

Reduktsioon

- Relatsioon $R \subseteq \Lambda^2$ on kooskõlaline kui iga termi $M, N \in \Lambda$ ja üheaugulise konteksti $C[\cdot]$ korral:

$$(M, N) \in R \implies (C[M], C[N]) \in R$$

- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimatatakse võrduseks (kongruentsiks) kui ta kooskõlaline ekvivalentsusrelatsioon.
- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimetatakse reduktsiooniks kui ta kooskõlaline, refleksiivne ja transitiivne.

Reduktsioon

- Ühesammuline R -reduktsioon

$$\frac{(M, N) \in R}{M \rightarrow_R N}$$

$$\frac{M \rightarrow_R N}{\lambda x. M \rightarrow_R \lambda x. N}$$

$$\frac{M \rightarrow_R N}{MZ \rightarrow_R NZ}$$

$$\frac{M \rightarrow_R N}{ZM \rightarrow_R ZN}$$

- R -reduktsioon

$$\frac{M \rightarrow_R N}{M \twoheadrightarrow_R N} \quad M \twoheadrightarrow_R M$$

$$\frac{M \twoheadrightarrow_R N \quad N \twoheadrightarrow_R L}{M \twoheadrightarrow_R L}$$

- R -konversioon

$$\frac{M \twoheadrightarrow_R N}{M =_R N} \quad \frac{N =_R M}{M =_R N}$$

$$\frac{M =_R N \quad N =_R L}{M =_R L}$$

Reduktsioon

- Väide: Relatsioonid $\rightarrow_R$, $\twoheadrightarrow_R$ ja $=_R$ on kooskõlalised.
- Lemma:

$$N \twoheadrightarrow_R N' \implies M[N/x] \rightarrow_R M[N'/x]$$

- Ei kehti $\rightarrow_R$ korral! Näiteks kui $M \equiv xx$, $N \equiv (\lambda y.y)z$ ja $N' \equiv z$, siis

$$N \rightarrow_\beta N', \quad \text{aga} \quad (\lambda y.y)z((\lambda y.y)z) \not\rightarrow_\beta zz$$

Reduktsioon

- Termi M nimetatakse R -reedeksiks kui $\exists N. (M, N) \in R$.
Termi N nimetatakse termi M R -kontraktumiks.

- Term M on R -normaalkujul kui ta sisalda ühtegi R -reedeksit.

Termi N nimetatakse termi M R -normaalkujuks kui N on R -normaalkujul ja $M =_R N$.

- Väide: $M \rightarrow_R N \iff M \equiv C[P], N \equiv C[Q] \text{ ja } (P, Q) \in R$.

- Järeldus: Olgu M R -normaalkujul, siis
 $M \twoheadrightarrow_R N \implies M \equiv N$.

- NB! Sellest et $\forall N [M \twoheadrightarrow_R N \implies M \equiv N]$ ei järeldu, et term M oleks R -normaalkujul.

Church-Rosseri teoreem

- Binaarne relatsioon $\triangleright$ on rombi omadusega ($\triangleright \models \diamond$) kui

$$\forall M, M_1, M_2 [M \triangleright M_1 \wedge M \triangleright M_2 \implies \exists M_3 [M_1 \triangleright M_3 \wedge M_2 \triangleright M_3]]$$

- Relatsioon R on Church-Rosser (CR) kui $\rightarrow_R \models \diamond$
- Church-Rosseri teoreem:

$$\text{CR}(R) \wedge M =_R N \implies \exists Z [M \rightarrow_R Z \wedge N \rightarrow_R Z]$$

- Järeldused:
 - kui N on termi M R -normaalkuju, siis $M \rightarrow_R N$;
 - igal termil saab olla ülimalt üks normaalkuju.

Church-Rosseri teoreem

- $\triangleright \models \diamond \implies \triangleright^* \models \diamond$, kus $\triangleright^*$ on $\triangleright$ transitiivne sulund
- Hiidreduktsioon (grand reduction)

$$\begin{array}{c}
 M \twoheadrightarrow_1 M \\
 \hline
 \lambda x. M \twoheadrightarrow_1 \lambda x. N
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 M \twoheadrightarrow_1 M' \quad N \twoheadrightarrow_1 N' \\
 \hline
 MN \twoheadrightarrow_1 M'N'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 M \twoheadrightarrow_1 M' \quad N \twoheadrightarrow_1 N' \\
 \hline
 (\lambda x. M)N \twoheadrightarrow_1 M'[N'/x]
 \end{array}$$

- Lemma: $\lambda x. M \twoheadrightarrow_1 N \implies N \equiv \lambda x. M'$, kus $M \twoheadrightarrow_1 M'$
- Lemma: $\twoheadrightarrow_1 \models \diamond$
- Teoreem: $\twoheadrightarrow_\beta$ on $\twoheadrightarrow_1$ transitiivne sulund

Church-Rosseri teoreem

- Binaarne relatsioon $\triangleright$ on nõrgalt rombi omadusega kui

$$\forall M, M_1, M_2 [M \triangleright M_1 \wedge M \triangleright M_2 \implies \exists M_3 [M_1 \triangleright_{=}^* M_3 \wedge M_2 \triangleright_{=}^* M_3]]$$

kus $\triangleright_{=}^*$ on relatsiooni $\triangleright$ refleksiivne, transitiivne sulund.

- Relatsioon R on nõrgalt Church-Rosser (WCR) kui $\rightarrow_R$ on nõrgalt rombi omadusega.
- Relatsioon R on tugevalt normaliseeruv (SN) kui ühegi termi M korral ei leidu lõpmatut reduktsioonijada.
- Newmanni lemma: $\text{SN} \wedge \text{WCR} \Rightarrow \text{CR}$