Reduktsioon

- Relatsioon $R \subseteq \Lambda^2$ on *kooskõlaline* kui iga termi $M, N \in \Lambda$ ja üheaugulise konteksti $C[\cdot]$ korral:

$$(M,N) \in R \quad \Longrightarrow \quad (C[M], C[N]) \in R$$

- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimatatakse *võrduseks* (kongruentsiks) kui ta kooskõlaline ekvivalentsusrelatsioon.
- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimetatakse *reduktsiooniks* kui ta kooskõlaline, refleksiivne ja transitiivne.

Reduktsioon

- Ühesammuline R-reduktsioon

$$\frac{(M,N) \in R}{M \to_R N} \qquad \frac{M \to_R N}{MZ \to_R NZ}$$

$$\frac{M \to_R N}{\lambda x.\, M \to_R \lambda x.\, N} \qquad \frac{M \to_R N}{ZM \to_R ZN}$$

- R-reduktsioon

$$\frac{M \to_R N}{M \twoheadrightarrow_R N} \qquad M \twoheadrightarrow_R M \qquad \frac{M \twoheadrightarrow_R N \quad N \twoheadrightarrow_R L}{M \twoheadrightarrow_R L}$$

- R-konversioon

$$\frac{M \twoheadrightarrow_R N}{M =_R N} \qquad \frac{N =_R M}{M =_R N} \qquad \frac{M =_R N \quad N =_R L}{M =_R L}$$

Reduktsioon

- *Väide:* Relatsioonid $\to_R$, $\twoheadrightarrow_R$ ja $=_R$ on kooskõlalised.
- *Lemma:*

$$N \twoheadrightarrow_R N' \quad \Longrightarrow \quad M[N/x] \twoheadrightarrow_R M[N'/x]$$

- Ei kehti $\to_R$ korral! Näiteks kui $M \equiv xx$, $N \equiv (\lambda y.y)z$ ja $N' \equiv z$, siis

$$N \to_\beta N', \quad \text{aga} \quad (\lambda y.y)z((\lambda y.y)z) \not\to_\beta zz$$

Reduktsioon

- Termi M nimetatakse *R-reedeksisks* kui $\exists N.(M,N) \in R$. Termi N nimetatakse termi M *R-kontraktumiks*.
- Term M on *R-normaalkujul* kui ta sisalda ühtegi R-reedeksit. Termi N nimetatakse termi M *R-normaalkujuks* kui N on R-normaalkujul ja $M =_R N$.
- *Väide:* $M \to_R N \Longleftrightarrow M \equiv C[P], N \equiv C[Q]$ ja $(P,Q) \in R$.
- *Järeldus:* Olgu M R-normaalkujul, siis $M \twoheadrightarrow_R N \Longrightarrow M \equiv N$.
- NB! Sellest et $\forall N[M \twoheadrightarrow_R N \Rightarrow M \equiv N]$ ei järeldu, et term M oleks R-normaalkujul.

Church-Rosseri teoreem

- Binaarne relatsioon $\rhd$ on *rombi omadusega* ($\rhd \models \Diamond$) kui

$$\forall M, M_1, M_2 [M \rhd M_1 \wedge M \rhd M_2 \Longrightarrow \exists M_3 [M_1 \rhd M_3 \wedge M_2 \rhd M_3]]$$

- Relatsioon R on *Church-Rosser* (CR) kui $\twoheadrightarrow_R \models \Diamond$
- *Church-Rosseri teoreem:*

$$\mathrm{CR}(R) \wedge M =_R N \implies \exists Z [M \twoheadrightarrow_R Z \wedge N \twoheadrightarrow_R Z]$$

- *Järeldused:*
  - kui N on termi M R-normaalkuju, siis $M \twoheadrightarrow_R N$;
  - igal termil saab olla ülimalt üks normaalkuju.

Church-Rosseri teoreem

- $\rhd \models \Diamond \implies \rhd^* \models \Diamond$, kus $\rhd^*$ on $\rhd$ transitiivne sulund
- Hiidreduktsioon (grand reduction)

$$M \twoheadrightarrow_1 M \qquad \frac{M \twoheadrightarrow_1 M' \quad N \twoheadrightarrow_1 N'}{MN \twoheadrightarrow_1 M'N'}$$

$$\frac{M \twoheadrightarrow_1 N}{\lambda x.\, M \twoheadrightarrow_1 \lambda x.\, N} \qquad \frac{M \twoheadrightarrow_1 M' \quad N \twoheadrightarrow_1 N'}{(\lambda x.M)N \twoheadrightarrow_1 M'[N'/x]}$$

- *Lemma:* $\lambda x.M \twoheadrightarrow_1 N \implies N \equiv \lambda x.M'$, kus $M \twoheadrightarrow_1 M'$
- *Lemma:* $\twoheadrightarrow_1 \models \Diamond$
- *Teoreem:* $\twoheadrightarrow_\beta$ on $\twoheadrightarrow_1$ transitiivne sulund

Church-Rosseri teoreem

- Binaarne relatsioon $\rhd$ on *nõrgalt rombi omadusega* kui

$$\forall M, M_1, M_2 [M \rhd M_1 \land M \rhd M_2 \Longrightarrow \exists M_3 [M_1 \rhd^*_= M_3 \land M_2 \rhd^*_= M_3]]$$

  kus $\rhd^*_=$ on relatsiooni $\rhd$ refleksiivne, transitiivne sulund.

- Relatsioon R on *nõrgalt Church-Rosser* (WCR) kui $\to_R$ on nõrgalt rombi omadusega.
- Relatsioon R on *tugevalt normaliseeruv* (SN) kui ühegi termi M korral ei leidu lõpmatut reduktsioonijada.
- *Newmanni lemma:* SN $\land$ WCR $\Rightarrow$ CR