Graaf. Determinant. Arendid

"Kuule, Puhh, ütle, kust sa selle teiba said?"
"Lihtsalt leidsin."

Definitsioon 1

Elementaargraaf on lihtgraaf, mille iga tipu valents on üks või kaks. Graafi Γ kattev elementaargraaf Λ sisaldab kõiki graafi Γ tippe.

Teoreem 1 (Harary 1962)

Graafi naabrusmaatriksi $\mathbf{A}$ determinant avaldub kujul

$$\det \mathbf{A} = \sum (-1)^{r(\Lambda)} 2^{s(\Lambda)},$$

kus summeeritakse üle kõigi graafi katvate elementaargraafide Λ.

Karakteerne polünoom $\chi(\Gamma; \lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^{n-i}$.

Teoreem 2 (Teine arendis)

Graafi Γ karakteerse polünoomi kordajad avalduvad kujul

$$(-1)^i c_i = \sum (-1)^{r(\Lambda)} 2^{s(\Lambda)},$$

kus summeeritakse üle kõigi graafi Γ i tipuliste elementaarrgraafide.

Graaf. Laplace'i maatriks. Arendised

Definitsioon 2

Laplace'i maatiks tekib $\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T$*, kuid lihtsam on vaadata* $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varrho} - \mathbf{A}$*. Laplace'i polünoom saadakse* $\sigma(\Gamma; \mu) = \det(\mu\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \sum\limits_{i=0}^{n} q_i \mu^{n-i}$.

Lemma 1

Olgu $x \subseteq V(\Gamma)$*,* $Y E(\Gamma)$ *ning* $|X| = |Y|$*. Tähistame* V_0 *tippude hulka servade* Y *poolt indutseeritud graafis* $\langle Y \rangle$*. Maatriksi* $D(X, Y)$ *pööratavus on ekvivalentne kolme tingimusega:*

1) $X \subseteq V_0$*;*
2) $\langle Y \rangle$ *on mets;*
3) $V_0 \setminus X$ *sisaldab igast sidususkomponendist täpselt ühte tippu.*

Teoreem 3

Laplace'i polünoomi kordajad q_i *avalduvad kujul*

$$(-1)^i q_i = \sum p(\Phi),$$

kus summerimine toimub üle kõikide graafi Γ *i servaliste alammetsade* Φ*.*

Graaf. Aluspuude arv. Taylori arendis

Teoreem 4 (Binet-Cauchy teoreem)

Olgu $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ $m \times n$ *maatriksid, siis maatriksi* $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T$ *determinant avaldub kujul*

$$\det(\mathbf{C}) = \sum_{|U|=m} \det(\mathbf{A}_U) \det(\mathbf{B}_U).$$

Järeldus 5.1

Graafi Γ *aluspuude arv avaldub kujul*

$$\kappa(\Gamma) = n^{n-2} \sum p(\Phi)(-n)^{-|E(\Phi)|},$$

kus summerimine toimub üle täiendgraafi alammetsade Φ.

Teoreem 5 (Taylori arendis)

k*-regulaarse graafi* Γ *karakteerse polünoomi* χ *tuletised avalduvad kohal* k

$$\chi^{(i)}(\Gamma; k) = i! \sum p(\Phi),$$

kus summerimine toimub üle $n - i$ *servaliste alammetsade* Φ.