
- Ebaregulaarsed, lühikeste ajavahemike järel toimuvad muutused.

Majandusest rääkides eristatakse sageli veel pikaajalist kindla suunaga muutumist ning nn majandustsüklilist sõltuvaid ebaregulaarse pikkusega küllaltki pikaajalisi tõuse ja langusi, kuid andmete põhjal on neid muutumise tüüpe praktiliselt võimatu eristada. Aegrea osadeks jaotamisel nimetatakse seetõttu sageli suhteliselt aeglaselt toimuvat muutumist trend-tsüklilis (inglise keeles *trend-cycle*).

Vaatlema näidetena kahte kuude kaupa defineeritud Eesti Statistikaameti veebilehelt alla laaditud aegrida - tarbijahinna indeksit ning majutatud turistide arvu. Tarbijahinna indeks on kujutatud joonisel 1.1. Joonise põhjal paistab, et tarbijahinna indeksil on selgelt kas-



Joonis 1.1: Tarbijahinna indeks 01.1998-07.2011(Statistikaameti andmed [1])

vav trend ning silmaga nähtavaid sesoonseid muutuseid ei paista. Samas aga majutatud turistide arvu aegreal paistab olema nii kasvav trend kui ka selge sesoonne komponent (vt. joonis 1.2. Järgnevalt vaatleme põgusalt mõningaid võimalusi, kuidas aegrida jaotada erinevat tüüpi osadeks.

1.1.1 Trendi leidmise meetodid

Trendi puhul eristatakse nn globaalset, ajas muutumatu iseloomuga trendi ja lokaalset trendi, mis võib ajas pikkamööda muutuda.

Globaalse trendi eraldamine

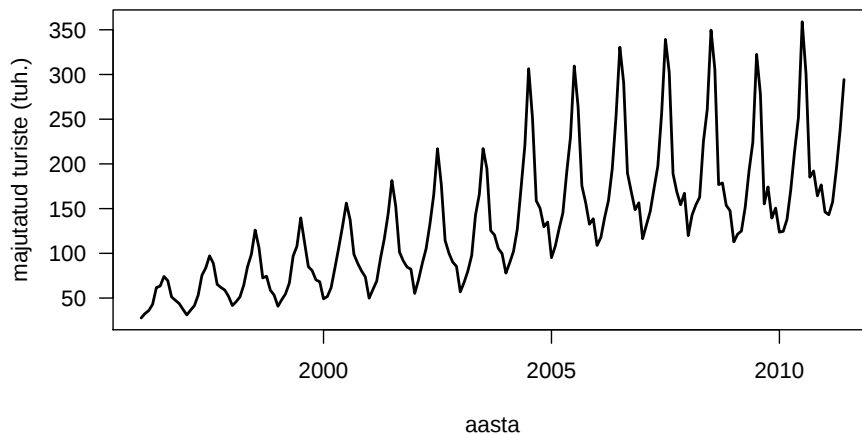
Mõnikord on otstarbekas eeldada, et vaadeldava juhusliku suuruse pikaajalist käitumist ajas iseloomustab mingi küllalt lihtsal kujul olev funktsioon (lineaarne, ruutfunktsioon, trigonomeetiline funktsioon, eksponentfunktsioon), mille ümber toimub võnkumine ebaregulaarsete häirituste ning perioodilise mõjutegurite tõttu. Vaatleme lihtsuse mõttes ainult juhtu, kus perioodilist komponenti ei ole; sel juhul tehakse sageli oletus, et aegrea andmed on kujul

$$z_t = f(\beta, t) + v_t,$$

kus f on mingi teadaolev parameetritest $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ sõltuv funktsioon ning v_t on juhuslik kõrvalekalle. Sageli kasutatavaks meetodiks parameetrite β leidmiseks on vähimruutude meetod, mille korral leitakse β avaldise

$$\sum_t (f(\beta, t) - z_t)^2,$$

minimeerimise teel. Summeerimine toimub siinjuures üle kõikide teadaolevate andmete. Sageli loetakse heaks suvalist funktsiooni f , mille korral saavutatakse vaadeldava summa



Joonis 1.2: Majutatud turistide arv kuude lõikes 01.1996-07.2011 (Statistikaameti andmed [2])

piisavalt väike väärtus ning kasutatakse seda funktsiooni (trendi) tuleviku ennustamiseks. Selline lähenemine on aga sageli põhjendamatu, sest eriti aegridade puhul ei pruugi mineviku andmetega hästi sobiv funktsioon tuleviku ennustamiseks üldse sobida. Selleks, et veendunud olla vaadeldava meetodi sobivuses konkreetse andmestiku jaoks, tuleb lähtuda aegrea mudelist, mille korral vastav meetod annab mõistliku tulemuse. Selliseks mudeliks on

$$Z_t = f(\beta, t) + \varepsilon_t,$$

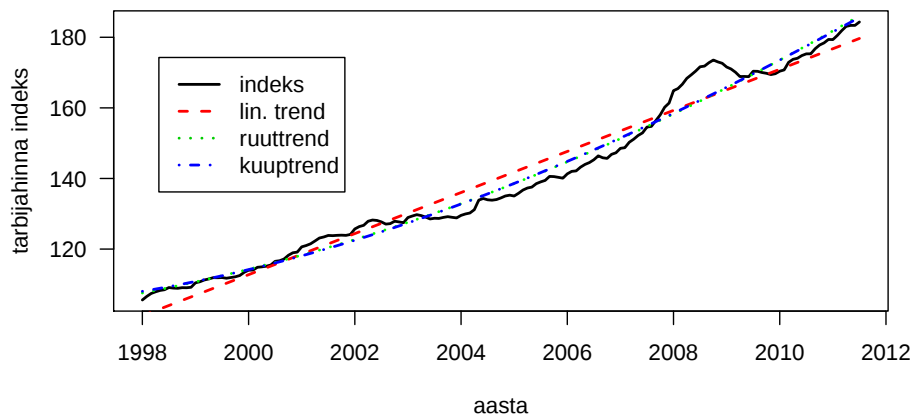
kus ε_t on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused (tegelikult piisab ka mittekorreleeritusest ja konstantsest dispersioonist). Juhul, kui funktsioon f sõltub kordajatest β lineaarselt, nimetatakse sellist lähememist statistikas ka lineaarseks regressiooniks; mittelineaarse sõltuvuse korral on tegemist mittelineaarse regressiooniga. Seega võime lugeda tulemusi usaldatavateks siis, kui pärast parameetrite leidmist järgi jäävad vead võib lugeda sõltumatute juhuslike suuruste väärtustele vastavaks; aegridade puhul juhtub seda harva. Vaatleme näitena lineaarse, ruut- ja kuupfunktsiooni sobitamist eelnevalt vaadeldud tarbijahinna indeksi andmetele. Näiteks lineaarse trendi sobitamise korral on funktsiooni f kujuks

$$f(\beta, t) = \beta_1 + \beta_2 t$$

ning vähimruutude metodil saame parimaks lineaarseks lähendiks

$$f(\hat{\beta}, t) = 100,6 + 0,4849 t,$$

kus t on väljendatud kuudes alates 1998-nda aasta algusest (st 1998 jaanuar vastab väärtusele $t = 1$). Joonisel 1.3 näeme tarbijahinna indeksi väärtuseid koos lineaarsele, ruut- ja kuuptrendile vastavate kõveratega. Kasutades nende kõverate sobitamiseks mingit statistikatarkvara, võib kogenematul statistika rakendajal jääda mulje, et nad kõik on väga head tarbijahinna indeksi käitumise kirjeldamiseks (kõikidel juhtudel on kõik mudeli kordajad olulised väga madala olulisusnivoo korral ja determinatsioonikordajad on vägagi lähedased ühele). Samas on aga selge, et üldine majanduskeskkond on muutuv ning seetõttu on



Joonis 1.3: Tarbijahinna indeksi globaalse trendi hinnangud

globaalse trendi olemasolu vägagi kaheldav; konkreetsel juhul ei rahulda vaadeldud juhtudel andmed regressioonanalüüsi eelduseid (jääkide sõltumatus!) ja seetõttu tarkvara poolt väljastatud head sobivusnäitajad ei oma mõtet. Kokkuvõtteks: globaalse trendi olemasolu eeldus on praktilises andmeanalüüsis väga harva õigustatud ning lihtsa regressiooni abil sobitatud trendikõverate kasutamisel tuleviku ennustamiseks tuleb olla väga ettevaatlik. Konkreetseid meetodeid selle kindlakstegemiseks, et vaadeldud trendimudelid ei sobi käesoleval juhul tuleviku ennustamiseks, vaatleme hilisemates alapunktides.

Lokaalse trendi eraldamine

Kuna globaalse trendi olemasolu on väga harva põhjendatav, siis mõistetakse trendikõvera all enamasti aegrea suhteliselt aeglaselt muutuvat, "siledat" osa. Kahjuks ei ole aga olemas üldiselt aktsepteeritavat lokaalse trendi definitsiooni, mistõttu ei ole tegemist matemaatilise mõistega ning seetõttu on trendist rääkides vaja alati täpsustada, mida konkreetsel juhul selle all mõistetakse.

Lokaalse trendi leidmiseks tuleb aegreast eemaldada juhuslikest häiritustest tekitatud müra, seda protsessi nimetatakse *silumiseks* või *filtreerimiseks*. Väga sageli seisneb silumine uue aegrea tekitamises nn silutud keskmise leidmise abil.

Definitsioon 1 Rea (z_t) teisendust kujul

$$y_t = \sum_{i=-q}^r w_i z_{t-i}, \quad (1.1)$$

kus $w_i \geq 0$ ja $\sum_{i=-q}^r w_i = 1$, nimetatakse **libiseva keskmise leidmiseks**. Juhul kui $q = r$ ja $w_{-i} = w_i$, $i \leq q$, nimetatakse sellist teisendust **sümmeetriliseks libisevaks keskmiseks** ning kui kõik kaalud w_i on võrdsed, on tegemist lihtsa libiseva keskmisega.

Mõningad näited:

- Lihtne sümmeetriline libisev keskmine:

$$y_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q z_{t-i}.$$

- Paarisarvulise perioodiga perioodilise komponendi olemasolu korral kasutatav lihtsa sümmeetrilise keskmistamise modifikatsioon:

$$y_t = \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{2}(z_{-q} + z_q) + \sum_{i=-q+1}^{q-1} z_{t-i} \right), \quad (1.2)$$

kus perioodi pikkuseks on $2q$.

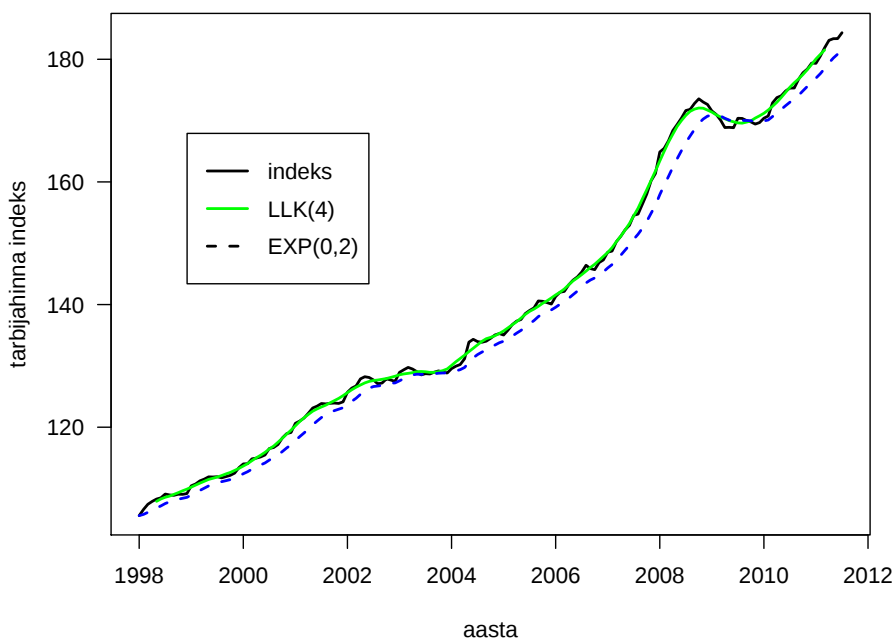
- Eksponentsiaalne silumine:

$$y_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i z_{t-i},$$

kus $\alpha \in (0, 1)$ on mingi positiivne number. Praktistes arvutustes kasutatakse eksponentsilumise omadust

$$y_t = \alpha z_t + (1-\alpha)y_{t-1},$$

mis võimaldab lihtsalt siluda lõplikku aegrida. Kui α läheneb ühele, siis silumist praktiliselt ei toimu ning mida väiksem on α , seda tugevam on silumine.



Joonis 1.4: Lihtsa 9-kuulise libiseva keskmise ning eksponentsiaalse silumise ($\alpha = 0,2$) abil teisendatud tarbijahinna indeks

Joonisel 1.4 on toodud näited tarbijahinna indeksi silumisel saadud kõveratest.

Igasugune silumine peaks vähendama müra (eriti kuna müra kohta eeldame, et see on keskmiselt null). Samuti võib argumenteerida, et perioodilise komponendi puudumisel peaks silutud rida olema lähedane trendile, kuna müra on vähenenud ja aeglaselt muutuva trendi korral on selle väärtuste keskmine (vähemalt juhul, kui keskmist arvutatakse üle suhteliselt lühikese perioodi) lähedane tema hetkeväärtusega. Ideaalne oleks aga juht, kus vähemalt lihtsamate trendide korral saaksime müra puudumisel trendikõvera täpselt leida. Osutub, et see on võimalik.

Harjutus 1 Näidata, et kui aegrea väärtused on antud lineaarse funktsiooni $f(t) = a + bt$ poolt (st $z_t = f(t)$), siis sümmeetrilise libiseva keskmise kasutamisel kehtib $y_t = f(t)$.

Sümmeetrilist keskmistamist ei ole aga alati võimalik rakendada. Näiteks aegrea lõpuosas puuduvad meil vajalikud tulevikuväärtused ning seetõttu on tuleviku prognoosimisel võimalik kasutada ainult ühepoolseid keskmisi, näiteks eksponentsiaalset keskmistamist. Sel juhul aga ei pruugi keskmistamisel leitud trendikõver isegi müra puudumisel langeda kokku õige trendiga.

Harjutus 2 Olgu aegrea väärtused on antud lineaarse funktsiooni $f(t) = a + bt$ poolt (st $z_t = f(t)$). Näidata, et sel juhul eksponentsiaalsel keskmistamisel saadav funktsioon on samuti lineaarne, leida selle kordajad. (Näpunäide: tekkiva lõpmatu summa leidmisel on võimalik kasutada geomeetrilise jaotusega juhusliku suuruse keskväärtuse valemit)

Mittelineaarsete trendikõverate olemasolul ei anna ka sümmeetriline keskmistamine täpset tulemust, kuid on küllalt lihtne näidata, et juhul, kui andmeid on mõõdetud väikese intervalliga (ehk, ekvivalentselt, kui trendikõver muutub piisavalt aeglaselt), on sümmeetrilise keskmistamise tulemus müra puudumisel vähemalt piisavalt väikese ajaintervalli korral väga lähedane tegelikule trendikõverale.

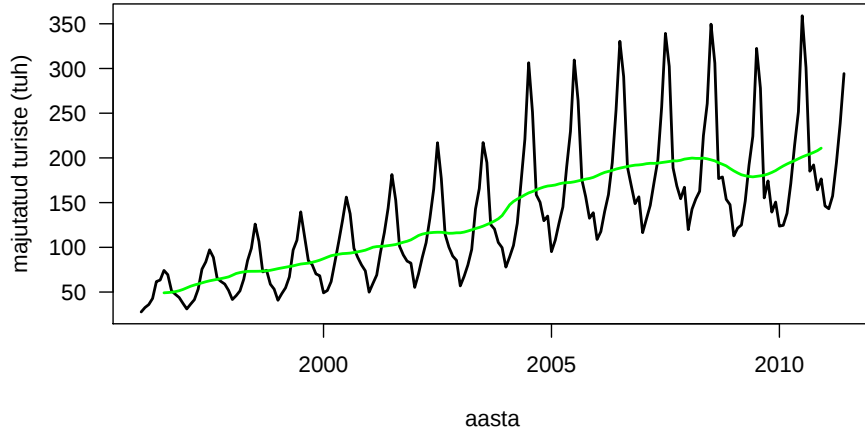
Harjutus 3 (*) (lisapunktide saamiseks esitamise tähtaeg 26.09.2011) Olgu $y_t = \sum_{i=-q}^r w_i z_{t-i}$ selline libiseva keskmise valem, mis jätab kõik lineaarsed funktsioonid paika (st lineaarsele funktsioonile vastava rea z_t korral $y_t = z_t \forall t$) ning millel on vähemalt kaks nullist erinevat kaalu. Näidata, et sel juhul $y_t \neq z_t \forall t$ iga ruutfunktsiooniga antud rea $z_t = a + b \cdot t + c \cdot t^2$, $c \neq 0$ korral.

Kui perioodilist komponenti sisaldava (sesoonse) rea trendi soovetakse silumise teel eraldada, siis peab silmas pidama, et keskmistamisel on sel juhul kaks eesmärki - juhuslike häirituste eemaldamine ning perioodiliste muutuste eemaldamine. Selleks on võimalik kasutada perioodi pikkusega kooskõlas oleva silumisaknaga keskmistamist, kuna üle terve perioodi summeerimisel peaks perioodiliste muutuste summa null olema. Näitena vaatleme majutatud turistide arvu lihtsat silumist. Kuna periood on antud juhul paarisarvuline (12 kuud), siis kasutame valemit 1.2. Tulemus on toodud joonisel 1.5. Nagu näha, eemaldab antud juhul lihtne keskmistamine aegreast perioodilised võnkumised ning tulemust võime lugeda trendikõveraks.

Näitame ka matemaatiliselt, et perioodilist komponenti sisaldava rea silumine eelmainitud tüüpi keskmistamise korral aitab küllalt hästi trendi eraldada. Selleks näitame, et kui andmed on kujul

$$z_t = a + bt + g(t),$$

kus g on perioodiga $2q$ funktsioon (st $g(t+2q) = g(t) \forall t$), siis valemiga (1.2) saadud silutud rida langeb kokku trendiga. Selleks, et lahutus trendiks ja perioodiliseks osaks oleks üheselt



Joonis 1.5: Paarisarvulisele perioodile vastava lihtsa sümmeetrilise kesmistamise modifikatsiooni abil silutud majutatud turistide arv ajas

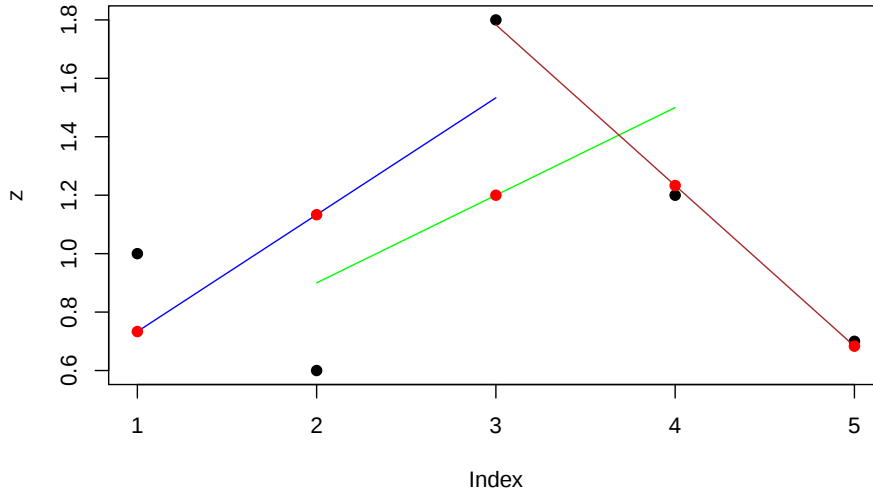
määratud, nõuame täiendavalt, et $\sum_{i=1}^{2q} g(t-i) = 0 \forall t$. Seega on meie eesmärgiks näidata, et $y_t = a + bt$. Arvutame:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{2}(z_{-q} + z_q) + \sum_{i=-q+1}^{q-1} z_{t-i} \right) \\
 &= \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{2}(a + b(t+q) + g(t+q)) + \sum_{i=-q+1}^{q-1} (a + b(t-i) + g(t-i)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(a + b(t-q) + g(t-q)) \right) \\
 &= \frac{1}{2q} \left(\frac{a+bt}{2} + \sum_{i=-q+1}^{q-1} (a+bt) + \frac{a+bt}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2q} \left(\frac{bq}{2} - \sum_{i=-q+1}^{q-1} (bi) - \frac{bq}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2q} \left(\frac{g(t+q)}{2} + \sum_{i=-q+1}^{q-1} g(t-i) + \frac{g(t-q)}{2} \right) \\
 &= a + bt + 0 + \frac{1}{2q} \left(\frac{g(t+q)}{2} + \sum_{i=-q+1}^{q-1} g(t-i) + \frac{g(t-q)}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Nüüd kasutame g perioodilisust:

$$\begin{aligned}
& \frac{g(t+q)}{2} + \sum_{i=-q+1}^{q-1} g(t-i) + \frac{g(t-q)}{2} \\
&= \frac{g(t-q)}{2} + \sum_{i=-q+1}^0 g(t-i-2q) + \sum_{i=1}^{q-1} g(t-i) + \frac{g(t-q)}{2} \\
&= \sum_{i=q+1}^{2q} g(t-i) + \sum_{i=1}^{q-1} g(t-i) + g(t-q) \\
&= \sum_{i=1}^{2q} g(t-i) = 0.
\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et $y_t = a + bt$.



Joonis 1.6: Lokaalse regressiooni abil aegrea silumine

Üheks küllaltki populaarseks meetodiks aegridade silumisel on ka nn *loess* või *lowess* (inglise keeles *locally weighted scatterplot smoothing*) meetod, mis silutud kõvera väärtuse leidmiseks mingis punktis sobitab kaalutud vähimruutude meetodil madala astme polünoomi läbi antud punktile lähedastele ajamomentidele vastavate aegrea väärtuste ning arvutades silutud kõvera väärtuse selle polünoomi abil. Idee tutvustamiseks vaatleme juhtu, kus meil on antud aegrida

$$z = (1, 0.6, 1.8, 1.2, 0.7).$$

Kõige lihtsamal kujul lokaalse regressiooni puhul tuleb otsustada polünoomi aste ning kasutatavate naabrite arv. Vaatleme lineaarset polünoomi (ehk sirget) ning kasutame silutud rea leidmisel kolme lähimat väärtust (st jooksvale ajahetkele vastavat väärtust ja veel kahele lähimale ajahetkele vastavaid vaatluseid). Silumise protsess on kujutatud joonisel 1.6, kus esialgse aegrea väärtused on kujutatud mustade punktidenä. Silutud rea esimese väärtuse leidmiseks leiame vähimruutude meetodil sirge, mis lähendab esimest kolme vaatlust

võimalikult hästi (joonisel sinine sirge). Selle sirge väärtus ajal $t = 1$ ongi silutud rea esimeseks väärtuseks (joonisel punane punkt). Silutud rea teise väärtuse leidmine toimub sama sirge abil, kuna kasutusele tulevad samad z väärtused. Kolmanda punkti leidmisel tuleb sobitada sirge läbi teise, kolmanda ja neljanda z väärtuse (joonisel roheline) ning viimased kaks väärtust leitakse läbi viimase kolme z väärtuse sobitatud sirge abil (joonisel pruun).

Praktilisel kasutamisel antakse polünoomi sobitamisel igale kasutatavale z väärtusele veel kaal sõltuvalt selle kaugusest arvutatavast väärtusest. Täpsemalt võib nende meetodite kohta lugeda näiteks Wikipedia artiklist [3].

1.1.2 Dekompositsioonimeetodid. Sesoonne kohandamine.

Aegridade käitumisest arusaamine ja nende tõlgendamine on majanduses väga suure tähtsusega, seetõttu on loodud mitmeid meetodeid ja töövahendeid, mis võimaldavad neid osadeks lahutada. Ennem mõningate enim tunnustatud vahendite tutvustamist aga selgitame kasutatavaid mõisteid.

Aegrea osadeks lahutamisel tuleb kõigepealt otsustada, mismoodi need osad tervikus sisalduvad. Valdavalt vaadeldakse kahte juhtu: **aditiivne dekompositsioon**, mille korral eeldatakse, et vaadeldav juhuslik suurus avaldub kujul

$$Z_t = T_t + S_t + I_t,$$

kus T on trend (või trend-tsükkel), S on perioodiline (sesoonne) komponent ja I on eba-regulaarne (juhuslik) komponent ehk müra; ning **multiplikatiivne dekompositsioon**, mille korral eeldatakse käitumist

$$Z_t = T_t S_t I_t.$$

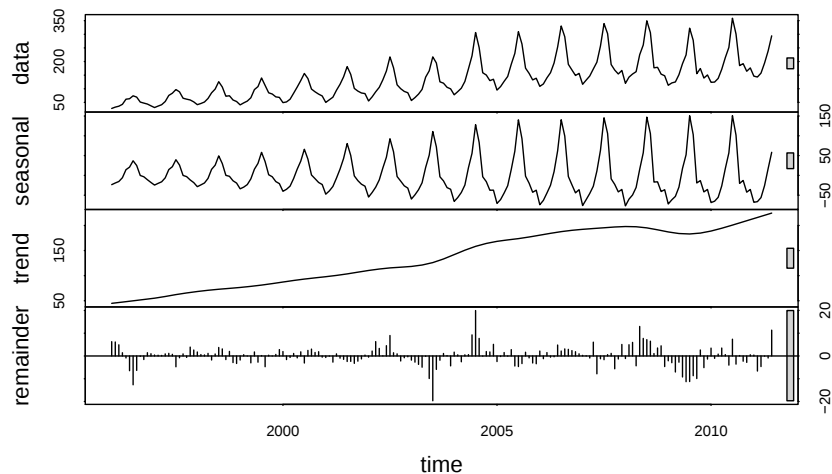
Mõlemal juhul eeldatakse, et T sisaldab kogu informatsiooni keskmise taseme kohta ning S ja I kirjeldavad kõikumist keskmise ümber, st aditiivse lahutuse korral on S ja I keskmiselt nullid ning multiplikatiivsel juhul väljendavad nad suhet keskmise väärtusesse (st on ise keskmiselt võrdsed ühega). Multiplikatiivset juhtu on võimalik taandada aditiivsele juhule esialgse aegrea logaritmitamise teel.

Sageli pakub suurt huvi eriti sesoonse komponendi eemaldamine, mida nimetatakse *sesoonseks kohandamiseks* (*seasonal adjustment*). Sesoonne kohandamine võimaldab paremini võrrelda aegrea järjestikuseid väärtuseid (näiteks uurida, kas majandus on tõusuteel, kui teise kvartali tulemus on parem esimese kvartali tulemusest).

Aegrea komponentide eraldamine on sageli iteratiivne protsess: enamasti leitakse kõigepealt ligikaudselt trend (näiteks sobiva sümmeetrilise libiseva keskmise abil), seejärel eemaldatakse reast trend ja seejärel leitakse perioodiline komponent (näiteks perioodile vastavaid alamridasid keskmistades), seejärel eemaldatakse esialgsest reast leitud sesoonne komponent ja rakendatakse saadud mitteperioodilisele reale jälle mingit keskmistamise meetodit trendi leidmiseks jne. Kuna trendi ja perioodilise komponendi mõisted ei ole matemaatiliselt täpselt formuleeritud, siis on aegridade osadeks lahutamine tegevus, mis eeldab mitmesuguseid kasutajapoolseid valikuid ning seega ei ole tulemus ilma täiendavate kokkulepeteta üheselt määratud.

Mainime tuntud meetoditest kahte. Esiteks, STL (*Seasonal-Trend decomposition based on LOESS*) võimaldab jaotada aegrida aditiivseteks komponentideks, on kasutatav ka puuduvate väärtuste korral ning on realiseeritud näiteks tarkvarapakettis R. Teiseks, Ameerika Ühendriikide statistikaameti (*U. S. Census Bureau*) poolt kasutatavad dekompositsiooni

ja sesoonse kohandamise meetodid on realiseeritud nende poolt hallatavas ning tasuta allalaaditavas tarkvarapaketis X-12-ARIMA, mis võimaldab aegreast kõrvaldada erindeid, võtta arvesse töö- ja puhkepäevade efekte, jaotada aegrida nii aditiivseteks kui ka multiplikatiivseteks osadeks ning arvutada ka mitmesugustel meetoditel põhinevaid prognoose ja sooritada diagnostilisi teste. Vastav protseduur on olemas tarkvarapaketis SAS; tasuta versioonid mitmesuguste operatsioonisüsteemide jaoks on saadaval internetis aadressil [5].



Joonis 1.7: STL meetodil saadud majutatud turistide aegrea komponendid

Näitena aegrea osadeks jaotamisel saadavatest tulemustes on joonisel 1.7. STL kasutamise korral saab valida mitmesuguseid parameetreid trendi ja perioodilise osa leidmise konkretiseerimiseks. Näiteks joonisel toodud juhul on lubatud perioodilisel komponendil ajas küllalt kiiresti muutuda ning seetõttu on tulemus oluliselt erinev sellest, mille saaksime muutumatut perioodilist komponenti eeldades.

Peatükk 2

Keskmistamisel põhinevad prognoosimeetodid. Prognoosimudeli headuse mõõdikud

2.1 Silumisel põhinevad lihtsamad prognoosivõtted perioodilist komponenti mittesisaldavate ridade jaoks

Olgu meil antud teatud kogus aegrea väärtusi z_t , $t = 1, 2, \dots, T$. Sageli pakub huvi tulevikuväärtuste võimalikult täpne ennustamine, kusjuures on selge, et me saame selleks kasutada ainult teadaolevaid väärtuseid. Tähistame kujul $\hat{z}_{t_1|t}$ prognoosi aja t_1 jaoks, mis on saadud, kasutades teadaolevaid väärtuseid ajani kuni ajani t ning kui $t_1 = t + 1$, siis kasutame prognoosi jaoks lihtsustatud tähist $\hat{z}_{t_1}$.

2.1.1 Ilma trendita aegrea prognoosimine

Kui aegrea väärtused tunduvad käituvat täiesti juhuslikult või kui trendist põhjustatud muutlikuse osa on väga väike, siis on tuleviku jaoks küllaltki mõistlikuks ennustuseks eelnevate vaatluste keskmine (kuna sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste korral on parimaks ennustuseks keskvärtus). Kui on alust arvata, et vaatlused on täiesti juhuslikud (st vastavad sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste väärtustele), siis võib kasutada kõigi teadaolevate vaatluste keskmist:

$$\hat{z}_{t+p|t} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t z_i.$$

Harjutus 4 Hinnata juhul, kui Z_t on sõltumatud, sama jaotusega ning dispersiooniga σ^2 juhuslikud suurused, tõenäosust, et eelneva valemiga ennustatud tulemus erineb Z_{t+1} tegelikust väärtusest rohkem kui ε , st leida hinnang tõenäosusele

$$P(|Z_{t+1} - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t Z_i| \geq \varepsilon).$$

Kui aga keskmine on ajas siiski muutuv, on parem kasutada selliseid keskmise valemeid, mis kõige värskematele vaatlustele annavad suurema kaalu, näiteks lihtsat libisevat keskmist

$$\hat{z}_{t+p|t} = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} z_{t-i}$$

või siis eksponentsiaalset keskmistamist

$$\hat{z}_{t+p|t} = \hat{z}_{t+1} = \alpha z_t + (1 - \alpha)\hat{z}_t,$$

kusjuures tavaliselt võetakse sellisel juhul $\hat{z}_1 = z_1$

2.1.2 Trendiga aegrea prognoosimine. Holti meetod

Trendiga aegridade korral on vägagi loomulik nõuda, et prognoosimudel annaks täpse enustuse vähemalt sellistel juhtudel, kui aegrida vastab täpselt lineaarsele funktsioonile. Libiseva keskmise kasutamisel tekib aga prognoosiviga: kui $z_t = a + bt$, siis libiseva keskmisega arvutatud prognoosi korral saame (arvestades, et kaalud summeeruvad üheks)

$$\begin{aligned}\hat{z}_{t+1} = y_t &= \sum_{i=0}^{q-1} w_i z_{t-i} = \sum_{i=0}^{q-1} w_i (a + bt - bi) \\ &= a + bt - b \sum_{i=0}^{q-1} w_i i.\end{aligned}$$

Vea parandamise üheks võimaluseks on parandada prognoosi kahekordse keskmistamise (st kasutades prognoosimisel ka keskmistatud suuruste y_t keskmist) abil. Nimelt kui me arvutame eelneval juhul

$$\bar{y}_t = \sum_{i=0}^{q-1} w_i y_{t-i} = a + bt - 2b \sum_{i=0}^{q-1} w_i i,$$

siis saame avaldada

$$a + b \cdot t = 2y_t - \bar{y}_t, \quad b = \frac{y_t - \bar{y}_t}{\sum_{i=0}^{q-1} w_i i}$$

ning seega saame soovitud omadusega prognoosimeetodi kujul

$$\hat{z}_{t+p|t} = 2y_t - \bar{y}_t + \frac{y_t - \bar{y}_t}{\sum_{i=0}^{q-1} w_i i} p.$$

Harjutus 5 Lihtsustage eelnevat avaldist lihtsa libiseva keskmise $y_t = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} z_{t-i}$ korral.

Üheks küllalt populaarseks meetodiks tendiga aegridade prognoosimiseks on **Holti meetod**, mis tugineb eksponentsiaalsel keskmistamisel. Holti meetodi korral prognoosid vastavad lineaarsele funktsioonile:

$$\hat{z}_{t+p|t} = a_t + b_t p,$$

kus a_t arvustamisel kasutatakse z_t väärtust ning eelnevate andmete põhjal tehtud prognoosi:

$$a_t = \alpha z_t + (1 - \alpha)\hat{z}_t = \alpha z_t + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$$

ning b_t arvutamisel kasutatakse eelmise väärtuse ning a muutuse keskmist:

$$b_t = \beta (a_t - a_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}.$$

Meetodi kasutamiseks tuleb valida või andmete põhjal hinnata väärtused a_1, b_1, α, β . Sageli valitakse $a_1 = z_1, b_1 = 0$ või siis kasutada nendeks teatud arvu esimeste z väärtuste jaoks leitud lineaarse regressioonikõvera vastavaid väärtusi. Parameetrite α ja β valikul võib

kasutada näiteks mingi prognoosivea määrdiku miniseerimist, näiteks võib miniseerida nende parameetrite järgi ennustusvigade ruutude summat

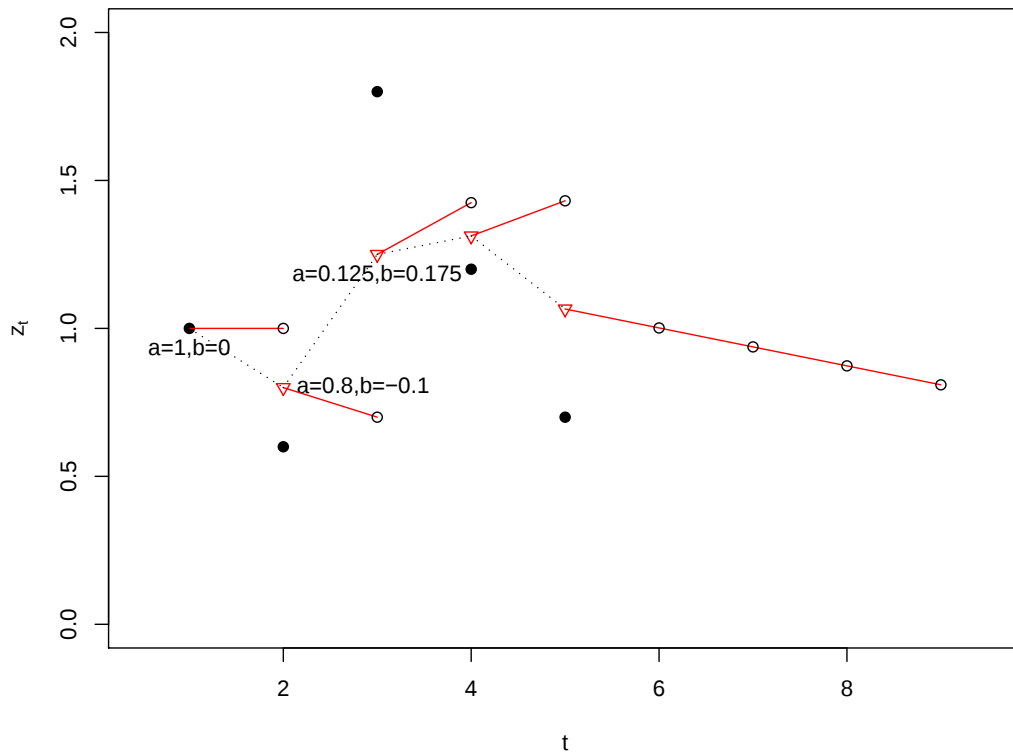
$$\sum_{t=2}^n (\hat{z}_t - z_t)^2.$$

Harjutus 6 Näidata, et Holti meetod on sobivalt valitud a_1 ja b_1 korral täpne juhul, kui aegrida vastab lineaarsele funktsioonile.

Meetodi töötamisega tutvumiseks vaatleme varasemast tuttavat näidet, kus aegrea väärtusteks on

$$z = (1, 0.6, 1.8, 1.2, 0.7).$$

Vaatleme prognoosimise protsessi juhul $\alpha = \beta = 0.5$ ning valime algväärtusteks $a_1 =$



Joonis 2.1: Lokaalse regressiooni abil aegrea silumine

1, $b_1 = 0$. Olgu meie eesmärgiks prognoosida Holti meetodiga järgmised 4 väärtust z_6, z_7, z_8, z_9 . Selleks peame leidma a_5 ja b_5 , milleks tuleb alustada valitud a_1 ja b_1 väärtustest ning liikuda mööda aegrida kuni ajani $t = 5$, arvutades iga ajamomendi jaoks vastavad taseme a ja tõusu b väärtused. Protsessi on graafiliselt kujutatud joonisel 2.1. Kõigepealt lähtume ajale $t = 1$ vastavast trendijoonest (sirge punktist $(1, a)$ tõusuga b), millele vastavaks prognoosiks $\hat{z}_2$ on 1 (joonisel kujutatud ringikesena). Ajale $t = 2$ vastava taseme väärtuse leiame nüüd prognoosi ja tegeliku väärtuse keskmisena (kuna $\alpha = 0.5$, siis leiame aritmeetilise keskmise), mis on joonisel kujutatud kolmnurgaga. Uue trendi leidmiseks võtame keskmise

kaaluga β prognoosi leidmisel kasutatud tõusust (praegu 0) ja taseme a väärtuste muudust; leitud uus tõusukordaja b_2 vastab sirgele, mis läheb eelmise trendijoonel ja punktiirina kujutatud a väärtusi ühendava sirge vahelt. Pärast a_2 ja b_2 arvutamist kordame varasemat proteduuri: leiame prognoosi $\hat{z}_3$ vastavalt trendijoonele, seejärel a_3 väärtuse prognoosi ja tegeliku väärtuse keskmisena ning lõpuks uue tõusukordaja b_3 jne. Ajamomendiks $t = 5$ oleme leidnud

$$a_5 = 1.065625, \quad b_5 = -0.0640625$$

ning seega huvipakkuvad prognoosid leiame vastavalt sirgele, mis läbib punkti $(5, a_5)$ tõusuga b_5 .

2.2 Holt-Wintersi meetod sesoonse aegrea prognoosimiseks

Järgnevalt eeldame, et aegreal on perioodiline komponent perioodiga s . Holt-Wintersi meetodil on kaks versiooni sõltuvalt sellest, kas me eeldame, et perioodiline komponent on korrutatud trendiga (multiplikatiivne mudel) või liidetud trendile (aditiivne mudel). Mõlemal juhul hinnatakse ennustamiseks jooksvat taset a , trendikõvera tõusu b ning sesoonset (perioodilist) komponenti S ning lisaks algväärtustele tuleb valida kolm silumistegurit α , β ja γ .

2.2.1 Multiplikatiivne Holt-Wintersi meetod

Ennustusvalemiks on sel juhul

$$\hat{z}_{t+p|t} = (a_t + p b_t) S_{t+p-s}, \quad p = 1, \dots, s,$$

kus

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha \frac{z_t}{S_{t-s}} + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}, \\ S_t &= \gamma \frac{z_t}{a_t} + (1 - \gamma)S_{t-s}. \end{aligned}$$

Meetodi kasutamiseks alates ajamomendist $t = s + 1$ tuleb ette anda $a_s, b_s, S_1, \dots, S_s$ ning määrata sobivad kordajad α, β, γ . Kui kasutada erinevates tarkvarapakettides realiseeritud Holt-Wintersi meetodit samade andmete ja automaatse parameetrivaliku korral, siis võivad prognoosivead vähemalt alguses olla küllaltki erinevad, kuna etteantavate parameetrite automaatne valik on realiseeritud neis erinevalt.

2.2.2 Aditiivne Holt-Wintersi meetod

Ennustusvalemiks on sel juhul

$$\hat{z}_{t+p|t} = (a_t + p b_t) + S_{t+p-s}, \quad p = 1, \dots, s,$$

kus

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha(z_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}, \\ S_t &= \gamma(z_t - a_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}. \end{aligned}$$

2.3 Prognoosimudeli headuse mõõdikud

Selleks, et võrrelda konkreetse andmestiku korral omavahel erinevaid prognoosimeetodeid, arvutatakse sageli mingit tüüpi keskmist prognoosiviga ühesammuliste prognooside jaoks. Mõned tuntumatest on

- Keskmise absoluutne viga (*mean absolute deviation*):

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |z_i - \hat{z}_i|$$

- Keskmise ruut viga (*mean square error*):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2$$

- Ruutkeskmise viga:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2} = \sqrt{MSE}$$

- Keskmise suhteline viga (*mean absolute percentage error*):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|z_i - \hat{z}_i|}{z_i}$$

Mõningaid täiendavaid headuse mõõdikuid vaatleme hiljem. Vaadeldud näitajad annavad aimu sellest, kui hästi vaadeldav aegrida mingi meetodi korral prognoositav võib olla. Samas tuleb aga suhtuda arvutatud näidikutesse ettevaatusega, seda eriti juhul, kui meetodis kasutatavad parameetrid on leitud sama andmestiku põhjal, mille korral näidikuid arvutatakse (parameetrite valikuga võib saavutada hea kooskõla selleks kasutatava andmestikuga, kuid see kooskõla ei pruugi edasi kanduda uute andmete peale, nn. ülesobitamise efekt). Samuti tuleb uurida eenustusvigade juhuslikkust, sest kui ennustusvead ei ole omavahel sõltumatud, siis ei ole mingit garantiid, et mineviku põhjal arvutatud näitajad tuleviku kohta midagi ütlevad ning kindlasti on sel juhul võimalik prognoose avastatud sõltuvust kasutades parandada. Teisalt, kui prognoosivead on sõltumatud nullkeskmisega juhuslikud suurused, siis mudel on vähemalt ruutkeskmise vea suhtes parim võimalik. Kahjuks ei ole sõltumatust lõpliku aegrea baasil võimalik kindlaks teha, kuid see-eest on mitmeid teste, mis võimaldavad sõltuvust kindlaks teha. Nii et praktikas ennustusmeetodi valikul tuleb alati kontrollida, kas prognoosijäägid on sõltumatud. Kui tuleb välja, et ei ole, siis on (vähemalt teoreetiliselt) kindlasti võimalik leida parem prognoosimeetod. Aegridade analüüsimisel on üheks tähtsamaks sõltuvuse tüübiks ajaline sõltuvus, mille kindlakstege misest tuleb juttu järgnevas peatükis.

2.4 Aegridade mudelid

Selleks, et oleks võimalik leida veapiire arvutatud prognoosidele veapiire ning tuletada prognoosimeetodite sobivuse kindlakstegegimiseks ja omavaheliseks võrdlemiseks matemaatilisel põhjendatud protseduure, tuleb teha eeldused selle kohta, kuidas juhuslikkus mõjutab vaadeldava aegrea väärtuseid, st tuleb kirjeldada aegrea mudel. Selleks, et minevikuväärtuste põhjal oleks võimalik midagi öelda ka tulevikus tekkivate juhuslike häirituste kohta, peab neil häiritustel olema korduv iseloom (ideaalis on nad sõltumatud ja

sama jaotusega juhuslikud suurused). Järgnevas eeldame, et juhuslikkus aegrea väärtuste $z_1, \dots, z_n$ tekkimisel on tulenenud (enamasti sõltumatute ja sama jaotusega) juhuslike suuruste $A_1, \dots, A_n$ väärtustest $a_1, \dots, a_n$. Seega me eeldame, et andmete tekkimise taga on juhuslik protsess (Z_t) , kus Z_t võib sõltuda varasematest Z_i , $i < t$ väärtustest ning kuni ajani t tekkivatest juhuslikest suurustest A_i , $i \leq t$; meie näeme andmetena selle protsessi ühte võimalikku käitumist, mis vastab juhuslike suuruste A_i väärtustele a_i .

Definitsioon 2 Aegrea mudelit nimetatakse olekuruumi mudeliks, kui protsess Z_t esitub kujul

$$\begin{aligned} Z_t &= w(X_{t-1}) + r(X_{t-1})A_t, \\ X_t &= f(X_{t-1}) + g(X_{t-1})A_t, \end{aligned}$$

kus (A_t) in sõltumatud, sama jaotusega ja tsentreeritud juhuslikud suurused ning $X_t = (X_{1,t}, \dots, X_{m,t})$ on olekuvektor. Olekuruumi mudelit nimetatakse lineaarseks, kui funktsioonid $w()$ ja $f()$ on lineaarsed funktsioonid, $g()$ on konstantne vektor ja $r(X_{t-1}) = 1$.

Märkus 3 Eelennvalt defineeritud olekuruumimudel on tuntud kui ühe veaallikaga mudel (Single Source of Error model). Laialdaselt on kasutatav ka mitme veaallikaga mudel (Multiple Source of Error model), mille korral igal ajasammul mõjutab nii olekuruumi kui ka järgmist vaatlust mitmemõõtmelise juhusliku vektori A väärtus, $g()$ ja $r()$ on sel juhul sobivate mõõtmega matriksid.

Harjutus 7 Leida Holti meetodi esitus olekuruumi mudelina eeldusel, et ühesammulise prognoosi viga on A_t :

$$Z_t = a_{t-1} + b_{t-1} + A_t.$$

Definitsioon 4 Aegrea mudelit nimetatakse ARIMA tüüpi mudeliks, kui Z_t avaldub lõpliku arvu varasemate Z_i , $i < t$ ja lõpliku arvu sõltumatute sama jaotusega häirituste A_i , $i \leq t$ lineaarkombinatsioonina kujul

$$Z_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i Z_{t-i} + A_t + \sum_{i=1}^q \psi_i A_{t-i}.$$

Harjutus 8 Näidata, et ARIMA tüüpi mudel esitub lineaarse olekuruumi mudelina.

Osutub aga, et lineaarne olekuruumi mudel esitub samuti ARIMA tüüpi mudeli kujul. Käesolevas kursuses keskendume põhiliselt lineaarsetele mudelitele ning lähtume peamiselt ARIMA tüüpi esitlusest.

Peatükk 3

Statsionaarsed aegread

3.1 Statsionaarsuse mõiste. Autokorrelatsioonifunktsioon

Selleks, et teadaolevate aegrea väärtuste põhjal saaks tulevikku ennustada ja ka prognoosivigu arvutada, peab tegema mingid eeldused, mis garanteerivad tulevikukäitumise ja tulevikus tekkivate juhuslike häiritusi iseloomustava info sisalduvuse mineviku andmetes. Üheks aegride teoorias sagili kasutatavaks eelduseks on nn statsionaarsuse nõue.

Definitsioon 5 *Juhuslikku protsessi $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ nimetatakse (tugevalt) statsionaarseks, kui iga täisarvude komplekti $t_1, \dots, t_m$ ja iga täisarvu p korral on juhuslikud vektorid $(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m})$ ning $(Z_{t_1+p}, \dots, Z_{t_m+p})$ sama jaotusega. Kui iga täisarvude komplekti $t_1, \dots, t_m$ ja iga täisarvu p korral on juhuslike vektorite $(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m})$ ning $(Z_{t_1+p}, \dots, Z_{t_m+p})$ kõik kuni k järku momendid võrdsed, siis nimetatakse protsessi Z_t k -järku nõrgalt statsionaarseks.*

Statsionaarse protsessi näiteks on protsess, mis koosneb sõltumatutest sama jaotusega juhuslikest suurustest. Olgu meil tegemist teist järku nõrgalt statsionaarse protsessiga, siis juhul $m = 1$ järeldub definitsioonist, et

$$E(Z_t) = \mu, \quad DZ_t = \sigma^2 \quad \forall t$$

mingite konstantide μ ja σ korral. Samuti järeldub, et suuruste Z_t ja Z_{t+p} kovariatsioon ja korrelatsioon (täpsemalt autokorrelatsioon ja autokorrelatsioon, kuna tegemist on sama protsessi eri ajamomentidele vastavate juhuslike suuruste kovariatsiooni ja korrelatsiooniga) sõltub ainult ajamomentide vahest p , väärtuste hulkasid

$$\gamma_p = \text{cov}(Z_t, Z_{t+p}), \quad \rho_p = \text{cor}(Z_t, Z_{t+p}) = \frac{\gamma_p}{\sigma^2}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

nimetatakse vastavalt protsessi Z_t autokovariatsioonifunktsiooniks ja autokorrelatsioonifunktsiooniks.

Harjutus 9 *Näidata, et sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste ε_t abil defineeritud protsess*

$$Z_1 = \varepsilon_1; \quad Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t > 1$$

ei ole statsionaarne.

Harjutus 10 *(*, lisapunktide saamiseks esitada 17.10.2011) Näidata, et sõltumatute standardse normaaljaotusega juhuslike suuruste ε_t abil defineeritud protsess*

$$Z_t = \frac{1}{2}\varepsilon_t + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1}$$

on statsionaarne.

Kui meil on teada statsionaarsele protsessile vastavad aegrea väärtused ajamomentidel $t = 1, 2, \dots, N$, siis arvutatakse empiiriliste autokovariatsiooni ja autokorrelatsioonifunktsiooni väärtused tavaliselt valemitena

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t, \\ c_p &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-p} (z_t - \bar{\mu})(z_{t+p} - \bar{\mu}), \quad p = 0, 1, \dots, N-1, \\ r_p &= \frac{c_p}{c_0}.\end{aligned}$$

Harjutus 11 (*, lisapunktide saamiseks esitada 17.10.2011) Näidata, et kui statsionaarse protsessi korral kehtib $\lim_{p \rightarrow \infty} |\gamma_p| = 0$, siis

$$P(|\bar{\mu} - \mu| \geq \varepsilon) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

iga $\varepsilon > 0$ korral.

Tähtis on aru saada, et empiirilisi autokorrelatsioone ja autokovariatsioone saame me arvutada suvaliste andmeridade põhjal, kuid mittestatsionaarse rea korral ei iseloomusta saadavad numbrid mingite konkreetsete juhuslike suuruste korrelatsioone ja kovariatsioone, seega nende mõistlik tõlgendamine on väga raske.

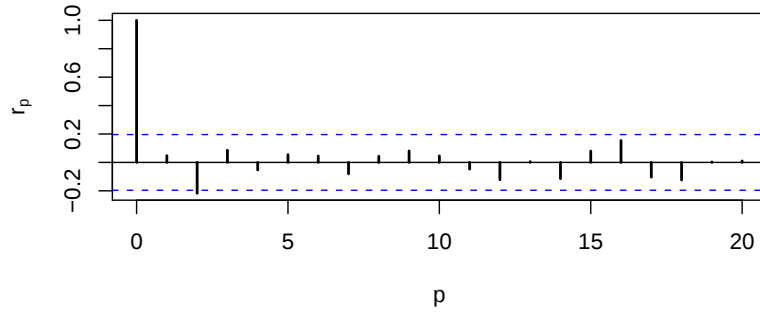
Kui meil on tegemist sõltumatutest sama jaotusega juhuslikest suurustest koosneva protsessiga, siis kõik teoreetilised korrelatsioonid ρ_p , $p > 0$ on võrdsed nulliga, kuid protsessile vastava lõpliku pikkusega aegrea põhjal arvutatud hinnangud r_p , $p > 1$ on üldiselt nullist erinevad. Seetõttu on väga oluline teada mingeid kriteeriume, mille põhjal otsustada konkreetse aegrea empiirilise autokorrelatsioonifunktsiooni abil, kas aegrida võib vastata täiesti juhuslikule protsessile. Selleks tutvume kahe tulemusega.

Esiteks, on teada (vt [6]), et sõltumatutele sama jaotusega juhuslikele suurustele vastava aegrea korral on suurused r_p , $p > 1$ asümptootiliselt (vaatluste arvu N kasvades) normaaljaotusega, kusjuures keskvärtus läheneb suurusel $\frac{1}{N}$ ja standardhälve suurusel $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Seega piisavalt suure N korral peaks iga konkreetse $p > 0$ korral jääma tõenäosusega 0.95 vahemikku $[\frac{1}{N} - \frac{2}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} + \frac{2}{\sqrt{N}}]$. Tavaliselt statistikatarkvaras on empiirilise autokorrelatsioonifunktsiooni graafilisel esitamisel vastavad piirid ka joonisel välja toodud.

Eelnev tulemus kehtib iga üksiku autokorrelatsioonikordaja suhtes. Samas arvutatakse neid kordajaid tavaliselt mitu ning näiteks 20 kordaja arvutamisel on loomulik, et keskmiselt ühe kordaja väärtus satub väljapoole 95% veapiire. Näiteks joonisel 3.1 on kujutatud sõltumatute juhuslike suuruste väärtuste rea põhjal arvutatud autokorrelatsioonikordajad ning nendest r_2 väärtus on väljaspool 95% veapiire. Seetõttu oleks hea teada, kas terve väljaarvutatud autokorrelatsioonikordajate komplekt võib vastata sõltumatutele juhuslikele suurustele. Selleks sobib näiteks Ljung-Box test, mis põhineb suurusel

$$Q = N(N+2) \sum_{p=1}^m \frac{r_p^2}{N-p},$$

kus m näitab, kui mitmest esinevast autokorrelatsioonist koosnevat rühma testitakse. On teada, et see statistika on asümptootiliselt m vabadusastmega χ^2 jaotusega ning selle põhjal saab hinnata tõenäosust, et vaadeldavad kordajad vastavad sõltumatutele juhuslikele suurustele.



Joonis 3.1: Saja sõltumatu normaalkaotusega juhusliku suuruse väärtuste põhjal arvutatud autokorrelatsioonid

3.2 Periodogramm ja spekter

Signaalteoorias on tavaks esitada signaale erinevate sagedustega siinuste ja koosinuste (nn harmoonikute) summamana. Eeldame järgnevalt lihtsuse mõttes, et vaatluste arv N on paaris, siis me saame aegrea väärtused z_t esitada kujul

$$z_t = a_0 + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \left(a_i \cos\left(\frac{2\pi it}{N}\right) + b_i \sin\left(\frac{2\pi it}{N}\right) \right),$$

kus kordajad on arvutatud järgmiselt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t, \\ a_i &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N z_t \cos\left(\frac{2\pi it}{N}\right), \quad b_i = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N z_t \sin\left(\frac{2\pi it}{N}\right), \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ a_{N/2} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (-1)^t z_t, \quad b_{N/2} = 0. \end{aligned}$$

Periodogrammi väärtusteks on sel juhul

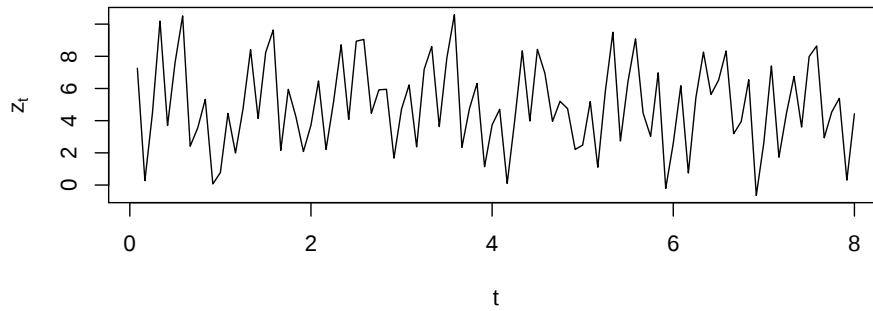
$$I(i/N) = \frac{N}{2}(a_i^2 + b_i^2), \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad I\left(\frac{1}{2}\right) = N a_{N/2}^2.$$

Kui a_i ja b_i definitsioonis asendada suurus $\frac{i}{N}$ arvuga f , $0 < f \leq \frac{1}{2}$, siis aegrea **spektri**ks nimetatakse suurust

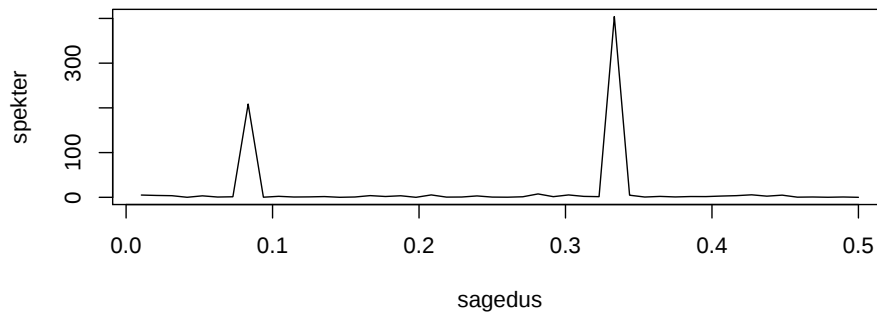
$$I(f) = \frac{N}{2}(a_f^2 + b_f^2).$$

Spektri suur väärtus mingi f korral näitab, et andmestikus on oluliselt esindatud perioodiline komponent perioodiga $\frac{1}{f}$. Samas, kui andmed vastavad sõltumatutele juhuslikele suurustele, siis on tegemist nn valge müraga ning spektris peaks kõik sagedused olema üsna võrdselt esitatud. Nende omaduste baasil on loodud mitmeid teste perioodilise komponendi olemasolu kindlakstegemiseks ning samuti juhuslikkuse kindlakstegemiseks.

Vaatleme näitena joonisel 3.2 toodud aegrida. Visuaalselt on selle käitumise kohta raske midagi öelda. Leides aga periodogrammi väärtused ning kujutades neid graafiliselt, saame



Joonis 3.2: Aegrida spektri kasutamise näite jaoks



Joonis 3.3: Näiteaegrea spekter

joonisel 3.3 kujutatud graafiku. Siit paistab, et andmetes on olulisel määral esindatud kaks sagedust (üks alla 0.1 ja teine umbes 0.33). Kui uurida andmeid täpsemalt, siis vastavad sagedused on $\frac{1}{12}$ ja $\frac{1}{3}$. Kui tegemist on näiteks igakuiste andmetega, siis see vastab aastasele perioodile ja kvartaalsele (kolmekuulisele) perioodile. Tegelikuses oli aga vastav aegrida genereeritud kujul

$$z_t = 5 + 3 \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + a_t,$$

kus a_t vastasid standardse normaaljaotusega juhuslike suuruste väärtustele. Seega võib öelda, et spektri uurimisega oli võimalik tuvastada andmetes peituvat signaali omadusi.

Käesolevas kursuses me aga spektri ja periodogrammi kasutamist aegrea mudelite sobivuse kindlakstegemiseks ei kasuta.

Peatükk 4

Lineaarsed mudelid ühemõõtmelise aegrea jaoks

Käesolevas peatükis vaatleme selliseid aegrea mudeleid, kus aegrea hetkeväärtus avaldub lineaarse kombinatsioonina selle minevikuväärtustest ning juhusliku häirituse hetkeväärtusest ja minevikuväärtustest. Selliseid mudeleid nimetatakse lineaarseteks mudeliteks. Kuna lõpliku hulga andmete põhjal on võimalik leida ainult lõplik arv mudeli parameetreid, siis pakuvad erilist huvi sellised protsessid, mis on kirjeldatavad lõpliku arvu parameetrite abil.

4.1 Üldine lineaarne protsess, selle esitused, statsionaarsus ja pööratavus

On küllalt loomulik, et enamiku huvipakkuvate juhuslike protsesside korral hetkeväärtus sõltub väga vähe selle protsessi kauge mineviku väärtustest ning seega võib öelda, et hetkeväärtus on sisuliselt määratud ainult juhuslikest häiritustest, mis minevikus on toimunud. Matemaatiliselt on kõige lihtsam uurida selliseid protsesse, kus sõltuvus häiritustest on lineaarne. Anname sellele kirjeldusele matemaatiliselt korrektse definitsiooni.

Definitsioon 6 *Üldiseks lineaarseks protsessiks nimetatakse protsesse, mis on esitatavad kujul*

$$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu = A_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i A_{t-i}, \quad (4.1)$$

kus ψ_i on mingid reaalarvud, μ on suuruste Z_t keskvärtus ning $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ on vähemalt teist järku statsionaarne tsentreeritud ning mittekorreleeritud väärtustega protsess.

Eelnevat definitsiooni motoveerib järgmine tulemus, mida nimetatakse Woldi lahutuseks.

Teoreem 7 (Woldi lahutus, vt. [7]) *Iga statsionaarne protsess Z_t on esitatav kujul*

$$Z_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi_{t-i} + \eta_t,$$

kus ξ_t on mittekorreleeritud protsess ning η_t on deterministlik protsess.

Nii et üldised lineaarsed protsessid on sellised statsionaarsed protsessid, mille Woldi lahutuses on suurused ξ_t sõltumatud (või vähemalt teist järku statsionaarsed) ja mille deterministlik osa on konstatne.

Käesolevas peatükis eeldame, et A_t on sõltumatud ja sama jaotusega juhuslikud suurused keskväärtusega 0 ja standardhälbega σ_A . Selleks, et toodud lõpmatu summa defineeriks korrektselt juhusliku suuruse, peavad kordajad ψ_i rahuldama mingeid tingimusi. Täpsemalt, selleks piisab (vt [7], Teoreem 7.6.1), kui kehtib

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2 < \infty.$$

Harjutus 12 (*, lisapunktide saamiseks esitada kuni 24.10.2011) Näidata, et kui protsess A_t on nullkeskmisega (tsentreeritud), konstantse dispersiooniga ning mittekorreleeritud (st $E(A_t A_{t+p}) = 0 \ \forall p \neq 0$), siis eelneva tingimuse täidetuse korral on protsess Z_t nõrgalt teist järku statsionaarne protsess.

Aegridade mudelite esitamisel ja uurimisel on kasulik tuua sisse mõned tähistused. Esiteks, defineerime tagasi- ja edasinihke operaatorid

$$BZ_t = Z_{t-1}, \quad FZ_t = Z_{t+1} \quad \forall t.$$

Tehniline märkus. Matemaatiliselt korrektne protseduur on järgmine: vaatleme protsesside ruumi $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ normiga $\|(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}\| = \sup_{t \in \mathbb{Z}} EZ_t^2$. Operaator B teisendab siis ühe selle ruumi elemendi (protsessi) teiseks (kusjuures tegelikult oleks õige kirjutada $(BZ)_t = Z_{t-1}$, st B teisendab protsessi Z uueks protsessiks, mille t -s element on esialgse protsessi väärtus kohal $t-1$) ning $\|B\| = 1$.

Paneme tähele, et $F = B^{-1}$ ning $B^j Z_t = Z_{t-j}$. Seega üldine lineaarne protsess on esitatav kujul

$$\tilde{Z}_t = (1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i) A_t.$$

Edaspidises on meil kasulik defineerida funktsioonid operaatorist B .

Definitsioon 8 Olgu f mingi reaalarvuliste väärtustega reaalmuutuva funktsioon, mis on esitatav punkti 0 ümbruses koonduva astmereana, st

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \quad |x| \leq \delta$$

mingi $\delta > 0$. Olgu M mingi pidev lineaarne operaator mingil Banachi ruumil Y . Siis $f(M)$ tähistab (formaalselt) operaatorit

$$f(M) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i M^i.$$

Lihtne on näidata, et kui $\|M\| \leq \delta$, siis eelnevalt toodud formaalne definitsioon omab mõtet, st see summa koondub mingiks ruumil Y tegutsevaks pidevaks lineaarseks operaatoriks.

Defineerime funktsiooni

$$\psi(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i x^i,$$

siis eelneva definitsiooni kohaselt võime üldise lineaarse protsessi kirjutada kujul

$$\tilde{Z}_t = \psi(B) A_t.$$

Siin tekib huvitav küsimus: millal me saame protsessi Z väärtusi teades teha kindlaks, millised häiritused A süsteemi on saabunud. Täpsemalt, defineerime mainitud omaduse matemaatiliselt.

Definitsioon 9 Üldist lineaarset protsessi (4.1) nimetatakse pööratavaks, kui selle protsessi saab esitada autoregressiivsel kujul

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t.$$

Osutub, et pööratavuse jaoks saab anda üsna lihtsa piisava tingimuse.

Lemma 10 Kui $\psi(x)$ astmerida koondub $|x| \leq 1$ korral ning funktsioon $\pi(x) = \frac{1}{\psi(x)}$ on esitatav astmereana, mis samuti koondub $|x| \leq 1$ korral, siis on üldine lineaarne protsess (4.1) pööratav ning kehtib võrdus

$$\pi(B)\tilde{Z}_t = A_t,$$

kus $\tilde{Z}_t$ on protsess (4.1).

Olgu funktsiooni $\pi(x)$ astmereaks

$$\pi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x^i,$$

siis pööratav üldine lineaarne protsess on esitatav ka kujul

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t.$$

Näide 11 Vaatleme protsessi

$$Z_t = A_t - \theta_1 A_{t-1},$$

kus $|\theta_1| < 1$. Sel juhul geomeetrilise rea summa valemi kohaselt

$$\pi(x) = \frac{1}{1 - \theta_1 x} = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^i x^i, \quad |x| < \frac{1}{|\theta_1|}.$$

Seega kehtib võrdus

$$Z_t = - \sum_{i=1}^{\infty} \theta_1^i Z_{t-i} + A_t.$$

Kui näiteks $\theta_1 = -0.2$, siis kahanevad suure nihkega Z väärtuste kordajad väga kiiresti nulli ning seetõttu on lõplike andmemehtude juures praktika seisukohalt peaaegu võimatu teha kindlaks, kas andmed vastavad mudelile

$$Z_t = A_t + 0.2A_{t-1}$$

või hoopis mudelile

$$Z_t = 0.2Z_{t-1} - 0.04Z_{t-2} + A_t.$$

Sellises situatsioonis eelistame tulevikus kindlasti esimest mudelit, sest selle sobitamisel andmetega tuleb leida ainult üks tundmatu parameeter (θ_1) teise mudeli kahe parameetri asemel.

Harjutus 13 Näidata, et üldise lineaarse protsessi autokovariatsioonid on antud valemiga

$$\gamma_k = \sigma_A^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}.$$

4.1.1 Lõpliku arvu parameetritega määratud lineaarsete protsesside klassid

Praktiliseks kasutamiseks on väga oluline, et aegrea mudelis oleks lõplik (ja võimalikult väike) arv parameetreid, mida andmete põhjal on vaja hinnata. Seetõttu pakuvad erilist huvi järgmised protsesside klassid.

Definitsioon 12 *Eeldame, et juhuslikud suurused A_t , $t \in \mathbb{Z}$ on tsentreeritud sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused. Olgu μ mingi reaalarv. Kasutame tähistust $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$. Lõpliku arvu kordajatega lineaarsete protsesside klassid on järgmised:*

- Järguga p autoregressiivseteks protsessideks ehk $AR(p)$ protsessideks nimetatakse protsesse kujul

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t.$$

Kui defineerida funktsioon

$$\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i x^i,$$

siis see protsess on esitatav kujul

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = A_t.$$

- Järku q liikuva keskmisega protsessideks ehk $MA(q)$ protsessideks nimetatakse protsesse kujul

$$\tilde{Z}_t = A_t - \sum_{i=1}^q \theta_i A_{t-i}.$$

Kui defineerida funktsioon

$$\theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i x^i,$$

siis see protsess on esitatav kujul

$$\tilde{Z}_t = \theta(B)A_t.$$

- $ARMA(p, q)$ protsessideks nimetatakse protsesse kujul

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^q \theta_i A_{t-i}.$$

Eelnevaid tähiseid kasutades võib sellise protsessi kirja panna kujul

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = \theta(B)A_t.$$

Saab näidata, et kui eelnevalt defineeritud protsessid on statsionaarsed, siis definitsioonis kasutatud parameeter μ on juhuslike suuruste Z_t keskväärtuseks.

Edaspidi uurime nende protsesside omadusi lähemalt.

4.1.2 Osautokorrelatsioonid

Lisaks autokorrelatsioonidele on etteantud aegreale sobiva mudeli valikul suureks abiks osautokorrelatsioonid. Defineerime selle mõiste. Selleks aga on eelnevalt vaja veel ühte mõistet.

Definitsioon 13 Olgu X ning $Y_1, \dots, Y_k$ ningid lõpliku dispersiooniga juhuslikud suurused. Suuruse X projektsiooniks suurustega $Y_1, \dots, Y_k$ määratud alamruumile nimetatakse suurust kujul

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^k c_i Y_i,$$

mille korral $E((X - \bar{X})^2)$ on minimaalne. Operaatorit $P : X \rightarrow \bar{X}$ nimetatakse vähimruutude projektoriks suurustega $Y_1, \dots, Y_k$ määratud alamruumile.

Eelnev definitsioon kasutab Hilberti ruumide teooriast pärinevat teadmist, et selline projektsioon on üheselt defineeritud. Juhuslike suuruste kontekstis vastab eelnevalt defineeritud projektor juhusliku suuruse X parimale suuruste $Y_1, \dots, Y_k$ lineaarkombinatsiooni kujul avalduvale prognoosile.

Harjutus 14 Näidata, et kui $X, Y_1, \dots, Y_k$ on keskväärtusega 0 ja $\bar{X}$ on suuruse X vähimruutude projektsioon suurustega $Y_1, \dots, Y_k$ määratud ruumile, siis $E(\bar{X}) = 0$ ning $\text{cov}(X - \bar{X}, Y_i) = 0 \forall i$.

Paneme tähele, et eelneva harjutuse põhjal saab suuruse X projektsiooni leida kordajate c_i , $i = 1, \dots, k$ leidmise teel võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^k c_j \text{cov}(Y_i, Y_j) = \text{cov}(Y_i, X), \quad i = 1, \dots, k.$$

Juhul, kui sellel süsteemil on mitu lahendit, siis võib võtta suvalise nendest, kuna saab näidata, et $\bar{X} = \sum_{i=1}^k c_i Y_i$ on sel juhul kõikide lahendite korral sama.

Definitsioon 14 Juhuslike suuruste X_1 ja X_2 osakorrelatsiooniks pärast suuruste $Y_1, \dots, Y_k$ mõju eemaldamist nimetatakse suuruste $X_1 - PX_1$ ja $X_2 - PX_2$ vahelist korrelatsiooni, kus P on vähimruutude projektor suurustega $Y_1, \dots, Y_k$ määratud alamruumile.

Tuletame meelde, et statsionaarse protsessi Z korral tähistab $\tilde{Z}$ vastavat tsentreeritud protsessi, st $\tilde{Z}_t = Z_t - EZ_t = Z_t - \mu$.

Definitsioon 15 Statsionaarse protsessi Z k -ndat järku osautokorrelatsioonikordajaks nimetatakse suuruste $\tilde{Z}_t$ ja $\tilde{Z}_{t-k}$ osakorrelatsiooni pärast suuruste $\tilde{Z}_{t-1}, \dots, \tilde{Z}_{t-(k-1)}$ mõju eemaldamist.

Definitsioonis järeldeb, et protsessi Z esimest järku osautokorrelatsioon on võrdne suurusega ρ_1 .

Harjutus 15 Leida statsionaarse protsessi teist järku osakorrelatsiooni avaldis autokorrelatsioonide kaudu.

4.2 Autoregressiivsed protsessid

Uurime lähemalt protsessi

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

omadusi. Nagu näeme, on selle protsessi käitumine seotud polünoomi

$$\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i x^i$$

nullkohtadega.

4.2.1 Autokorrelatsioonifunktsioon ja statsionaarsus

Oletame kõigepealt, et protsess $\tilde{Z}$ on statsionaarne. Korrutades võrrandi (4.2) mõlemad pooli suurusega $\tilde{Z}_{t-k}$ ning võttes keskväärtuse, saame

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{k-i}, \quad k > 0$$

kust pärast suurusega γ_0 läbijagamist saame võrduse

$$\rho_k = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{k-i}, \quad k > 0.$$

See tähendab, et autokorrelatsioonikordajad rahuldavad p -ndat järku lineaarset rekurrentset võrrandit. Selliste võrrandite kohta on teada, et mingite kordajate $c_i, i = 1, \dots, p$ kehtib

$$\rho_k = \sum_{i=1}^p c_i d_{ik},$$

kus jaldad $d_{ik}, k = 1, 2, \dots$ on defineeritud funktsiooni $\phi(x)$ juurte abil järgmiselt: kui x_j on funktsiooni ϕ m -kordne nullkoht (komplekstasandil), siis m jadadest c_{ik} on kujul $k^\ell x_j^{-k}, 0 \leq \ell \leq m-1$. Sellest esitusest järeldub, et AR(p) protsesside korral on lõpmatult paljud suurustest ρ_k nullist erinevad. Lisaks sellele, autokorrelatsioonikordajad $\rho_1, \dots, \rho_p$ ei ole suvalised, vaid rahuldavad nn. Yule-Walker võrrandeid

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1}, \quad (4.3)$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2}, \quad (4.4)$$

$$\dots \quad (4.5)$$

$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \quad (4.6)$$

mistõttu on kordajad $c_1, \dots, c_p$ üheselt määratud. Samas autokorrelatsioonikordajad peavad definitsiooni kohaselt olema vahemikus $[-1, 1]$, mistõttu statsionaarsuse eeldus ei saa olla täidetud, kui mõni polünoomi ϕ nullkohtadest on mooduli poolest ühest väiksem ja vastav kordaja autokorrelatsioonide esituses nullkohtade kaudu on nullist erinev. Kui aga polünoomi ϕ kõik nullkohad komplekstasandil on mooduli poolest suuremad kui 1, siis on $\psi(x) = \frac{1}{\phi(x)}$ esitatav ühikringis koonduva astmereana ning seega on ka operaator $\phi(B)$ pööratav ja vastav protsess statsionaarne. Selle väite kehtivuses võib veenduda mitmel

moel. Üheks võimaluseks on kasutada kompleksmuutuja funktsioonide teooriat: Cauchy valemi kohaselt kehtib

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi|=r} \frac{\psi(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad |z| < r,$$

kus r on ühest suurem arv, mille korral kõik ϕ nullkohad jäävad väljapoole komplekstasandi ringri raadiusega r ning integreerimine toimub üle komplekstasandi ühikringi. Siit valemist järeldub (kuidas?), et $|\psi^k(0)| \leq \text{const. } k!r^{-k}$, mistõttu vastav Taylory rida koonduv ringis raadiusega r , seega ka ühikringis. Teiseks võimaluseks on esitada ψ nullkohtade abil määratud osamurdude summana:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(x_i - x)^j},$$

kus $x_1, \dots, x_k$ on polünoomi ϕ nullkohad (komplekstasandil) ning $m_1, \dots, m_k$ on nende nullkohtade kordsused. Kuna

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x_i - x)^j} &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{d}{dx^{j-1}} \left(\frac{1}{x_i - x} \right) \\ &= \frac{1}{x_i (j-1)!} \frac{d}{dx^{j-1}} \left(\frac{1}{1 - x_i^{-1}x} \right) = \frac{1}{x_i (j-1)!} \frac{d}{dx^{j-1}} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x_i^{-\ell} x^{\ell} \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell!}{(j-1)!(\ell-j+1)!} x_i^{-\ell-j} x^{\ell}, \end{aligned}$$

siis kõikidele osamurdudele vastavad astmerealad koonduvad ühikringis ning seega ka $\psi(x)$ astmerida (kui koonduvate astmeridade summa) koondub ühikringis.

Viimast lähenemist saab kasutada ka autoregressiivsel kujul oleva protsessi esitamisel üldise lineaarse protsessina. Selleks

1. Leiame funktsiooni $\psi(x) = \frac{1}{\phi(x)}$ esituse osamurdudena (st leiame vastavad kordajad c_{ij}).
2. Esitame iga liidetava astmerea kujul.
3. Leiame astmeridade summa. Selle summa x^{ℓ} kordaja on ψ_{ℓ} vaadeldava rea esituses üldise lineaarse protsessina.

Samas, kui meil ei ole vaja leida kordajate ψ_{ℓ} üldkuju, vaid ainult fikseeritud arvu esimeste kordajate väärtusi, siis võib leida need ka seosest

$$\phi(x) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i x^i \right) = 1,$$

kirjutades välja vasaku poole erinevate x astmete kordajad ning võrdsustedes parema pool (st praegusel juhul konstantse polünoomi 1) kordajatega. Näiteks x kordajast saame

$$-\phi_1 + \psi_1 = 0,$$

x^2 kordajast saame

$$-\phi_2 - \phi_1 \psi_1 + \psi_2 = 0$$

jne. Neid seoseid rakendades saab lihtsalt leida suvalise lõpliku arvu kordajaid.

Harjutus 16 Leida protsessi

$$\tilde{Z}_t = 1.2\tilde{Z}_{t-1} - 0.35\tilde{Z}_{t-2} + A_t$$

esitus üldise lineaarse protsessi kujul (st, leida suurused ψ_i , $i = 1, 2, \dots$). Kontrollimiseks leida esimesed neli kordajat ka alternatiivsel teel (korrutise $\phi(x)\psi(x)$ muutuja x astmete abil saadud seoseid kasutades).

Juht, kus mõni funktsiooni ϕ nullkohtadest on mooduli poolest võrdne ühega, vajab eraldi uurimist, kuid selle käsitlemine on käesoleva kursuse mahtu arvestades ebaotstarbekas. Käesolevas kursuses kasutame teadmist, et statsionaaruse jaoks on tarvilik ja piisav, et funktsiooni ϕ nullkohad on kõik mooduli poolest ühest suuremad.

4.2.2 Osautokorrelatsioonid

AR(p) protsesside korral on sobiva mudeli kindlakstegemisel suur kasu järgmisest tulemustest.

Lemma 16 Olgu Z statsionaarne $AR(p)$ protsess. Siis tema osautokorrelatsioonikordajad on võrdsed nulliga alates järgust $p + 1$.

Tõestus. Olgu $k > p$. Olgu P vähimruutude projektor suurustega $\tilde{Z}_{t-1}, \dots, \tilde{Z}_{t-k+1}$ määratud alamruumile. Kuna A_t on sõltumatu suurustest $\tilde{Z}_{t-1}, \dots, \tilde{Z}_{t-k+1}$, siis on lihtne veenduda, et $A_t = \tilde{Z}_t - P\tilde{Z}_t$. Selleks näitame, et

$$P\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{Z}_{t-i}.$$

P definitsiooni kohaselt peame me selleks näitama, et

$$E[(\tilde{Z}_t - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \tilde{Z}_{t-i})^2] \geq E[(\tilde{Z}_t - \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{Z}_{t-i})^2]$$

kõikide kordajate $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ korral.

Tähistame kirjapaneku lihtsusamise huvides

$$X = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \tilde{Z}_{t-i}, \quad Y = \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{Z}_{t-i},$$

siis kasutades suuruse A_t tsentreeritust ning sõltumatust suurustest X ja Y saame

$$E[(\tilde{Z}_t - X)^2] = E[(A_t - Y - X)^2] = E[A_t^2] - 2E[A_t(X+Y)] + E[(X+Y)^2] = E[A_t^2] + E[(X+Y)^2] \geq E[A_t^2].$$

Samas

$$E[(\tilde{Z}_t - Y)^2] = E[A_t^2],$$

seetõttu on suurus Y tõepoolest võrdne suuruse $\tilde{Z}_t$ projektsiooniks vähimruutude mõttes.

Kasutades jällegi suuruse A_t sõltumatust varasematest protsessi Z väärtustest saame nüüd

$$\text{cov}(\tilde{Z}_t - P\tilde{Z}_t, \tilde{Z}_{t-k} - P\tilde{Z}_{t-k}) = \text{cov}(A_t, \tilde{Z}_{t-k} - P\tilde{Z}_{t-k}) = 0.$$

Osautokorrelatsioonikordaja definitsiooni kohaselt on seega protsessi $\tilde{Z}$ k -ndat järku osautokorrelatsioonikordaja võrdne nulliga. $\square$

Osautokorrelatsioonikordaja definitsioonist lähtuvalt on võimalik näidata, et k -ndat järku osautokorrelatsioonikordaja ϕ_{kk} on teadaolevate autokorrelatsioonide põhjal leitav Yule-Walkeri võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}\phi_{k1} + \rho_1\phi_{k2} + \dots + \rho_{k-1}\phi_{kk} &= \rho_1, \\ \rho_1\phi_{k1} + \phi_{k2} + \dots + \rho_{k-2}\phi_{kk} &= \rho_2, \\ &\dots \\ \rho_{k-1}\phi_{k1} + \rho_{k-2}\phi_{k2} + \dots + \phi_{kk} &= \rho_k,\end{aligned}$$

lahendamise teel. Neid seoseid võib kasutada osautokorrelatsioonide hindamiseks, asendades võrrandites teoreetilised autokorrelatsioonid nende hinnangutega. Praktikas on samuti kasulik teadmine (vt [8], valem 3.2.35), et AR(p) protsessi korral on osautokorrelatsioonikordajate hinnangud alates järgust $k = p + 1$ ligikaudu sõltumatud, keskvärtusega 0 ning standardhällbega $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Harjutus 17 (*, lisapunktide saamiseks esitada 13.11.2011) Näidata osautokorrelatsiooni definitsioonist lähtudes, et k -ndat järku osautokorrelatsioon on avaldub suurusena ϕ_{kk} Yule-Walker võrrandites.

4.2.3 AR(1) tüüpi mudelid

Vaatleme mudeleid kujul

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + A_t.$$

Kuna selle mudeli korral $\phi(x) = 1 - \phi_1 x$, mille ainsaks nullkohaks on $x_1 = \frac{1}{\phi_1}$, siis statsionaarsuse jaoks on vajalik tingimuse $|\phi_1| < 1$ täidetud. Kuna autokorrelatsioonid rahuldavad eelneva põhjal seost

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}, \quad k > 0,$$

siis

$$\rho_k = \phi_1^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

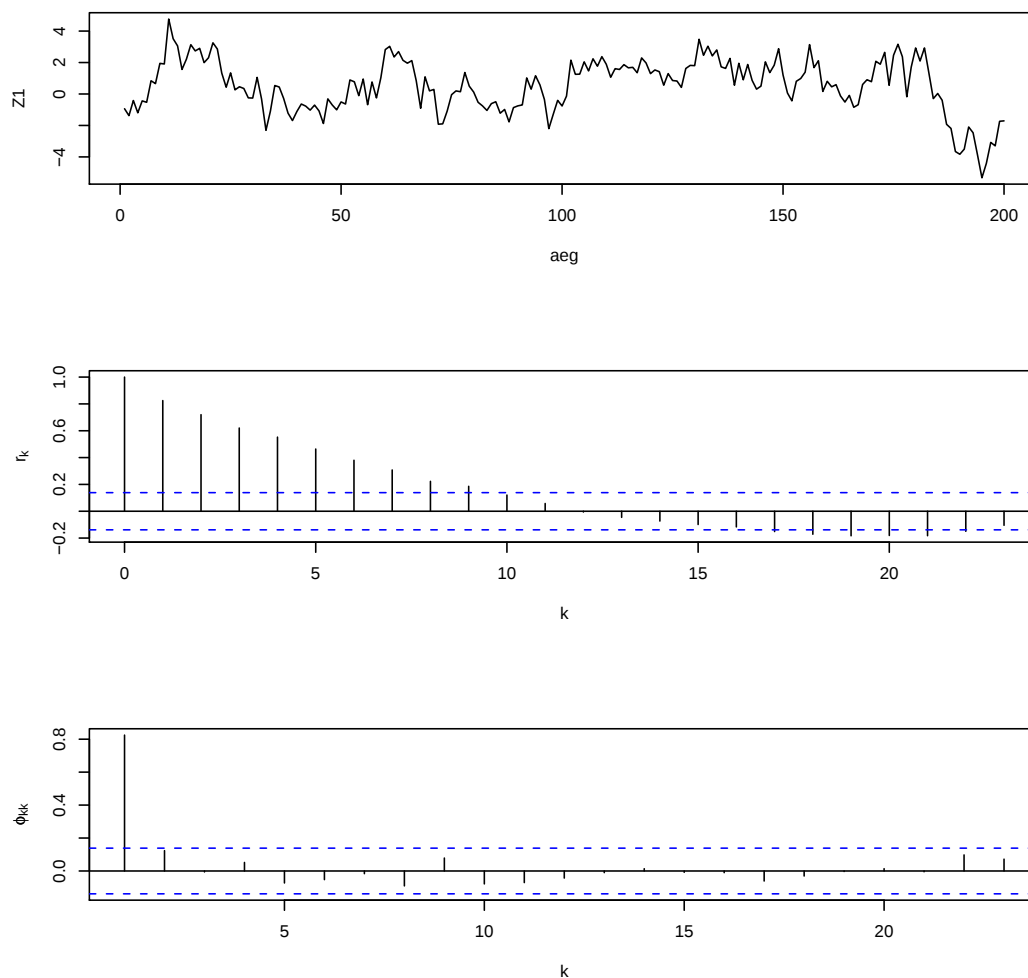
Seega kahanevad autokorrelatsioonide absoluutväärtused eksponentsiaalselt, kusjuures juhul $\phi_1 > 0$ on nad sama märgiga ning juhul $\phi_1 < 0$ vahelduvate märkidega. Osautokorrelatsioonid on alates järgust 2 võrdsed nulliga ning esimest järku osautokorrelatsioon on (nagu alati) võrdne ρ_1 -ga. Näited vastavate aegridade käitumisest koos empiiriliste autokorrelatsioonide ja empiiriliste osautokorrelatsioonidega juhul $\phi_1 = 0.8$ ja $\phi_1 = -0.8$ on toodud vastavalt joonistel 4.1 ja 4.2.

4.2.4 AR(2) tüüpi mudelid

Vaatleme mudeleid kujul

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + A_t.$$

Selleks, et funktsiooni $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$ nullkohad oleks väljaspool komplekstasandi ühikringi, peavad kordajad ϕ_1 ja ϕ_2 rahuldama geomeetriliselt küllaltki lihtsalt kirjeldatavaid tingimusi.



Joonis 4.1: AR(1) tüüpi aegrea 200 väärtust juhul $\phi_1 = 0.8$ ning autokorrelatsioonide ja osaaautokorrelatsioonide hinnangud

Harjutus 18 (*, lisapunktide saamiseks esitada 13.11.2011) Näidata, et statsionaarsuse tingimus on samaväärne võrratustega

$$\begin{aligned}\phi_1 + \phi_2 &< 1, \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1, \\ \phi_2 &> -1,\end{aligned}$$

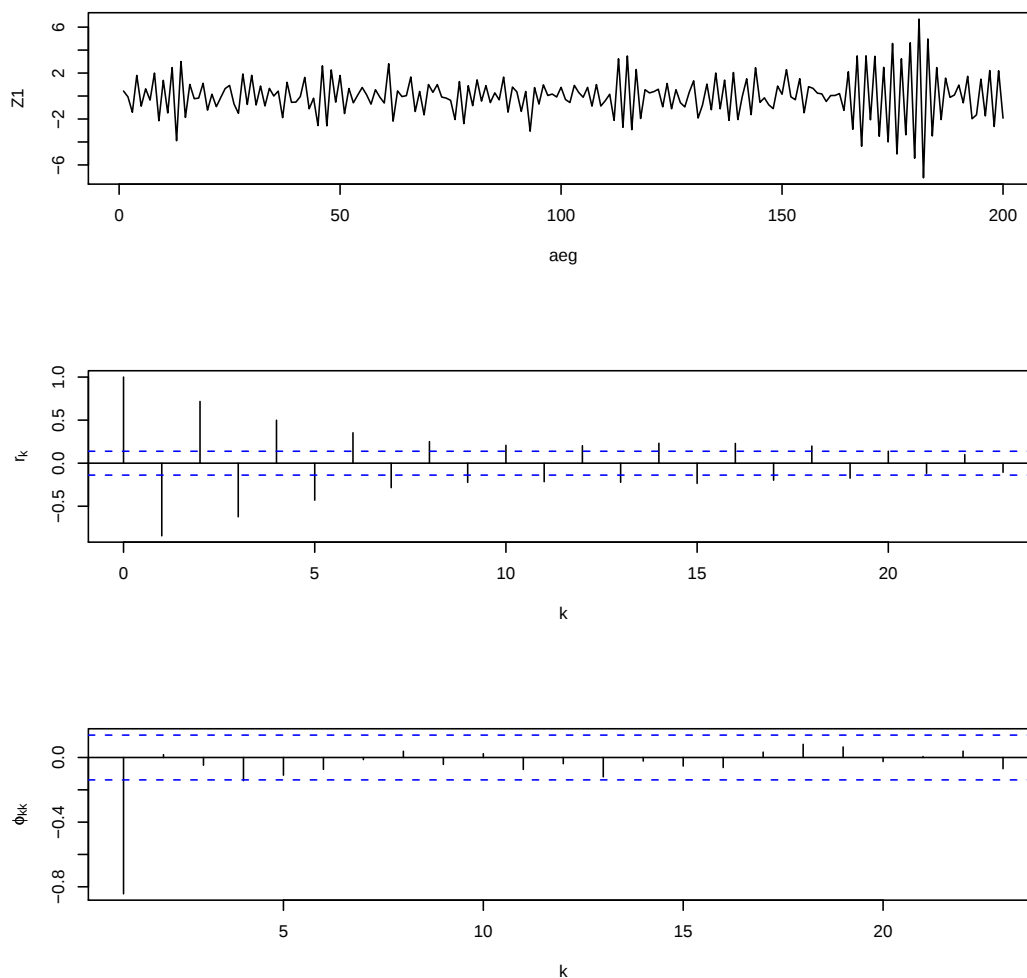
st punkti (ϕ_1, ϕ_2) peab paiknema tippudega $(0,1)$, $(-2,-1)$ ja $(2,-1)$ määratud kolmnurgas.

Autokorrelatsioonikordajad saab arvutada vastavalt rekurrentsele seosele

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k > 1,$$

lähitudes väärtustest $\rho_0 = 1$ ja $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$. Viimane tuleneb Yule-Walkeri esimesest võrrandist:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1.$$



Joonis 4.2: AR(1) tüüpi aegrea 200 väärtust juhul $\phi_1 = -0.8$ ning autokorrelatsioonide ja osautokorrelatsioonide hinnangud

Lahendades Yule-Walkeri võrrandid ϕ_1 ja ϕ_2 suhtes, saame

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2}, \quad \phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2},$$

mille abil on võimalik empiirilistest autokorrelatsioonidest r_1 ja r_2 arvutada kordajate ϕ_1 ja ϕ_2 hinnangud.

Teoreetilised osautokorrelatsioonid on nullid alates järgust 3, esimest järku osautokorrelatsioon ϕ_{11} on võrdne ρ_1 -ga ning teist järku osautokorrelatsioon on võrdne kordajaga ϕ_2 (miks?), seega on võimalik kordajaid hinnata ka osautokorrelatsioonide hinnangute abil.

4.3 Liikuv keskmise protsessid

Järgnevas vaatleme MA(q) protsesside

$$\tilde{Z}_t = A_t - \sum_{i=1}^q \theta_i A_{t-i}$$

omadusi. Varasemast teame, et sellised protsessid (sõltumatute ja sama jaotusega juhuslike suuruste A_t korral) on alati statsionaarsed.

4.3.1 Autokorrelatsioonid ja pööratavuse tingimused

Arvestades, et üldise lineaarse protsessi korral

$$\gamma_k = \sigma_A^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$$

ning et MA(q) protsessi korral

$$\psi_0 = 1; \psi_i = -\theta_i, \quad i = 1, \dots, q; \psi_k = 0, \quad k > q$$

saame, et MA(q) protsessi autokorrelatsioonikordajad avalduvad kujul

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{p-k} \theta_i \theta_{i+k}}{1 + \sum_{i=1}^q \theta_i^2}, \quad k = 1, \dots, q$$

ning $\rho_k = 0$, $k > q$. Nagu me ka hiljem näeme, on MA(q) protsesside korral võimalik, et täpselt samad autokorrelatsioonid (ja seega ka osautokorrelatsioonid) vastavad erinevatele parameetritele $\theta_1, \dots, \theta_q$. Osutub aga, et ainult üks parameetrite θ valik vastab pööratavale protsessile ning aegrea vaatluste põhjal saame parima tuleviku prognoosi, kasutades pööratavat mudelit.

Varasema põhjal teame, et pööratavuseks on vajalik, et polünoomi $\theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i x^i$ nullkohad oleks kõik mooduli poolest ühest suuremad, kuna sel juhul on funktsioon $\pi(x) = \frac{1}{\theta(x)}$ avaldatav astmereana, mis koondub $|x| \leq 1$ korral.

4.3.2 MA(1) protsessi omadused.

Vaatleme protsessi kujul

$$\tilde{Z}_t = A_t - \theta_1 A_{t-1}.$$

Selle protsessi korral

$$\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

ning $\rho_k = 0$, $k > 1$. Kuna me saame ρ_1 avaldise kirjutada (juhul $\rho_1 \neq 0$) ka kujul

$$\rho_1 = -\frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \theta_1},$$

siis on selge, et täpselt samasugused autokorrelatsioonid on ka protsessil

$$\tilde{Z}_t = A_t - \frac{1}{\theta_1} A_{t-1}.$$

Samas, kui $|\theta_1| > 1$, siis võime defineerida suurused $\bar{A}_t$ kujul

$$\bar{A}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^{-i} \tilde{Z}_{t-i},$$

mille korral kehtib

$$\tilde{Z}_t = \bar{A}_t - \frac{1}{\theta_1} \bar{A}_{t-1}.$$

Kuna suurused $\bar{A}_t$ on tsentreeritud, mittekorreleeritud ning konstantse dispersiooniga (vt järgnev harjutus), siis võime ilma üldsust kitsendamata eeldada, et vaadeldava protsessi korral on kordaja θ_1 absoluutväärtuselt ühest väiksem ning et tegemist on pööratava protsessiga.

Harjutus 19 Veenduda, et juhul $|\theta_1| > 1$ defineeritud juhuslikud suurused $\bar{A}_t$ on mittekorreleeritud ning konstantse dispersiooniga (seega tegemist on vähemalt teist järku nõrgalt statsionaarse protsessiga).

Harjutus 20 Näidata, et juhul $|\theta_1| \neq 1$ kehtib võrratus $|\rho_1| < \frac{1}{2}$.

Osautokorrelatsioonide leidmiseks paneme tähele, et vaadeldaval juhul tuleb Yule-Walker võrrandisüsteemi kohaselt leida kolmediagonaalse võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \phi_{k1} + \rho_1 \phi_{k2} &= \rho_1, \\ \rho_1 \phi_{k1} + \phi_{k2} + \rho_1 \phi_{k3} &= 0, \\ &\dots \\ \rho_1 \phi_{k,k-2} + \phi_{k,k-1} + \rho_1 \phi_{kk} &= 0, \\ \rho_1 \phi_{k,k-1} + \phi_{kk} &= 0 \end{aligned}$$

puhul suuruse ϕ_{kk} väärtus. Kui siit elimineerida teisest võrrandist esimese võrrandi abil tundmatu ϕ_{k1} , kolmandast võrrandist saadud teise võrrandi abil ϕ_{k2} jne, siis jõame kahe-diagonaalse süsteemini

$$\begin{aligned} b_1 \phi_{k1} + \rho_1 \phi_{k2} &= f_1, \\ b_2 \phi_{k2} + \rho_1 \phi_{k3} &= f_2, \\ &\dots \\ b_{k-1} \phi_{k,k-1} + \rho_1 \phi_{kk} &= f_{k-1}, \\ b_k \phi_{kk} &= f_k, \end{aligned}$$

kus $b_1 = 1$, $f_1 = \rho_1$ ning

$$b_{i+1} = 1 - \frac{\rho_1^2}{b_i}, \quad f_{i+1} = -\frac{\rho_1}{b_i} f_i, \quad i = 2, \dots, k.$$

Arvestades, et $|\rho_1| < \frac{1}{2}$ saame $b_i > \frac{1}{2} \forall i$ ning seega

$$|\phi_{kk}| = \frac{|f_k|}{b_k} \leq (2\rho_1)^k,$$

seega osautokorrelatsioonikordajad on küll kõik nullist erinevad, kuid kahanevad eksponentsiaalselt.

4.3.3 MA(2) protsessi omadused.

Vaatleme protsessi kujul

$$\tilde{Z}_t = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2}.$$

Selle protsessi korral

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2},$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

ning $\rho_k = 0$, $k > 2$. Küllalt lihtne on veenduda, et kui x_1, x_2 on polünoomi

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2$$

nullkohad, siis täpselt samad autokorrelatsioonikordajad on kõikidel MA(2) protsessidel, millele vastavate polünoomide nullkohad on kujul x_1^i, x_2^j , kus $i, j \in \{-1, 1\}$. Samas ainult üks nendest protsessidest rahuldab pööratavuse tingimust ning jällegi võime üldsust kitsendamata eeldada, et meid huvitav protsess rahuldab pööratavuse tingimust. Analoo- giliselt AR(2) protsesside statsionaaruse tingimustega saame nüüd, et pööratava MA(2) protsessi kordajad θ_1 ja θ_2 peavad rahuldama tingimusi

$$\theta_2 + \theta_1 < 1, \quad \theta_2 - \theta_1 < 1, \quad \theta_2 > -1.$$

4.4 ARMA(p,q) protsessid

Vaatleme protsesse kujul

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^q \theta_i A_{t-i}.$$

See protsess on statsionaarne, kui polünoomi $\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i x^i$ nullkohad on väljaspool komplekstasandi ühikringi ning pööratavuse tingimus on täidetud, kui polünoomi $\theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i x^i$ nullkohad on väljaspool komplekstasandi ühikringi. Arvutates kovariatsiooni $\tilde{Z}_t$ ja $\tilde{Z}_{t-k}$ vahel juhul $k > q$, saame

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{k-i},$$

mistõttu autokorrelatsioonikordajad ρ_k rahuldavad rekurrentset võrrandit

$$\rho_k = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{k-i}$$

alates $k = q + 1$.

4.5 ARMA(1,1) protsessid

Vaatleme protsesse kujul

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + A_t - \theta_1 A_{t-1}.$$

Leiame avaldised selle protsessi autokovariatsioonidele ja autokorrelatsioonidele. Kõigepealt paneme tähele, et

$$\text{cov}(\tilde{Z}_t, A_t) = \sigma_A^2.$$

Seejärel saame leida

$$\text{cov}(\tilde{Z}_t, A_{t-1}) = (\phi_1 - \theta_1)\sigma_A^2.$$

Leides nüüd kovariatsiooni $\tilde{Z}_t$ avaldise parema poole ja $\tilde{Z}_t$ vahel, saame

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + (1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1))\sigma_A^2$$

ning kovariatsioon $\tilde{Z}_t$ avaldise parema poole ja $\tilde{Z}_{t-1}$ vahel annab

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_A^2.$$

Siit saame

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{(1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2)\sigma_A^2}{1 - \phi_1^2}, \\ \gamma_1 &= \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \theta_1\phi_1)\sigma_A^2}{1 - \phi_1^2}\end{aligned}$$

ja seega

$$\rho_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \theta_1\phi_1)}{1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2}.$$

Kuna alates $k = 2$ kehtib

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1},$$

siis autokorrelatsioonid kahanevad eksponentsiaalselt alates järgust 2.

4.6 Lineaarsed mudelid mittestatsionaarsete aegridade jaoks. Proгноosimine ja parameetrite hindamine

4.6.1 ARIMA mudelid

Sageli ei vasta aegrida statsionaarsuse nõuetele, kuna keskmine on ajas muutuv, kuid selle rea muudud või muutude muudud käituvad kooskõlas statsionaarsuse eeldustega. Järgnevas vaatlemegi selliste protsesside mudeleid.

Kui Z_t , $t \in \mathbf{R}$ on mingi protsess, siis muutude protsessi $Z_t - Z_{t-1}$ võime kirjutada kujul $(1 - B)Z_t$ ning muutude muutude protsessi kujul $(1 - B)^2Z_t$.

Definitsioon 17 $ARIMA(p, d, q)$ protsessiks nimetatakse juhuslikku protsessi Z_t , mille d -ndat järku muudud (ehk diferentsid) $W_t = (1 - B)^d Z_t$ esituvad kujul

$$\tilde{W}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{W}_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^q \theta_i A_{t-i},$$

kus $\tilde{W}_t = W_t - E(W_t)$, juhuslikud suurused A_t on sõltumatud, sama jaotusega, tsentreeritud ning on sõltumatud ka suurustest $\tilde{W}_{t-i}$, $i = 1, 2, \dots$

Vaatleme juhtu $W_t = (1 - B)Z_t$, siis

$$Z_t = Z_{t-1} + W_t = Z_{t-2} + W_{t-1} + W_t = Z_{t-k} + \sum_{j=k+1}^t W_j.$$

Summa on aga vaadeldav tükiti konstantse funktsiooni integraalina. Üldisemalt, kui $W_t = (1 - B)^d Z_t$, siis tuleb Z leidmiseks protsessist W rakendada summeerimist d korda, mis on samastatav d -kordse integraali leidmisega. Seetõttu nimetataksegi ARIMA(p,d,q) protsessi integreeritud ARMA protsessideks.

Harjutus 21 Olgu antud suurused $c_i = (1 - B)^i Z_1$, $i = 0, \dots, d - 1$ ning protsessi $W_t = (1 - B)^d Z_t$ väärtused $w_2, \dots, w_n$. Avaldada Z_n väärtus z_n $c_0, \dots, c_{d-1}, w_2, \dots, w_n$ kaudu.

4.6.2 Aegridade prognoosimine ARIMA mudelite korral

Olgu meil antud aegrida $z_1, z_2, \dots, z_n$ ning oletame, et me teame, et see vastab ARIMA(p,d,q) tüüpi protsessile teadaolevate parameetritega μ (suuruse $(1 - B)^d Z_t$ keskvärtus), $\phi_1, \dots, \phi_p$ ja $\theta_1, \dots, \theta_q$, kusjuures eeldame, et protsess on pööratav ning et kaalud ϕ_i , $i = 1, \dots, p$ rahuldavad statsionaarsuse tingimust. Esituse lihtuse mõttes eeldame samuti, et $(1 - B)^d Z_t$ keskvärtus on null. Järgnevas uurime, kuidas sel juhul leida minimaalse ruutkeskmise veaga prognoose suurusele Z_{n+p} , $p \geq 1$ ning prognoosivigade standardhälbeid.

Edasises kasutame oluliselt aegrea erinevaid esitusi. Pööratavusest järeldub, et me saame vaadeldava ARIMA(p,d,q) protsessi esitada autoregressiivsel kujul

$$Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i Z_{t-i} + A_t,$$

kus kaalud π_i on määratavad võrdusest

$$1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x^i = \frac{\phi(x)(1 - x)^d}{\theta(x)},$$

kus

$$\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i x^i, \quad \theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i x^i.$$

Samuti teame, et statsionaarse protsessi saab esitada üldise lineaarse protsessi kujul, seega leidavad kordajad ψ_i , mille korral

$$(1 - B)^d Z_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i \right) A_t.$$

Kolmandaks esituseks on protsessi definitsioonis olev kuju, mis sisaldab lõpliku arvu eelnevaid Z ja A väärtuseid.

Harjutus 22 Esitada ARIMA(0,1,1) protsess

$$Z_t = Z_{t-1} + A_t - \frac{1}{2} A_{t-1}$$

autoregressiivsel kujul.

Autoregressiivse kuju kordajaid saab leida ka samm-sammult, võrdsustades seose

$$\pi(x)\theta(x) = \phi(x)$$

paremal ja vasakul pool x astmete ees olevaid kordajaid.

Harjutus 23 *Leida protsessi*

$$Z_t = A_t - 0.5A_{t-1} + 0.3A_{t-2}$$

autoregressiivse esituse kordaja π_4 .

Ruutkeskmise vea mõttes parima prognoosi leidmine

Kui juhusliku suuruse kohta ei ole mingit lisainformatsiooni, siis tema parimaks prognoosiks on keskväärtus.

Harjutus 24 *Olgu X lõplikku dispersiooni omav keskväärtusega μ juhuslik suurus ning olgu a prognoos selle juhusliku suuruse väärtuse jaoks. Näidata, et ennustusviga $E((X - a)^2)$ on minimaalne juhul, kui $a = \mu$.*

Kui juhusliku suuruse ennustamisel on kasutada mingit lisainformatsiooni, siis saab näidata, et parimaks ennustuseks selle informatsiooni põhjal on tinglik keskväärtus. Käesolevas kursuses me tingliku keskväärtuse üldist definitsiooni sisse ei too, küll aga kasutame teadaolevaid tulemusi selle omaduste kohta.

Lemma 18 *Olgu I mingi lõplik või loenduv indeksite hulk ning olgu Z ja Y_i , $i \in I$ juhuslikud suurused. Siis suuruse Z tinglik keskväärtus tingimusel, et Y_i , $i \in I$ on teada on juhuslik suurus $E(Z | Y_i, i \in I)$, mis rahuldab järgmisi omadusi:*

1. Kui Z on sõltumatu juhuslikest suurustest Y_i , $i \in I$, siis

$$E(Z | Y_i, i \in I) = EZ.$$

2. Kui $Z = \alpha Z_1 + \beta Z_2$, siis

$$E(Z | Y_i, i \in I) = \alpha E(Z_1 | Y_i, i \in I) + \beta E(Z_2 | Y_i, i \in I).$$

3. Kui $Z = Y_{i_0}$ mingi $i_0 \in I$ korral, siis

$$E(Z | Y_i, i \in I) = Z.$$

Üldisemalt, kui $Z = f(Y)$, kus $Y = (Y_i)_{i \in I}$, siis

$$E(Z | Y_i, i \in I) = Z.$$

Tingliku keskväärtuse korrektse definitsiooni ja omaduste tõestused võib leida näiteks raamatust [9]. Vastaku protsess Z ARIMA(p,d,q) mudelile, kusjuures järgnevas eeldame, et $E((1-B)^d Z_t) = 0$ ning samuti eeldame mudeli protsessi $W_t = (1-B)^d Z_t$ statsionaarust ja pööratavust. Tähistame

$$\hat{Z}_{\ell|k} = E(Z_\ell | Z_{k-i}, i = 0, 1, 2, \dots),$$

siis tingliku keskväärtuse omadustest järeldub

$$\hat{Z}_{\ell|k} = Z_\ell \text{ kui } \ell \leq k.$$

Kasutades protsessi esitust autoregressiivsel kujul ning teadmist, et $E(A_{k+j} | Z_{k-i}, i \geq 0) = 0$, saame juhul $\ell \geq 1$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{k+\ell|k} &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \hat{Z}_{k+\ell-i|k} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell-1} \pi_i \hat{Z}_{k+\ell-i|k} + \sum_{i=\ell}^{\infty} \pi_i Z_{k+\ell-i}. \end{aligned}$$

Pikemate prognooside arvutamisel saab seda valemit kasutada samm-sammult: kõigepealt arvutame $\hat{Z}_{k+1|k}$ ajaks k teadaolevate Z väärtuste abil, seejärel kasutame saadud tulemust $\hat{Z}_{k+2|k}$ arvutamiseks jne. Saadud tulemuse rakendamisel on aga kaks probleemi. Esiteks, tegemist on lõpmatu summaga, mille täpne arvutamine on põhimõtteliselt raskendatud kui mitte lausa võimatu. Teiseks, praktikas on alati teada ainult lõplik arv Z minevikuväärtusi, nii et lõpmatu summa tuleb igal juhul asendada lõpliku summaga ja see toob kaasa mõningase prognoosivea. Samas aga pööratava mudeli korral kahanevad kordajad π_i eksponentsiaalselt ning seda kiiremini, mida suurem on mooduli poolest vähim polünoomi $\theta(x)$ nullkoht. Seega enamikel juhtudel lähenevad kordajad π_i kiiresti nullile ning lõpmatu summa on väga hästi lähendatav küllalt väikese arvu liidetavatega lõpliku summaga.

Alternatiivne moodus tulevikuväärtuste ennustamiseks põhineb otseselt ARIMA(p,d,q) mudeli kujul, mis sisaldab lõpliku arvu liidetavaid. Paneme tähele, et me võime selle mudeli esitada kujul

$$\tilde{\phi}(B)Z_t = \theta(B)A_t,$$

kus

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x)(1-x)^d, \quad \phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i x^i, \quad \theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i x^i.$$

Olgu polünoomi $\tilde{\phi}$ esituseks

$$\tilde{\phi}(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i x^i,$$

siis võib vaadeldava mudeli kirjutada ka kujul

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i Z_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^q \theta_i A_{t-i}.$$

Seega juhul $\ell \leq q$ korral kehtib

$$\hat{Z}_{k+\ell|k} = \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i \hat{Z}_{k+\ell-i|k} - \sum_{i=\ell}^q \theta_i A_{k+\ell-i}$$

ning juhul $\ell > q$ on prognoosid arvutatavad valemist

$$\hat{Z}_{k+\ell|k} = \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i \hat{Z}_{k+\ell-i|k}.$$

Nagu näha, määrab polünoomiga $\tilde{\phi}$ määratud rekurrentne võrrand prognooside käitumise alates $\ell > q$.

Eelneva prognoosivalemi kasutamine nõuab A_t väärtuste teadmist $k - q \leq t \leq k$ korral. Teoreetiliselt ei valmista see probleeme, kuna pööratava mudeli korral on A -d Z -de kaudu leitavad, kuid praktiliselt on probleemiks see, et meil on teada ainult lõplik arv Z_t -de väärtuseid ning isegi kui oleks teada kogu minevik, oleks lõpmatute summade leidmine tülikas. Hädast päästab aga meid järnevas harjutuses toodud tulemus, mille kohaselt võime piisavalt pika aegrea korral leida A_t realiseerinud väärtused vastavalt võrrandile

$$\tilde{a}_t = z_t - \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i z_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \tilde{a}_{t-i}, \quad p+d < t \leq k, \quad (4.7)$$

kus

$$\tilde{a}_t = 0, \quad p+d-q+1 \leq t \leq p+d. \quad (4.8)$$

Harjutus 25 Olgu z_t , $1 \leq t$ mingi $ARIMA(p,d,q)$ tüüpi protsessi väärtused ning olgu a_t , $t \geq 1$ nende väärtustele vastavad protsessi A_t väärtused. Olgu $\tilde{a}_t$ vastavalt võrrandile (4.7) ja algväärtustele (4.8) arvutatud suurused. Näidata, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \tilde{a}_n| = 0.$$

Prognoosivea standardhälbe leidmine

Defineerime $\theta_i = 0$, $i > q$, siis võime parima prognoosi kirjutada kujul

$$\hat{Z}_{k+\ell|k} = \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i \hat{Z}_{k+\ell-i} - \sum_{i=\ell}^{\infty} \theta_i A_{k+\ell-i}.$$

Kasutades seda valemit ning $ARIMA$ mudeli kuju (kus samuti käsitlese lihtuse mõttes summeerime θ -dega liikmeid kuni lõpmatuseni), saab matemaatilise indukstiooni abil küllaltki lihtsalt näidata, et kehtib võrdus

$$Z_{k+\ell} - \hat{Z}_{k+\ell|k} = \sum_{i=0}^{\ell-1} \psi_i A_{k+\ell-i},$$

kus

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_k = \sum_{i=1}^{\min(k, p+d)} \tilde{\phi}_i \psi_{k-i} - \theta_k, \quad k \geq 1.$$

Harjutus 26 (*) Tõestada, et prognoosiveas esinevad kaalud ψ_k avalduvad eelpool toodud kujul.

Seega on prognoosivea kaalud lihtsalt arvutatavad ning nende abil avaldub ℓ -sammulise prognoosi vea dispersioon kujul

$$D(Z_{k+\ell} - \hat{Z}_{k+\ell|k}) = \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{\ell-1} \psi_i^2.$$

Harjutus 27 Olgu Z protsess, mis vastab ARIMA mudelile

$$(1 + 0.1B + 0.4B^2)(1 - B)Z_t = (1 + 0.2B)A_t,$$

kus B on tagasinihke operaator ($BZ_t = Z_{t-1}$). Leidke sellel mudelil põhinevate parimate 1,2,3,4-sammuliste prognooside vigade standardhälbed eeldusel, et $D(A_t) = 1$.

Eelnevas vigade standardhälbe arvutuses läks tegelikult vaja ainult, et suurused A_t on mittekorreleeritud ja konstantse dispersiooniga. Tavaliselt väljastavad programmid ka usaldusintervalle, mis kehtivad juhul, kui suurused A_t on normaaljaotusega ja sõltumatud (sest siis on ka prognoosivead normaaljaotusega).

4.6.3 ARIMA mudeli parameetrite hindamine

Parameetrite hindamisel on mitmeid võimalikke lähenemisi. Kuna tarkvara pakub sageli võimalust nende vahel valida, siis oleks hea teada, mille poolest nad erinevad. Parameetrid hindame protsessile $W_t = (1 - B)^d Z_t$ vastava aegrea andmete $w_1, w_2, \dots, w_n$ põhjal. Lihtsuse mõttes eeldame ka, et $E(W_t) = 0$.

Tingimusliku ruutude summa minimiseerimine

Oletame, et meil on teada $z_0, z_{-1}, \dots, z_{1-p-d}$ ning $a_0, a_{-1}, \dots, a_{-q}$ tegelikud väärtused; siis saame fikseeritud parameetrite θ ja ϕ korral arvutada $a_1 = z_1 - \hat{z}_{1|0}$, $a_2 = z_2 - \hat{z}_{2|1}$, $\dots$, $a_n = z_n - \hat{z}_{n|n-1}$. Seega võime parameetreid valida näiteks nii, et minimiseerime prognoosivigade ruutude summat

$$\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Sama valikukriteeriumini jõuame ka siis, kui eeldame, et suurused A_t on sõltumatud ja normaaljaotusega ning leiame parameetrid θ ja ϕ nii, et maksimiseerime aegrea $z_1, \dots, z_n$ tõepära (ehk vektori $(a_1, \dots, a_n)$ tõepära). Siin tuleb aga aru saada, et tegemist on tingliku tõepäraga; tingimuseks on see, et meil on teada löigu alguses toodud z ja a eelnevad väärtused. Seetõttu nimetatakse seda parameetrite valiku reeglit tingliku ruutude summa minimiseerimiseks ehk tinglikuks suurima tõepära meetodiks.

Praktikas kasutatakse mitmeid erinevaid varasemate väärtuste fikseerimise mooduseid, millest lihtsaim vastab kõikide eelnevate z ja a väärtuste võrdustamisele nulliga. Kui vaatlusi on väga palju, siis selline lähenemine annab praktiliselt sama tulemuse, kui suurima tõepära meetod; suhteliselt lühikeste aegridade korral võivad tulemused olla oluliselt erinevad. Käesolevas alapeatükis eeldame, et juhuslikud suurused A_t on sõltumatud ning normaaljaotusega.

Suurima tõepära meetod

Kuna protsessi W_t väärtused on esitatavad sõltumatute normaaljaotusega juhuslike suuruste A_t lineaarkombinatsioonidena, siis on vektor $W_1, \dots, W_n$ mitmemõõtmelise normaaljaotusega. Mitmemõõtmelise tsentreeritud normaaljaotuse tihedusfunktsioon esitub kujul

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right),$$

kus $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, Σ on vastava juhusliku vektori kovariatsioonimaatriks ning $|\Sigma|$ tähistab maatriksi determinanti. Kui $(W_1, \dots, W_n)$ vastab ARMA(p,q) protsessile, siis saab kovariatsioonimaatriksi kirjutada kujul

$$\Sigma = \sigma_A^2 \Omega(\phi, \theta),$$

kus Ω ei sõltu juhuslike suuruste A_t dispersioonist. Suurima tõepära meetodi korral maksimiseeritakse tavaliselt tõepära logaritmi, mis avaldub kujul

$$l(\phi, \theta, \sigma_A) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma_A^2 - \ln |\Omega(\phi, \theta)| - \frac{1}{2\sigma_A^2} \mathbf{w}' \Omega(\phi, \theta)^{-1} \mathbf{w}.$$

Kuna σ_A järgi see funktsioon saavutab maksimumi kohal

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{n} \mathbf{w}' \Omega(\phi, \theta)^{-1} \mathbf{w},$$

siis suurima tõepära hinnangud parameetritele $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ ja $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ leidmiseks tuleb maksimiseerida (pärast konstantse liidetava ärajätmist) avaldist

$$-\frac{n}{2} \ln(\mathbf{w}' \Omega(\phi, \theta)^{-1} \mathbf{w}) - \ln |\Omega(\phi, \theta)|.$$

Tingimusteta ruutude summa meetod

Inglise keeles *method of unconditional sum of squares*. Selle meetodi puhul jäetakse suurima tõepära avaldises vaatluse alt välja determinandiga liige ning minimiseeritakse avaldist

$$\mathbf{w}' \Omega(\phi, \theta)^{-1} \mathbf{w}.$$

Arvutuslikult on see veidi lihtsam, kuid ei oma märkimisväärseid eeliseid suurima tõepära meetodi eest.

4.7 ARIMA tüüpi mudelite valikust

Üldine lähtekoht on see, et mida vähem on mudelis parameetreid, seda parem (muidugi tingimusel, et mudel andmetega sobib). Mudeli sobivuse üle otsustatakse prognoosivigade sõltumatuse kontrolli põhjal; teoreetiliselt peaksid prognoosivead vastama sõltumatutele juhuslike suuruste väärtustele. Kuna täielikku sõltumatust on väga raske kindlaks teha, siis aegride puhul keskendutakse autokorrelatsioonide uurimisele (mis peaks sõltumatute vigade puhul olema teoreetiliselt nullid).

Omaette küsimus on see, kuidas teha valikut erinevate mudelite vahel, mis kõik rahuldavad sobivuse kriteeriume, seda eriti juhul, kui parameetrite arvud on erinevad (või mudelid kuuluvad erinevatesse klassidesse). Naiivseks lähenemiseks on see, et kui me sobitame modeleid tõepära maksimiseerides, siis sobivaima mudeli korral peaks vaadeldava aegrea tekkinise tõepära olema suurim. Selle lähenemise puuduseks on see, et lõpliku arvu andmete olemasolul saame me suurema parameetrite arvuga mudelit olemasolevate andmetega alati paremini sobitada isegi juhul, kui tegelikkuses selline mudel sobiv ei ole (nn ülesobitamine). Seetõttu tuleb sobivuse võrdlemisel kindlasti arvestada ka parameetrite arvu. Üheks selliseks sobivuse mõõdikuks, mis arvestab nii parameetrite arvu kui ka tõepära, on nn Akaike informatsioonikriteerium, mis avaldub kujul

$$AIC = 2k - 2 \ln L,$$

kus k on mudeli parameetrite arv ja L on aegrea tõepära sobitatud mudeli korral.

4.8 Sesoonsed ARIMA modelid

Sageli on andmetes mingi loomulik periood (näiteks aasta), mille korral aegrea järgnevat väärtust mõjutavad lisaks hiljutistele väärtustele ka perioodi või isegi mitme perioodi võrra minevikus olevad väärtused. Üheks võimaluseks sellise efekti modelleerimiseks on lihtsalt lisada perioodile vastavate nihetega autoregressiivseid ja/või liikuva keskmise liikmeid üldisesse mudelisse, kuid sageli on tulemusi lihtsam interpreteerida, kui perioodilist käitumist kirjeldav mudel esitada sesoonsete ja mittesesonsete tegurite korrutise teel.

Perioodiga s multiplikatiivseteks $\text{ARIMA}(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ tüüpi mudeliteks nimetatakse mudeleid kujul

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D Z_t = \theta(B)\Theta(B^s)A_t,$$

kus

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i x^i, \quad \Phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^P \Phi_i x^i, \\ \theta(x) &= 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i x^i, \quad \Theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^Q \Theta_i x^i.\end{aligned}$$

Siin tuleb tähele panna, et tegemist on ARIMA tüüpi mudelite alamklassiga. Saadava mudeli puhul eeldatakse, et $\phi(x)$ ja $\Phi(x)$ rahuldavad statsionaaruse tingimusi ning et $\theta(x)$ ja $\Theta(x)$ rahuldavad pööratavuse tingimusi; sel juhul on vastavad tingimused täidetud ka vaadeldaval ARIMA tüüpi mudelil.

Lihtsalt mõistetakseks multiplikatiivseks sesoonseks ARIMA tüüpi mudelite erijuhuks on $\text{ARIMA}(p,d,q)\times(0,1,0)_s$ tüüpi mudelid, kus s tähistab vaatluste arvu perioodis (tavaliselt aasta), kuna sel juhul vastavad aastased muudud ARIMA tüüpi mudelile.

Mudelite identifitseerimiseks on kasulik teada mõningatel lihtsamatel juhtudel aotokorrelatsioonikordajate teoreetilist käitumist. Vaatleme näitena $\text{ARIMA}(0,0,1)\times(0,0,1)_s$ autokorrelatsioonikordajate leidmist juhul $s \geq 3$. Olgu

$$Z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^s)A_t$$

ehk

$$Z_t = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \Theta_1 A_{t-s} + \theta_1 \Theta_1 A_{t-s-1}.$$

Siit A_k , $k \in \mathbb{Z}$ sõltumatuse tõttu saame

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2) \sigma_A^2.$$

Kuna Z_{t-1} avaldises

$$Z_{t-1} = A_{t-1} - \theta_1 A_{t-2} - \Theta_1 A_{t-s-1} + \theta_1 \Theta_1 A_{t-s-2}$$

on Z_t avaldisega võrreldes samade indeksitega A_{t-1} ja A_{t-s-1} , siis

$$\gamma_1 = \text{cov}(Z_t, Z_{t-1}) = (-\theta_1 - \theta_1 \Theta_1^2) \sigma_A^2,$$

seega

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1(1 + \Theta_1^2)}{1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2}.$$

Seejärel on $k \geq 2$ korral Z_{t-k} ja Z_t avaldises samu liikmeid ainult siis, kui $k = s - 1, s, s + 1$; muudel juhtudel on kõik liikmed erinevad ning vastavad autokovariatsioonid ja autokorrelatsioonid võrdsed nulliga. Juhul $k = s - 1$ avaldub Z_{t-k} kujul

$$Z_{t-s+1} = A_{t-s+1} - \theta_1 A_{t-s} - \Theta_1 A_{t-2s+1} + \theta_1 \Theta_1 A_{t-2s},$$

seega

$$\gamma_{s-1} = \theta_1 \Theta_1 \sigma_A^2, \quad \rho_{s-1} = \frac{\theta_1 \Theta_1}{1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2}.$$

Analoogiliselt leiame

$$\begin{aligned} \gamma_s &= (-\Theta_1 - \theta_1^2 \Theta_1) \sigma_A^2, \quad \rho_s = -\frac{\Theta_1(1 + \theta_1^2)}{1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2}, \\ \gamma_{s+1} &= \theta_1 \Theta_1 \sigma_A^2, \quad \rho_{s+1} = \frac{\theta_1 \Theta_1}{1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2} \end{aligned}$$

Kõik ülejäänud autokorrelatsioonid on nullid. Seega vaadeldava mudeli tunnuseks on üks madalat järku nullist erinev autokorrelatsioon ning kolm nullist erinevat autokorrelatsiooni nihke s ümbruses, kusjuures perioodile s eelnev ja järgnev autokorrelatsioon on teoreetiliselt võrdsed.

Harjutus 28 Leida $ARIMA(0,0,2)x(0,0,1)_s$ mudeli autokorrelatsioonikordajad juhul $s \geq 5$

Harjutus 29 Leida $ARIMA(0,0,1)x(1,0,0)_s$ mudeli autokorrelatsioonikordajad juhul $s = 6$.

Peatükk 5

Mitmemõõtmelised mudelid

Siiani vaatlesime aegrea tulevikuväärtuste prognoosimist juhul, kus kasutada oli ainult vaadeldava aegrea minevikuväärtused. Sageli aga on võimalik prognoose tunduvalt täpsustada, kui kasutada lisaks vaadeldava aegrea minevikuväärtustele veel teisi andmeid, näiteks teiste juhuslike suuruste minevikuväärtuseid. Näiteks on loomulik arvata, et majanduse üldseisundi näitajate minevikuväärtused mõjutavad oluliselt siseturismiga seotud suuruseid. Käesolevas peatükis vaatleme mõningaid mooduseid, kuidas selliseid sõltuvusi matemaatiliselt modelleerida ning kuidas vastavaid mudeleid praktikas kasutada.

5.1 Mitmene lineaarne regressioon ARIMA tüüpi vigadega

Olgu Z_t meid huvitava tunnuse väärtus ajal t ning $(X_1(t), \dots, X_m(t))$ argumenttunnuste vektor, mida saab kasutada suuruse Z_t prognoosimiseks. Mitmese lineaarse regressiooni mudeliks on mudel kujul

$$Z_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i X_i(t) + \varepsilon_t,$$

kus vead ε_t on sama jaotusega, sõltumatud ja tsentreeritud, kordajate hinnangute vigade tuletamisel eeldatakse ka vigade normaaljaotusele vastavust. Aegridade puhul enamasti selline mudel (eriti vigade sõltumatuse eeldus) ei kehti, mistõttu standardsete lineaarse regressiooni vahendite kasutamine ning saadud mudeli põhjal prognoosimine võib viia vägagi valedele tulemustele. Sageli aga sobivad aegridade puhul andmetega mudelid, kus vead ε_t vastavad mingile ARIMA tüüpi protsessile, sel juhul räägitakse lineaarsest regressioonist ARIMA tüüpi vigadega ehk ARIMAX mudelist. Mudeli sobitamise protseduur on kaheetapiline: kõigepealt sobitame tavalise regressiooni abil andmetele mitmese regressioonimudeli ja analüüsime vigade käitumist. Vigade käitumise põhjal valime ARIMA mudeli kuju suuruste ε_t jaoks ning seejärel leiame valitud ARIMAX tüüpi mudeli parameetrid (nii β -d kui ARIMA kordajad) näiteks suurima tõepära meetodil või siis tinglike prognoosivigade ruutude summa minimiseerimise teel. Leitud mudeli headuse kriteeriumiks on prognoosivigade sõltumatus, mida testitakse autokorrelatsioonide sõltumatute juhuslike suuruste väärtustele vastavuse testimise abil.

5.2 Ülekandefunktsiooni mudelid

Inglise keeles *transfer function models*. Vaatleme juhtu, kus meil on kaks protsessi Z_t ja X_t , millele vastavate aegridade väärtused on meil olemas. Lihtsuse mõttes eeldame, et mõlemad protsessid on statsionaarsed ning tsentreeritud (vastasel juhul võib proovida leida

mõlemast sobivat järku diferentsid ja maha lahutade nende keskmised, et saada soovitud omadustega ridu). Meie eesmärgiks on kindlaks teha, milliseid X minevikuväärtuseid (ja võib-olla ka Z minevikuväärtuseid) regressoritena kasutada nii, et saada võimalikult häid ennustusi protsessi Z jaoks. Täpsemalt, vaatleme ARIMAX mudelit kujul

$$Z_t = \beta_0 + \sum_{i=b}^{\infty} \beta_i X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (5.1)$$

kus $b \geq 1$ ja suurused ε_t vastavad mingile ARMA protsessile

$$\phi(B)\varepsilon_t = \theta(B)A_t,$$

kusjuures eeldame, et suurused A_t on sõltumatud ka protsessi X_t väärtustest. Sel juhul on ka suurused ε_t sõltumatud suurustest X_t . Selleks, et parameetreid oleks lõplik arv ning et ennustamiseks kasutataks ainult X_t minevikuväärtuseid, otsime sobivat mudelit selliste hulgast, kus funktsioon

$$\beta(x) = \sum_{i=b}^{\infty} \beta_i x^i$$

on esitatav lõpliku arvu parameetrite abil kujul

$$\beta(x) = x^b \frac{v(x)}{\delta(x)} = x^b \frac{\sum_{i=0}^s v_i x^i}{1 - \sum_{i=1}^r \delta_i x^i}.$$

Sellise mudeli võib kirjutada ka kujul

$$Z_t = \sum_{i=1}^r \delta_i Z_{t-i} + \sum_{i=0}^s v_i X_{t-b-i} + \eta_t,$$

kus suurused η_t vastavad ARMA protsessile kujul

$$\phi(B)\eta_t = \delta(B)\theta(B)A_t.$$

Funktsiooni $\beta(x)$ nimetatakse ülekandefunktsiooniks, kuna ta kirjeldab, kuidas X omandatud väärtused mõjuvad ehk kanduvad üle suuruste Z väärtustele. Mudeli sobitamise etapid on järgmised:

1. Leiame hinnangud suurustele β_i
2. Suuruste β_i hinnangute põhjal määrame kindlaks sobiva nihke b ning kasutades teadmist sellest, kuidas erinevate r ja s väärtuste korral peaks suurused β teoreetiliselt käituma, leiame hinnangud ka parameetritele r ja s
3. Leiame sobiva mudeli vigade ε_t jaoks
4. Hindame mudeli parameetreid suurima tõepära meetodil
5. Kontrollime jääkvigade sõltumatust
6. arvutame prognoosid (kuni b ajaperioodi ette).

Vaatleme lähemalt mõningaid nendest etappidest

5.2.1 Suuruste β_i hindamine

Tähistame kujul $\gamma_{xx}(k)$ ja $\gamma_{zz}(k)$ protsesside X ja Z k -ndat järku autokovariatsioonid ning defineerime ristkovariatsioonid kujul

$$\gamma_{xz}(k) = \text{cov}(X_t, Z_{t+k});$$

vastavad autokorrelatsioonid olgu $\rho_{xx}(k)$, $\rho_{yy}(k)$ ning $\rho_{xz}(k)$. Korrutades võrrandit (5.1) suurusega X_{t-k} ning leides keskväärtuse (ehk arvutades võrrandi parema ja vasaku poole kovariatsiooni suurusega X_{t-k}) saame

$$\gamma_{xz}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \gamma_{xx}(i-k).$$

Kui nüüd eeldada, kordajad β_i on praktiliselt võrdsed nulliga alates mingist järgust K , siis saame võrrandisüsteemi suuruste $\gamma_{xz}(k)$, $k = 0, \dots, K-1$ määramiseks. Samas on nende võrrandite lahendamisel (asendades teoreetilised auto- ja riskovariatsioonid empiirilistega) saadud hinnangud küllalt ebatäpsed, seetõttu on võimaluse korral parem kasutada nn eelvalgendamise (inglise keeles *prewhitening*) tehnikat.

Eelvalgendamise tehnika on rakendatav, kui protsess X vastab mingile pööratavale ARMA tüüpi mudelile. Oletame, et X vastab mudelile

$$\phi_x(B)X_t = \theta_x(B)\alpha_t,$$

kus suurused α_t on sõltumatud, sama jaotusega (ning sõltumatud suurustest $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$). Eelnevate eelduste põhjal on nad ka sõltumatud suurustest η_t . Pööratavuse tõttu saame

$$\alpha_t = \theta_x(B)^{-1} \phi_x(B) X_t.$$

Rakendades nüüd operaatorit $\theta_x(B)^{-1} \phi_x(B)$ võrduse (5.1) mõlemale poole, saame

$$W_t = \sum_{i=b}^{\infty} \beta_i \alpha_{t-i} + \xi_t,$$

kus

$$W_t = \theta_x(B)^{-1} \phi_x(B) Z_t, \quad \xi_t = \theta_x(B)^{-1} \phi_x(B) \varepsilon_t.$$

Leides nüüd eelneva võrduse mõlema poole kovariatsiooni suurusega α_{t-k} saame

$$\gamma_{\alpha w}(k) = \sigma_{\alpha}^2 \beta_k,$$

kust saame kordaja β_k avaldada. Praktilise arvutuse seisukohalt on suurused α_k leitavad suuruste ühesammuliste prognooside vigadena leitud mudeli abil suuruste X_t prognoosimisel ning suurused W_t vastavad täpsel sama mudeli kasutamisel suuruste Y_t ennustamisel tekkivatele ühesammuliste prognoosivigadele.

5.2.2 Mudeli kuju parameetrite b, r ja s valik

Kui kordajad β_k on hinnatud, siis b valiku kriteeriumiks on tingimus $\beta_i \approx 0$, $i = 0, 1, \dots, b-1$. Kui ainult (küllat väike) lõplik arv kordajatest β_k on nullist erinevad, siis võime võtta $r = 0$ ja $s = k_0 - b$, kus k_0 vastab viimase nullist erineva β_k indeksile. Muudel juhtudel aga saab analootiliselt ARIMA tüüpi mudelite analüüsiga näidata, et alates järgust $k = b + s + 1$ rahuldavad kordajad β_k rekurrentset võrrandit

$$\beta_k = \sum_{i=1}^r \delta_i \beta_{k-i}.$$

Teades selliste rekurrentsete võrrandite lahendite käitumist on võimalik püstitada hüpoteese sobiva r (ja ka s) väärtuse kohta.

Harjutus 30 Näidata, et juhul $r = 1$ kehtib

$$\beta_k = \delta_1^{k-b-s} \beta_{b+s} \quad \forall k > b + s.$$

Kirjandus

- [1] Statistikaamet, tarbijahinna indeks,
<http://pub.stat.ee/px-web.2001/Database/Majandus/04HINNAD/04HINNAD.asp>
- [2] Statistikaamet, majutatud turistide arv,
http://pub.stat.ee/px-web.2001/Database/Majandus/23Turism_ja_majutus/02Majutus/02Majutus.asp
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Local_regression
- [4] R. B. Cleveland, W. S. Cleveland, J.E. McRae, and I. Terpenning (1990) STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess. *Journal of Official Statistics*, 6, 3–73.
- [5] <http://www.census.gov/srd/www/x12a/>
- [6] M. G. Kendall, A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 3, 1966, London, Griffin
- [7] T. W. Andersson, *The statistical analysis of time series* J. Wiley & Sons, 1971
- [8] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, *Time series analysis: forecasting and control*, Holden-Day 1969.
- [9] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press 1991.