

Lambda-arvutus

- λ -termide süntaks

$$\begin{array}{lcl}
 E & ::= & V \\
 & | & (E_1 E_2) \\
 & | & (\lambda V. E)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{muutuja} \\
 \text{aplikatsioon} \\
 \text{abstraktsioon}
 \end{array}$$

- Näiteid λ -termidest

$$\begin{array}{ll}
 (\lambda x. x) & (((\lambda x. (\lambda f. (f x))) y)(\lambda z. z)) \\
 (\lambda x. y) & (\lambda x. ((\text{add } x) \underline{1}))
 \end{array}$$

- Sulgudest hoidumine

$$\begin{array}{lll}
 E_1 E_2 \dots E_n & \equiv & (((\dots (E_1 E_2) \dots) E_n) \\
 \lambda V. E_1 E_2 \dots E_n & \equiv & (\lambda V. (E_1 E_2 \dots E_n)) \\
 \lambda V_1 V_2 \dots V_n. E & \equiv & (\lambda V_1. (\lambda V_2. (\dots (\lambda V_n. E) \dots)))
 \end{array}$$

Lambda-arvutus

- Vabad ja seotud muutujad

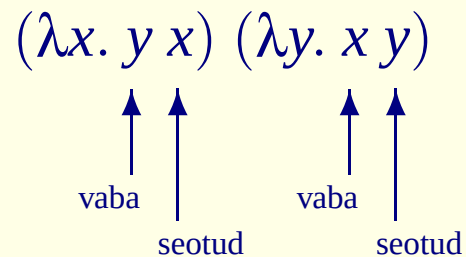
Muutuja x on vaba λ -termis E (so. $x \in \text{FV}(E)$), kui ta ei asu sümboli λx mõjupiirkonnas. Vastasel korral on x seotud.

$$\text{FV}(x) = \{x\}$$

$$\text{FV}(E_1 E_2) = \text{FV}(E_1) \cup \text{FV}(E_2)$$

$$\text{FV}(\lambda x. E) = \text{FV}(E) - \{x\}$$

- Näide:



- λ -termi E nimetatakse kinniseks kui $\text{FV}(E) = \emptyset$

Teooria λ

- Aksioomid

$$M = M \qquad (\lambda x. M) N = M[N/x] \quad (\beta)$$

- Tuletusreeglid

$$\frac{M = N}{N = M}$$

$$\frac{M = N}{MZ = NZ}$$

$$\frac{M = N \quad N = L}{M = L}$$

$$\frac{M = N}{ZM = ZN}$$

$$\frac{M = N}{\lambda x. M = \lambda x. N} \quad (\xi)$$

- Relatsioonid = nimetatakse konversiooniks.

β - konversioon

- Vastab funktsiooni väljakutse väärtustamisele!
- Näited:

$$\begin{aligned}(\lambda x. f\ x)\ E &= f\ E \\(\lambda x\ y. \text{add}\ x\ y)\ \underline{3} &= \lambda y. \text{add}\ \underline{3}\ y \\(\lambda y. \text{add}\ \underline{3}\ y)\ \underline{4} &= \text{add}\ \underline{3}\ \underline{4}\end{aligned}$$

- Antinäide:

$$(\lambda x\ y. \text{add}\ x\ y)(\text{square}\ y) = \lambda y. \text{add}\ (\text{square}\ y)\ y$$

Teooria λ

- Püsipunktiteoreem:

$$\forall F \in \Lambda, \exists X \in \Lambda . FX = X$$

- Tõestus: Olgu $W \equiv \lambda x. F(xx)$ ja $X \equiv WW$. Siis

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x. F(xx)) W = F(WW) \equiv FX$$

- Näited:

term

$\lambda xy. xy$

$\lambda x. x$

tema püsipunkt

$(\lambda xy. (xx)y) (\lambda xy. (xx)y)$

$(\lambda x. xx) (\lambda x. xx)$

α -kongruents

- Term M on α -kongruentne termiga N (tähistame $M \equiv_{\alpha} N$), kui M ja N on identsed muutujate ümbernimetamise täpsuseni.

- Näited:

$$\lambda x. x \quad \equiv_{\alpha} \quad \lambda y. y$$

$$\lambda x. f \ x \quad \equiv_{\alpha} \quad \lambda z. f \ z$$

$$\lambda x. (\lambda y. y) \ x \quad \equiv_{\alpha} \quad \lambda y. (\lambda y. y) \ y$$

- Antinäide

$$\lambda x \ y. \text{add } x \ y \quad \equiv_{\alpha} \quad \lambda y \ y. \text{add } y \ y$$

- Konventsioon — kõik seotud muutujad on vabadest muutujatest erinevad.

Substitutsioon

- Muutuja x substitutsiooniks termiga E nimetatakse muutuja x kõigi vabade esinemiste asendamist termiga E selliselt, et kõik termi E vabad muutujad on ka pärast asendamist vabad.
- Substitutsiooni definitsioon:

E	$E[E'/x]$
x	E'
y	y
$E_1 E_2$	$E_1[E'/x] E_2[E'/x]$
$\lambda y. E_1$	$\lambda y. E_1[E'/x]$

Substitutsioon

- Substitutsiooni definitsioon a'la Curch:

E	$E[E'/x]$
x	E'
y	y
$E_1 E_2$	$E_1[E'/x] E_2[E'/x]$
$\lambda x. E_1$	$\lambda x. E_1$
$\lambda y. E_1 \quad (y \notin \text{FV}(E'))$	$\lambda y. E_1[E'/x]$
$\lambda y. E_1 \quad (y \in \text{FV}(E'))$	$\lambda z. E_1[z/y][E'/x]$ z on uus muutuja

Substitutsioon

- De Bruijn'i λ -arvutus
- Muutujad asendatud siduva λ kaugusega.
- Näited:

$$\lambda x. x \quad \longleftrightarrow \quad \lambda 1$$

$$\lambda x y. x y \quad \longleftrightarrow \quad \lambda \lambda 21$$

$$\lambda x y. x y (\lambda y. x y y) \quad \longleftrightarrow \quad \lambda \lambda 21 (\lambda 311)$$

$$\lambda x. x (\lambda y. x y y) \quad \longleftrightarrow \quad \lambda 1 (\lambda 211)$$

Substitutsioon

- Substitutsiooni lemma: Kui x ja y on erinevad muutujad ning $x \notin FV(L)$, siis

$$M[N/x][L/y] \equiv M[L/y][N[L/y]/x]$$

- Substitutsiooni omadusi

$$M = M' \quad \Rightarrow \quad M[N/x] = M'[N/x]$$

$$N = N' \quad \Rightarrow \quad M[N/x] = M[N'/x]$$

- Ilmutatud viidatavus (Leibniz): Olgu $C[\cdot]$ mingi kontekst, siis

$$M = N \quad \Rightarrow \quad C[M] = C[N]$$

Ekstensionaalsus

- Teooria $\lambda + \mathbf{ext}$

$$\frac{Mx = Nx}{M = N} \quad x \notin \text{FV}(MN) \quad (\mathbf{ext})$$

- Teooria $\lambda + \eta$

$$\lambda x. Mx = M \quad x \notin \text{FV}(M) \quad (\eta)$$

- Näited:

$$\lambda x. (\lambda y. y) x = \lambda y. y$$

$$\lambda x. \text{add } x = \text{add}$$

- Antinäide:

$$\lambda x. \text{add } x x = \text{add } x$$

- Lemma: Teooriad $\lambda + \mathbf{ext}$ ja $\lambda + \eta$ on ekvivalentsed.

Reduktsioon

- Reduktsioon on ainult vasakult paremale rakendatav konversioon; paremalt vasakule — ekspansioon.
- Alamtermi, millele saab rakendada reduktsioonireeglit nim. reedeiks.
- Ilma ühtegi reedeksita term on normaalkujul.
- Näide

