Integraaliteooria

Swen Laur

13.-19. detsember

1 Mõõduga ruum $(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$

Definitsioon 1

Olgu T abstraktne hulk ning olgu $\mathfrak{A}_0$ hulga T alamhulkade süsteem. Siis hulkade süsteemi $\mathfrak{A}_0$ nimetatakse algebraks parajasti siis, kui

1. $T, \emptyset \in \mathfrak{A}_0$;
2. $A \in \mathfrak{A}_0 \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \mathfrak{A}_0$;
3. $A, B \in \mathfrak{A}_0 \;\Rightarrow A \bigcup B \in \mathfrak{A}_0$.

Definitsioon 2

Algebrat $\mathfrak{A}$ nimeteatakse sigma-algebraks, kui on täidetud sigma-aditiivsuse tingimus:

4. $\forall i \in \mathbb{N}\; A_i \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$.

Definitsioon 3

Olgu meil antud algebra $\mathfrak{A}_0$, siis funktsiooni $\mu_0 : \mathfrak{A}_0 \to \mathbb{R}$ nimetatakse mõõduks kui ta vastab järgmistele tingimustele:

1. $\forall A \in \mathfrak{A}_0\; \mu_0(A) \geq 0$;
2. $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_0 \;:\; A_1 \bigcap A_2 = \emptyset \;\Rightarrow\; \mu_0(A_1 \bigcup A_2) = \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2)$.

Definitsioon 4

Sigma-algebral $\mathfrak{A}$ määratud mõõtu μ nimetatakse sigma-aditiivseks mmõõduks, kui on täidetud tingimus:

3. $\forall (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A} \;:\; A_i \bigcap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j \;\Rightarrow\; \mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Definitsioon 5

Mõõduga ruumiks nimetatakse kolmikut $(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$.

Algebra omadused:

1. $A, B \in \mathfrak{A}_0 \Rightarrow A \bigcap B \in \mathfrak{A}_0$;
2. $A, B \in \mathfrak{A}_0 \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{A}_0$;
3. algebra on kinnine lõplike summade ja ühisosade suhtes;
4. kui algebra on sigma-algebra, siis on ta kinnine ka loenduva ühendi ja ühisosa suhtes.

Mõõdu omadused:

1. $A \subset B,\ A, B \in \mathfrak{A}_0\ \mu_0(A) \leq \mu_0(B)$;
2. $\forall A \in \mathfrak{A}_0\ \mu_0(A) \leq \mu_0(T)$;
3. $\forall A, B \in \mathfrak{A}_0\ \mu_0(A \bigcup B) \leq \mu_0(A) + \mu_0(B)$.

Teoreem 1
Hulga T iga alamhulkade süsteemi $\mathfrak{B}$ korral leidub minimaalne sigma-algebra $\mathfrak{A}$, mis sisaldab $\mathfrak{B}$ st. kui $\mathfrak{B}$ sisaldub sigma-algebras $\mathfrak{M}$, siis $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$.

Definitsioon 6
Olgu meil hulkade jada A_n selline, et $A_n \supseteq A_{n+1}$. Hulk A on piirväärtuseks $\lim\limits_n A_n = A$ parajasti siis, kui $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Tähistatakse ka $A_n \xrightarrow{n} A$.

Definitsioon 7
Olgu meil hulkade jada A_n selline, et $A_n \subseteq A_{n+1}$. Hulk A on piirväärtuseks $\lim\limits_n A_n = A$ parajasti siis, kui $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Tähistatakse ka $A_n \xrightarrow{n} A$.

Teoreem 2
Olgu meil sigma-algebra $\mathfrak{A}_0$, siis järgmised kolm väidet on samaväärsed:

1. *mõõt μ on sigma-aditiivne;*
2. *iga üksteisesse sisestatud hulkade jada $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ korral, kui $A_n \xrightarrow{n} \emptyset$, siis $\mu(A_n) \xrightarrow{n} 0$;*
3. *iga hulkade jada $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ puhul, kui $A_n \subseteq A_{n+1}$ ning $A_n \xrightarrow{n} A$, siis $\mu(A_n) \xrightarrow{n} \mu(A)$.*

Järeldus 2.1
Sigma-aditiivne mõõt on nii ülalt kui alt pidev st. $A_n \xrightarrow{n} A$, siis toimub koonumine $\mu(A_n) \xrightarrow{n} \mu(A)$.

2 Klassid $H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $H^+(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$

Definitsioon 1

Olgu meil mõõduga ruum $(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$, siis funktsiooni $f : T \to \mathbb{R}$ nimetatakse lihtsaks funktsiooniks parajasti siis, kui leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1, A_2, \dots, A_n$ nii, et

1. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}_0$;
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = T$;
3. $\exists c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{R} \,:\, f(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(t)$.

Definitsioon 2

Lihtsa funktsiooni $f(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(t)$ integraaliks nimetatakse reaalarvu

$I_0 f = \int_T f d\mu_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mu_0(A_i)$.

Definitsioon 3

Lihtsate funktsioonide f ja g ülemiseks ja alumiseks mähkijaks nimetatakse funktsioone $\sup\{f, g\} : T \to \mathbb{R}$ ning $\inf\{f, g\} : T \to \mathbb{R}$, mis on defineeitud järgnevalt

$$\forall t \in T \;\; \sup\{f, g\}(t) = \sup\{f(t), g(t)\}, \;\; \inf\{f, g\}(t) = \inf\{f(t), g(t)\}.$$

Definitsioon 4

Klassiks $H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ nimetatakse lihtsate funktsioonide hulka ruumil $(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$.

Definitsioon 5

Klassiks $H^+(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ nimetatakse mittenegatiivsete lihtsate funktsioonide hulka ruumil $(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$.

Klassi $H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ struktuurilised omadused:

1. $H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ on vektoruum üle $\mathbb{R}$
   $f, g \in H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \Rightarrow \; f + g \in H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$
   $f \in H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0), \lambda \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lambda f \in H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
2. $H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ on võreline
   $f, g \in H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \;\Rightarrow\; \sup\{f, g\}, \inf\{f, g\} \in H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;

Integraali omadused klassis $H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$:

1. $f, g \in H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \;\Rightarrow\; I_0(\alpha f + \beta g) = \alpha I_0 f + \beta I_0 g$;
2. $f, g \in H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0), \forall t \in T \; g(t) \leq f(t) \Rightarrow \; I_0 g \leq I_0 f$.

Teoreem 1 (Monotoonse koondumise omadus)

Kui mõõt μ_0 *on selline, et iga üksteisesse sisestatud hulkade jada* $(A_n) \in \mathfrak{A}_0$*, mille korral leiab aset koondumine* $A_n \xrightarrow{n} \emptyset$*, puhul toimub koondumine* $\mu_0(A_n) \xrightarrow{n} 0$ *st. mõõt on pidev hulgal* $\emptyset$*. Olgu lihtsate funktsioonide jada* $(f_n) \subseteq H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$*, mis igas punktis* $t \in T$ *koondub monotoonselt nulliks, siis toimub koondumine* $I_0 f_n \xrightarrow{n} 0$*.*

3 Klass $L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$

Definitsioon 1

Funktsioon $f : T \to \mathbb{R}$ on klassis $L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ parajasti siis, kui leidub funktsioonide jada $(f_n) \subseteq H^+(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ nii, et iga $t \in T$ jada $(f_n(t))$ koondub monotoonselt kasvades arvuks $f(t)$.

Märkus: *Lõpmatusse hajuva rea piirväärtuseks loetakse ∞ ja defineeritakse sellega tehted kooskõlas piirväärtustega.*

Definitsioon 2

Funktsiooni f klassist $L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ülemiseks integraaliks nimetatakse piirväärtust $\overline{I_0} f = \lim\limits_n I_0 f_n$.

Definitsioon 3

Hulka $Z \subseteq T$ nimetatakse hüljatavaks hulgaks, kui leidub funktsioon $f \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ nii, et iga $t \in Z$ korral $f(t) = \infty$ ja $\overline{I_0} f < \infty$.

Definitsioon 4

Me ütleme, et omadus $O(t)$ kehtib peaaegu kõikjal, kui $O(t)$ kehtib hulgal $T \setminus Z$, kus Z on hüljatav hulk.

Klassi $L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ struktuurilised omadused:

1. $L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ on kinnine liitmise ja mittenegatiivse arvuga korrutamise suhtes
   $f, g \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \ \Rightarrow \ f + g \in \text{Ł}_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$
   $f \ inL_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0), \ \lambda \geq 0 \ \Rightarrow \ \lambda f \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$
   $0 \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
2. $L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ on võreline
   $f, g \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \ \Rightarrow \ \sup\{f, g\}, \inf\{f, g\} \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
3. $H^+(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \subseteq L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$.

Integraali omadused klassis $L_0(.)$:

1. $f, g \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0), \ \alpha, \beta \geq 0 \ \Rightarrow \ \overline{I_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \overline{I_0} f + \beta \overline{I_0} g$;
2. $f, g \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0), \ \forall t \in T : f(t) \geq g(t) \ \Rightarrow \overline{I_0} f \geq \overline{I_0} g$;
3. $f \in H^+(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \ \Rightarrow \overline{I_0} f = I_0 f$.

Hüljatud hulkade omadused:

1. $A \subseteq Z, Z$ on hüljatav $\ \Rightarrow \ A$ on hüljatav;
2. $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$on hüljatavad hulgad $\ \Rightarrow \ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ on hüljatav;
3. $\mu_0(A) = 0 \ \Rightarrow \ A$ on hüljatav.

Teoreem 1

Funktsioon $f : T \to \mathbb{R}$ *on klassis* $L_0(T, \mathfrak{A}_0), \mu_0)$ *parajasti siis, kui funktsioon esitub kujul* $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(t)$*, kus funktsioonid* $(h_n) \subseteq H^+(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ *ja* $\overline{I_0} f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_0 h_n$.

Teoreem 2 (Borel'i printsiip)

Kui funktsioonide jada $(f_n) \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ *ning* $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$*, siis funktsioon* $f \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ *ja* $\overline{I_0} f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{I_0} f_n$.

Teoreem 3 (Lähendusteoreem)

Olgu funktsioon $f \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ *ja* $\overline{I_0} f < \infty$*, siis iga* $\varepsilon > 0$ *leidub funktsioon* $h_\varepsilon \in H^+(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ *nii, et* $f - h_\varepsilon \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ *ning* $\overline{I_0}(f - h_\varepsilon) < \varepsilon$.

4 Klass $L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$

Definitsioon 1

Funktsioon $f : T \to \mathbb{R}$ on klassist $L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ parajasti siis, kui leiduvad funktsioonid $f_1, f_2 \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ nii, et $\overline{I_0} f_1, \overline{I_0} f_2 < \infty$ ning peaaegu kõikjal $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$. Sealjuures nimetame funktsiooni f Lebesque' integraaliks arvu $If = \int_T f d\mu_0 = \overline{I_0} f_1 - \overline{I_0} f_2$.

Klassi $L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ struktuurilised omadused:

1. $L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ on vektoruum üle $\mathbb{R}$
   $f, g \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \ \Rightarrow \ f + g \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$
   $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0), \ \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \lambda f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
2. $L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ on võreline
   $f, g \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \ \Rightarrow \ \sup\{f, g\}, \inf\{f, g\} \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
3. funktsioonid on absoluutselt integreeruvad
   $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \ \Rightarrow \ |f| \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
4. $H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
5. $\big\{f \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \mid \overline{I_0} f < \infty\big\} \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$.

Integraali omadused klassis $L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$:

1. $f, g \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ I(\alpha f + \beta g) = \alpha If + \beta Ig$;
2. $f, g \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0), \ f(t) \geq g(t)$ peaaegu kõikjal $\Rightarrow If \geq Ig$;
3. $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \ \Rightarrow |If| \leq I|f|$;
4. $f \in H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \ \Rightarrow \ If = I_0 f$;
5. $f \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \bigcap L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \ \Rightarrow \ If = \overline{I_0} f$.

Teoreem 1 (Lähendusteoreem)

Olgu funktsioon $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ning peaaegu kõikjal $f(t) \geq 0$, siis iga $\varepsilon > 0$ leiduvad funktsioonid $f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon \in L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ nii, et $\overline{I_0} f_1^\varepsilon < \infty$, $\overline{I_0} f_2^\varepsilon < \varepsilon$ ning peaaegu kõikjal $f(t) = f_1^\varepsilon(t) - f_2^\varepsilon(t)$.

Teoreem 2 (Levi teoreem)

Olgu funktsioonide jada $(f_n) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$, kusjuures peaaegu kõikjal $f_n(t) \geq 0$ ning $\sum\limits_{n=1}^{\infty} If_n < \infty$. Siis funktsioon $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ koondub peaaegu kõikjal ja $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$, kusjuures $If = \sum\limits_{n=1}^{\infty} If_n$.

Järeldus 2.1

Olgu funktsiooniks f peaaegu kõikjal monotoonselt kasvav funktsioonide jada $(f_n) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja leidugu piirväärtus $\lim\limits_n If_n < \infty$. Siis funktsioon

$f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ *ja* $If = \lim_n If_n$.

Järeldus 2.2

Olgu funktsiooniks f peaaegu kõikjal monotoonselt kahanev funktsioonide jada $(f_n) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ selline, et leidub piirväärtus $\lim_n If_n > -\infty$. Siis funktsioon $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $If = \lim_n If_n$.

Järeldus 2.3

Olgu funktsioonide jada $(f_n) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ selline, et peaaegu kõikjal $f_n(t) \leq \varphi(t)$, kusjuures $\varphi \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$. Siis funktsioon $f = \sup_n f_n$ on klassis $L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $If = I(\sup_n f_n) \geq \sup_n If_n$.

Järeldus 2.4

Olgu funktsioonide jada $(f_n) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ selline, et peaaegu kõikjal $f_n(t) \geq \psi(t)$, kusjuures $\psi \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$. Siis funktsioon $f = \inf_n f_n$ on klassis $L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $If = I(\inf_n f_n) \leq \inf_n If_n$.

Teoreem 3 (Fatou' teoreem)

Olgu meil funktsioonide jada $(f_n) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$. Kui leidub funktsioon $\varphi \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ nii, et peaaegu kõikjal $f_n(t) \leq \varphi(t)$ ning $\limsup_n If_n > -\infty$, siis funktsioon $\limsup_n f_n \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $\limsup_n If_n \leq I(\limsup_n f_n)$. Kui leidub funktsioon $\psi \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ nii, et peaaegu kõikjal $f_n(t) \geq \psi(t)$ ning $\liminf_n If_n < \infty$, siis funktsioon $\liminf_n f_n \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $\liminf_n If_n \geq I(\liminf_n f_n)$.

Teoreem 4 (Lebesque'i teoreem)

Olgu funktsioonide jada $(f_n) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ selline, et peaaegu kõikjal leidub piirväärtus $f(t) = \lim_n f_n(t)$ ning peaaegu kõikjal $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$, kusjuures $\varphi \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$, siis funktsioon $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $If = \lim_n If_n$.

Järeldus 4.1

Olgu funktsioonide jada $(f_n) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ selline, et $\sup_n f_n(t) \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$. Siis kui peaaegu kõikjal leidub piirväärtus $f(t) = \lim_n f_n(t)$, on funktsioon $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $If = \lim_n If_n$.

Järeldus 4.2

Olgu funktsioonide jada $(f_n) \subseteq L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ paeaegu kõikjal absoluutselt tõkestatud. Siis kui peaaegu kõikjal leidub piirväärtus $f(t) = \lim_n f_n(t)$, on funktsioon $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $If = \lim_n If_n$.

5 Klass $MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ehk Riesz'i mõttes mõõtuvad funktsioonid

Definitsioon 1

Funktsioon $f : T \to \mathbb{R}$ on klassis $MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ parajasti siis, kui leidub funktsioonide jada $(f_n) \subseteq H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ nii, et peeaegu kõikjal $\lim\limits_{n} f_n(t) = f(t)$.

Klassi $MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ struktuurilised omadused:

1. $MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ on vektoruum üle $\mathbb{R}$ $f, g \in MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \;\Rightarrow\; f + g \in MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$
   $f\ inMR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0),\ \lambda \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lambda f \in MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
2. $MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ on võreline
   $f, g \in MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \;\Rightarrow\; \sup\{f, g\}, \inf\{f, g\} \in MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
3. $H(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \subseteq MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
4. $L_0(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \subseteq MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$;
5. $L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0) \subseteq MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$.

Teoreem 1

Olgu funktsioon f on mõõtuv Riesz'i mõttes. Siis on funktsioon integreeruvus $f \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ samaväärne majorantfunktsiooni $\varphi \in L(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ leidumisega nii, et peaaegu kõikjal $|f(t)| \leq \varphi(t)$.

Järeldus 1.1

Iga tõkestatud Riesz'i mõttes mõõtuv funktsioon on integreeruv.

Teoreem 2

Kui Riesz'i mõttes mõõtuvate peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide jada (f_n) koondub peaaegu kõikjal funktsiooniks f, mis peaaegu kõikjal on lõplik, siis piirfunktsioon f on mõõtuv Riesz'i mõttes.

Märkus: *Funktsioonide jada lõplikkus ja funktsiooni lõplikkus pole tegelikult tarvilikud, muudavad vaid tõestuse lihtsamaks.*

6 Mõõdu μ_0 jätkamine sigma-aditiivseks kasutades klassi $MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$

Definitsioon 1
Hulk $B \subseteq T$ on μ-mõõtuv parajasti siis, kui χ_B on mõõtuv Riesz'i mõttes ning $\mu(B) = I\chi_B$

Mõõdu μ omadused:

1. iga μ_0 mõõtuv hulk on μ mõõtuv;
2. iga hüljatava hulga mõõt on null;
3. saadud uus mõõtuvate hulkade süsteem $\mathfrak{A}$ on sigma-algebra;
4. mõõt μ on sigma-aditiivne;
5. saadud uus mõõtuvate hulkade süsteem $\mathfrak{A}$ on minimaalne.

Teoreem 1
Klassid $MR(T, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ja $MR(T, \mathfrak{A}, \mu)$ on võrdsed.

7 Klass $ML(T, \mathfrak{A}, \mu)$ ehk Lebesque'i mõttes mõõtuvad funktsioonid

Definitsioon 1

Olgu meil sigma-aditiivse mõõduga ruum $(T, \mathfrak{A}, \mu)$. *Funktsioon* $f : T \to \mathbb{R}$ *on klassis* $ML(T, \mathfrak{A}, \mu)$ *parajasti siis, kui iga* $c \in \mathbb{R}$ *korral hulk* $T_c = \{t \mid f(t) > c\}$ *on* μ*-mõõtuv.*

Märkus: *Samaväärselt hulga* T_c *mõõtuvuse nõudmisega võiks nõuda ühe hulga* $\{t \mid f(t) \geq c\}$,$\{t \mid f(t) < c\}$ *või* $\{t \mid f(t) \leq c\}$ *mõõtuvust iga* $c \in \mathbb{R}$.

Teoreem 1

Sigma-aditiivse mõõduga ruumis on mõõtuvus Riesz'i ja mõõtuvus Lebesque'i mõttes samaväärsed.

Definitsioon 2

Olgu meil sigma-aditiivse mõõduga ruum $(T, \mathfrak{A}, \mu)$. *Funktsioon* $f : T \to \mathbb{R}$ *on klassis* $M(T, \mathfrak{A}, \mu)$ *parajasti siis, kui funktsioon on mõõtuv Riesz'i või Lebesque'i mõttes.*

8 Ühekordne Lebesque'i integraal

Definitsioon 1

Olgu meil lõik $[a, b]$, *siis sigma-aditiivseks mõõduks* $\mu = mes$ *nimetatakse mõõduga ruumi* $([a, b], \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ *laiendamisel klassi* $MR([a, b], \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ *abil saadud mõõtu* $\mu(B) = mes(B) = I\chi_B$. *Kus*

$$\mathfrak{A}_0 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \{\alpha_i, \beta_i\} \mid \alpha_i, \beta_i \in [a, b], \alpha_i \leq \beta_i, i \neq j \Rightarrow \{\alpha_i, \beta_i\} \bigcap \{\alpha_j, \beta_j\} = \emptyset, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ja

$$\mu_0 \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\alpha_i, \beta_i\} \right) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i).$$

Tähistus $\{\alpha, \beta\}$ *täistab lõiku, poollõiku või vahemikku.*

Teoreem 1

Kui hulkade jada $(A_n) \in \mathfrak{A}_0$ *ja* $\lim\limits_{n} A_n = \emptyset$, *siis* $\lim\limits_{n} \mu_0(A_n) = 0$.

Järeldus 1.1

Mõõt μ_0 *on jätkatav sigma-aditiivseks mõõduks.*

Järeldus 1.2

Mõõdule mes vastav sigma-algebra on kujul

$$\mathfrak{A} = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n, \beta_n\} \mid \alpha_i, \beta_i \in [a, b], \alpha_i \leq \beta_i, i \neq j \Rightarrow \{\alpha_i, \beta_i\} \bigcap \{\alpha_j, \beta_j\} = \emptyset \right\}$$

kus $\{\alpha, \beta\}$ *täistab lõiku, poollõiku või vahemikku.*

Definitsioon 2

Olgu tõkestatud funktsioon $f \in M([a, b], \mathfrak{A}, mes)$ *kusjuures* $m \leq f(t) \geq M$. *Integraalsummaks nimetatakse alajaotuse* $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = M$ *abil tehtud summat*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{y_k} mes(\{t \mid y_{k-1} \leq f(t) < y_k\}) + y_n mes(\{t \mid f(t) = y_n\}),$$

kus $\widetilde{y_k} \in [y_{k-1}, y_k)$ *ja* $\lambda = \max\limits_{k=1..n} y_k - y_{k-1}$. *Kui protsessis* $\lambda \to 0^+$ *integraalsummad koonduvad olenemata alajaotusest ja punktide* $\widetilde{y_k}$ *valikust, siis nimetatakse funktsiooni Lebesque'i mõttes integreeruvaks ja piirväärtust nimetatakse Lebesque' integraaliks ja tähistatakse*

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0^+} \sigma.$$

Definitsioon 3

Olgu funktsioon $f \in M([a, b], \mathfrak{A}, mes)$ *ülalt tõkestamata, siis kui eksisteerib* *piirväärtus* $\lim\limits_{M\to\infty}\int_{[a,b]} f_M(x)dx$, *kus* $f_M(x) = \inf\{M, f(x)\}$, *nimetatakse funktsiooni integreeruvaks Lebesque mõttes.*

Definitsioon 4

Olgu funktsioon f *tõkestamata, siis kui funktsioonid* $f^+ = \sup\{0, f\}$ *ja* $f^- = \sup\{0, -f\}$ *on integreeruvad Lebesque'i mõttes, siis nimetatakse* f *integreeruvaks ja defineeritakse* $\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f^+(x)dx - \int_{[a,b]} f^-(x)dx$.

Teoreem 2

Iga funktsiooni $f \in L([a,b], \mathfrak{A}, mes)$ *leidub Lebesque'i integraal ja integraali väärtus on* $\int_{[a,b]} f(x)dx = If$.

Teoreem 3

Funktsioonid klassist $C[a,b]$ *on klassis* $L([a,b], \mathfrak{A}, mes)$.

Järeldus 3.1

Pidevad funktsioonid on integreeruvad Lebesque'i mõttes, kusjuures kehtib võrdus $\int_{[a,b]} f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$.

9 Koonduvus mõõdu järgi ja selle vahekord teiste koonduvustega

Definitsioon 1

Olgu funktsioonide jada $(f_n) \subseteq M(T, \mathfrak{A}, \mu)$ *ja* $f \in M(T, \mathfrak{A}, \mu)$*. Funktsioonide jada* (f_n) *koondub mõõdu* μ *järgi funktsiooniks* f *parajasti siis, kui iga* $\delta > 0$ *piirväärtus* $\lim\limits_{n} \mu(\{t \mid |f_n(t) - f(t)| > \delta\}) = 0$*.*

Märkus: *Mõõdu järgi koonduvusest ei pruugi järelduda koonduvus peaaegu kõikjal.*

Teoreem 1 (Lebesque'i teoreem)

Kui mõõtuvate peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide jada (f_n) *koondub peaaegu kõikjal peaegu kõikjal lõplikuks funktsiooniks* f*, siis koondub funktsioonide jada* (f_n) *mõõdu järgi funktsiooniks* f*.*

Märkus: *Selle teoreemi tõestuses on piirfunktsiooni* f *lõplikus vajalik. Alternatiivselt võib absoluutväärtuse asemel tuua sisse mõne* $\mathbb{R} \bigcup \{-\infty, \infty\}$ *defineeritud kauguse.*

Järeldus 1.1

Ühtlasest koonduvusest järeldub mõõdu järgi koonduvus.

Teoreem 2

Keskmisest koonduvusest järeldub mõõdu järgi koonduvus.

Teoreem 3 (Riesz'i teoreem)

Kui mõõtuvate peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide jada (f_n) *koondub mõõdu järgi peaaegu kõikjal lõplikuks funktsiooniks* f*, siis leidub osajada* (f_{n_k})*, mis koondub peaaegu kõikjal funktsiooniks* f*.*

Teoreem 4 (Jegorovi teoreem)

Kui mõõtuvate funktsioonide jada (f_n) *koondub peaaegu kõikjal funktsiooniks* f*, siis iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub mõõtuv hulk* A_ε *nii, et* $\mu(A_\varepsilon) > \mu(T) - \varepsilon$ *ja hulgal* A_ε *koondub funktsioonide jada* (f_n) *ühtlaselt funktsiooniks* f*.*

Järeldus 4.1

Kui mõõtuvate funktsioonide jada (f_n) *koondub peaaegu kõikjal funktsiooniks* f*, siis iga mõõtuva hulga* A *ning iga* $\varepsilon > 0$ *leidub mõõtuv hulk* $A_\varepsilon \subseteq A$ *nii, et* $\mu(A_\varepsilon) > \mu(A) - \varepsilon$ *ja hulgal* A_ε *koondub funktsioonide jada* (f_n) *ühtlaselt funktsiooniks* f*.*

Tõestus

Jegorovi teoreemist on selge, et iga $\varepsilon > 0$ leidub hulk B_ε nii, et $\mu(B_\varepsilon) > \mu(T) - \varepsilon$ ja funktsioonide jada (f_n) koondub ühtlaselt funktsiooniks f hulgal B_ε. Nüüd on lihtne veenduda, et hulgal $A_\varepsilon = A \bigcap B_\varepsilon$ toimub samuti ühtlane koondumine ja teisalt $\mu(A_\varepsilon) \geq \mu(A) - \mu(T \setminus B_\varepsilon) > \mu(A) - \varepsilon$.

□

Järeldus 4.2

Kui mõõtuvate funktsioonide jada (f_n) koondub mõõtuval hulgal A funktsiooniks f, siis iga $\varepsilon > 0$ leidub mõõtuv hulk $A_\varepsilon \subseteq A$ nii, et $\mu(A_\varepsilon) > \mu(A) - \varepsilon$ ja hulgal A_ε koondub funktsioonide jada (f_n) ühtlaselt funktsiooniks f.

Tõestus

Defineerin funktsioonid

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}.$$

Veendun, et funktsioonid g_n ja g on mõõtuvad. Et f on mõõtuv, siis leiduvad lihtsad funktsioonid $(h_n) \subseteq H(T, \mathfrak{A}, \mu)$ nii, et peaaegu kõikjal $h_n(t)$ koondub $f(t)$. Defineerides nüüd lihtsad funktsioonid

$$l_n(t) = \begin{cases} h_n(t), & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$$

on selge, et peaaegu kõikjal funktsioonid l_n koonduvad g. Analoogsel on võimalik näidata, et funktsioonid g_n on mõõtuvad. Nüüd konstruktsiooni tõttu funktsioonide jada (g_n) koondub kõikjal funktsiooniks g. Eelmist järeldust ära kasutades leidub iga $\varepsilon > 0$ korral mõõtuv hulk $A_\varepsilon \subseteq A$ nii, et $\mu(A_\varepsilon) > \mu(A) - \varepsilon$ ja funktsioonide jada (g_n) koondub ühtlaselt funktsiooniks g hulgal A_ε. Arvestades, et hulgal A_ε kehtivad võrdused $f(t) = g(t)$ ja $f_n(t) = g_n(t)$, ongi järeldus tõestatud.

□

10 Lõigus $[a,b]$ mõõtuvate ja pidevate funktsioonide vahekord

Lemma 1
Iga lahtine hulk $G \subseteq \mathbb{R}$ on avaldatav kujul

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n).$$

Lemma 2
Iga kinnine tõkestatud hulk $F \subseteq \mathbb{R}$ on avaldatav kujul

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n].$$

Lemma 3
Iga reaalarvude hulk $A \subseteq \mathbb{R}$ on esitatav kujul

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n, \beta_n\}.$$

Lemma 4
Olgu funktsioon $f \in M([a,b], \mathfrak{A}, mes)$, siis iga $\varepsilon > 0$ leidub mõõtuv hulk A_ε nii, et $mes(A_\varepsilon) > mes([a,b]) - \varepsilon$ ja leidub lõigul $[a,b]$ pidevate funktsioonide jada g_n, mis hulgal A_ε koondub funktsiooniks f.

Tõestus
Et funktsioon on klassist $f \in M([a,b], \mathfrak{A}, mes)$, siis peab ta olema ka klassist $M([a,b], \mathfrak{A}_0, mes_0)$. Seega leiduvad funktsioonid $h_n \in H([a,b], \mathfrak{A}_0, mes_0)$ nii, et kõikjal väljaarvatud hüljataval hulgal B toimub koondumine $h_n \to f$. Nüüd hakkan funktsioone h_n lähendama pidevate funktsioonidega.

On ilmne, et iga hulga $[\alpha,\beta], (\alpha,\beta], [\alpha,\beta)$ või (α,β) korral saab pidevate funktsioonidega

$$c_k(t) = \begin{cases} 1 & t \in [\alpha + \frac{1}{n}, \beta - \frac{1}{n}] \\ 0 & t \notin (\alpha,\beta) \\ (t-\alpha)n & t \in (\alpha, \alpha + \frac{1}{n}) \\ (\beta - t)n & t \in (\beta - \frac{1}{n}, \beta) \end{cases}$$

lähendada funktsiooni $\chi_{\{\alpha,\beta\}}$. Kusjuures lõigates välja punktide α ja β kuitahes väikesed ümbrused koondub saadud hulgal funktsioonide jada (c_k) ühtlaselt funktsiooniks $\chi_{\{\alpha,\beta\}}$. Seega arvestades, et funktsioon $h \in H([a,b], \mathfrak{A}_0, mes_0)$ koosneb lõlikust arvust analoogsete funktsioonide lineaarkombinatsioonidest, siis iga $\varepsilon > 0$ leidub mõõtuv hulk C_ε nii, et $mes(C_\varepsilon) > mes([a,b]) - \varepsilon$ ja leidub funktsioonide jada $(c_k) \subseteq C[a,b]$, mis koonduvad ühtlaselt funktsiooniks h hulgal C_ε.

Olgu nüüd meil suvaline $\varepsilon > 0$, siis eelneva põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ leidub mõõtuv hulk D_n ja funktsioonide jada $(d_k^n)_{k=1}^\infty \subseteq C[a,b]$ nii, et $mes(D_n) > mes([a,b]) - \frac{\varepsilon}{2^n}$ ja hulgal D_n koondub funktsioonide jada (d_k^n) ühtlaselt funktsiooniks h_n. Nüüd on lihtne veenduda, et hulgal $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ toimub ühtlane koondumine iga $n \in \mathbb{N}$. Nüüd tänu ühtlasele koondumisele saab valida pidevad funktsioonid $g_n = d_{k_n}^n$ nii, et iga $t \in D$ $|g_n(t) - h_n(t)| < \frac{1}{n}$. Et hulga mõõt

$$mes(D) = mes([a,b]) - mes([a,b] \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n) = mes([a,b]) - mes(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a,b] \setminus D_n)$$

$$> mes([a,b]) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = mes([a,b]) - \varepsilon.$$

Et punktide hulga B, kus ei toimu koondumist $h_n \to f$ mõõt on null, siis hulga $A_\varepsilon = D \setminus B$ mõõt rahuldab võrratust $mes(A_\varepsilon) > mes([a,b]) - \varepsilon$ ja iga $t \in A_\varepsilon$ korral

$$|f(t) - g_n(t)| \leq |f(t) - h_n(t)| + |g_n(t) - h_n(t)| < \frac{1}{n} + |f(t) - h_n(t)| = o(1),$$

siis funktsioonide jada (g_n) koondub hulgal A_ε funktsiooniks f.
□

Lemma 5

Kui hulk $A \subseteq [a,b]$ on mõõtuv, siis iga $\varepsilon > 0$ leidub lahtine hulk $G_\varepsilon \subseteq A$ nii, et $mes(G_\varepsilon) > mes(A) - \varepsilon$.

Märkus: *Seega iga mõõtuva hulga A mõõt avaldub lahtiste(kinniste) hulkade G kaudu järgmiselt*

$$mes(A) = \sup_{G \subseteq A} mes(G).$$

Tõestus

Lemma 3 järgi saab esitada hulga A kujul

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n, \beta_n\},$$

kus hulgad $\{\alpha_n, \beta_n\}$ on omavahel paarikaupa lõikumatud. Olgu $\varepsilon > 0$, siis iga intervalli $\{\alpha_n, \beta_n\}$, mille mõõt $\mu(\{\alpha_n, \beta_n\}) > \frac{\varepsilon}{2^n}$, sisse saab panna lõigu $[\gamma_n, \delta_n] = [\alpha_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \beta_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}]$. Vastasel juhul jätan lõigu lihtsalt ära. Saadud kinnise hulga $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{n \in I} [\gamma_n, \delta_n]$ mõõt on konstruktsiooni tõttu mitte väiksem kui $mes(A) - \varepsilon$.
□

Teoreem 1 (Luzini teoreem)

Funktsioon $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ on mõõtuv parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ leidub mõõtuv hulk A_ε nii, et $mes(A_\varepsilon) > mes([a,b]) - \varepsilon$ ja funktsioon f on hulgal A_ε pidev.

Tõestus
Tarvilikus

Et funktsioon f on mõõtuv, siis vastavalt lemmale 4 leidub iga $\varepsilon > 0$ korral mõõtuv hulk B_ε nii, et $mes(B_\varepsilon) > mes([a,b]) - \varepsilon$ ja leidub pidevate funktsioonide jada $(g_n) \subseteq C[a,b]$, mis koonduvad hulgal B_ε funktsiooniks f. Nüüd kasutades lõigus 9 saadud järeldust 4.2 saab leida mõõtuva hulga A_ε nii, et $mes(A_\varepsilon) > mes(B_\varepsilon) - \varepsilon > mes([a,b]) - 2\varepsilon$ ning funktsioonide jada (g_n) koondub ühtlaselt funktsiooniks f. Et ühtlane koonduvus pärandab pidevuse, siis f on pidev hulgal A_ε.
Piisavus

Kasutades eeldust ja lemmat 5 võib üldsust kitsendamata eeldada, et iga $\varepsilon > 0$ on f pidev kinnisel hulgal. Vastaku väärtustele $\varepsilon = \frac{1}{n}$ hulgad T_n. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $T_n \subseteq T_{n+1}$, sest kui f on pidev kinnistel hulkadel A ja B, siis f on pidev ka kinnisel hulgal $A \bigcup B$. Defineerin nüüd funktsioonid

$$g_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \in T_n \\ 0, & t \notin T_n \end{cases},$$

mis on tänu f ühtlasele pidevusele hulgal T_n mõõtuvad. On selge, et kui $t \in T_{n_0}$, siis $n > n_0$ $t \in T_n$. Siit $g_n(t) = f(t)$ ja seega $g_n(t) \to f(t)$. Seega kui $t \in T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$, siis $g_n(t) \to f(t)$. Arvestades nüüd mõõdu pidevust toimub koondumine peaaegu kõikjal, sest

$$mes(T) = mes(\lim_n T_n) = \lim_n mes(T_n)$$

ja konstruktsiooni järgi on viimane piirväärtus $mes([a,b])$. Nüüd on täidetud lõigus 5 toodud teoreemi 2 eeldused ja seega on f mõõtuv.
$\square$

Lemma 1

Kui funktsioon f on igas lõigu $[\alpha,\beta]$ punktis mittepidev, siis leidub alamlõik $[\phi,\varphi] \subseteq [\alpha,\beta]$ ja $\varepsilon_0 > 0$ nii, et iga $t \in [\phi,\varphi]$ ning iga $\delta > 0$ korral leidub $t_\delta : |t - t_\delta| < \delta$ ja $|f(t) - f(t_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

Märkus: *Seda lemmat läheb vaja järgmise teoreemi tõestamiseks.*

Tõestus

Oletan vastuväiteliselt, et iga $\varepsilon_0 > 0$ ja iga alamlõigu $[\phi,\varphi]$ korral leidub $t \in [\phi,\varphi]$ ja $\delta > 0$ nii, et kui $|t - t_\delta| < \delta$ siis $|f(t) - f(t_\delta)| < \varepsilon$. Tähistan $d_1 = \beta - \alpha$. Konstrueerime siis üksteisesse sisestatud lõikude jada $[\alpha_n, \beta_n]$ nii, et lõigupikkus oleks hääbuv suurus. Selleks võtan $[\alpha_1,\beta_1] = [\alpha,\beta]$. Nüüd kasutades eeldust peab lõigu $[\alpha_1,\beta_1]$ alamlõigus $[\alpha_1 + \frac{d_1}{4}, \beta_1 - \frac{d}{4}]$ leiduma punkt t_2, mille korral leidub $\delta_2 > 0$ nii, et kui $|t_2 - t| < \delta_2$, siis $|f(t) - f(t_2)| < \frac{1}{2}$. Nüüd valin punktid $\alpha_2, \beta_2 \in [\alpha_1 + \frac{d_1}{8}, \beta_1 - \frac{d}{8}]$ nii, et $t_2 - \alpha_2 < \delta_2$, $\beta_2 - t_2 < \delta_2$ ja tähistan $d_2 =$

$\beta_2-\alpha_2$. Konstruktsiooni tõttu iga $t \in [\alpha_2, \beta_2]$ korral $|f(t) - f(t_2)| < \frac{1}{2}$. Analoogselt konstrueerin lõigu $[\alpha_3, \beta_3]$, kus leidub punkt t_3 nii, et iga $t \in [\alpha_3, \beta_3]$ korral $|f(t) - f(t_3)| < \frac{1}{3}$ jne. Konstruktsiooni tõttu asuvad lõigud üksteise sees ja lõigupikkuste jada on hääbuv. Seega leidub $t_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$. Näitan, et selles punktis on funktsioon f pidev. Olgu $\varepsilon > 0$, siis $\varepsilon > \frac{2}{n}$. Nüüd $t_0 \in [\alpha_n, \beta_n]$, kusjuures konstruktsiooni tõttu pole t lõigu otspunkt sest $\alpha_n < \alpha_{n+1} \leq t_0 \leq \beta_{n+1} < \beta_n$. Seega leidub punkti t_0 ümbrus $B(t_0, \delta) \subset [\alpha_n, \beta_n]$. Seega kui $|t_0 - t| < \delta$, siis $|f(t_0) - f(t)| \leq |f(t_0) - f(t_n)| + |f(t_n) - f(t)| < \frac{2}{n} < \varepsilon$. Seega on vastuolu saadud ja lemma tõestatud.

Teoreem 2

Kui funktsioon f on integreeruv lõigul $[a, b]$ Riemanni mõttes, siis tema katkevuspunktide hulk K on nullmõõduga hulk.

Järeldus 2.1

Kui funktsioon f on integreeruv lõigul $[a, b]$ Riemanni mõttes, siis tema katkevuspunktide hulk on ülimalt loenduv.

Teoreem 3

Kui funktsioonil f on lõigus $[a, b]$ katkevuspunktide hulk K nullmõõduga, siis funktsioon on mõõtuv lõigul $[a, b]$.

11 Riemann-Stiljesi ja Lebesque-Stiltjesi integraalid

Definitsioon 1
Funktsiooni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on tõkestatud muuduga funktsioon parajasti siis, kui iga lõigu* $[a, b]$ *alajaotuse* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ *järgmised summad on tõkestatud*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

ja täismuuduks nimetatakse suurust

$$\mathrm{V}_a^b f = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \right\}.$$

Tõkestatud muuduga funktsioonide omadused:

1. tõkestatud muuduga funktsioonide ruum on vektoruum üle $\mathbb{R}$, kusjuures iga $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral $\mathrm{V}_a^b(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{V}_a^b f + \beta \mathrm{V}_a^b g$;
2. kahe tõkestatud muuduga funktsiooni korrutis on tõkestatud;
3. kui $|g(t)| \geq \alpha$, siis funktsioon $\frac{1}{g}$ on ka tõkestatud muuduga funktsioon;
4. iga tõkestatud muuduga funktsioon f on esitatav kahe monotoonselt kasvava funktsiooni vahena.

Definitsioon 2
Olgu funktsioon g *lõigus* $[a, b]$ *tõkestatud muuduga funktsioon ja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *suvaline funktsioon. Riemann-Stiltjesi summadeks nimetatakse lõigu* $[a, b]$ *alajaotuse* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ *abil defineeritud summasid*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\left[g(t_k) - g(t_{k-1})\right], \text{ kus } \tau_k \in [t_{k-1}, t_k].$$

Kui leiab aset koondumine $\sigma \xrightarrow[\max_k \Delta t_k \to 0^+]{\mathbb{R}} a \in \mathbb{R}$, *siis öeldakse, et funktsioon on integreeruv lõigus* $[a, b]$ *mõõdu* dg *järgi Riemanni mõttes ja tähistatakse*

$$\int_a^b f(t) dg(t) = a.$$

Definitsioon 3
Olgu funktsioon g *lõigus* $[a, b]$ *tõkestatud muuduga funktsioon, mis esitub kahe monotoonselt kasvava funktsiooni* g_1 *ja* g_2 *vahena. Öeldakse, et funktsioon* f *on integreeruv lõigus* $[a, b]$ *mõõdu* dg *järgi Lebesque'i mõttes kui* f *kuulub*

klassidesse $L([a,b],\mathfrak{A},\mu_1)$ *ja* $L([a,b],\mathfrak{A},\mu_2)$, *kus mõõdud* μ_1 *ja* μ_2 *on saadud mõõtude* $\mu_1^0(\{\alpha,\beta\}) = g_1(\beta) - g_1(\alpha)$ *ja* $\mu_2^0(\{\alpha,\beta\}) = g_2(\beta) - g_2(\alpha)$ *jätkamisel sigma-aditiivseteks mõõtudeks. Integraali* $\int_{[a,b]} f(t)dg(t)$ *all mõeldakse suurust*

$$\int_{[a,b]} f(t)dg(t) = Ifd\mu_1 - Ifd\mu_2.$$

Teoreem 1

Kui funktsioon g *on lõigus* $[a,b]$ *pidevalt diferentseeruv, siis* $\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt$