

Kombinaatorloogika

- Väide: Olgu $M(\vec{x})$ mingi λ -term mis sisaldab vabu muutujaid $\vec{x}$. Siis leidub term F selline, et $F \vec{x} = M(\vec{x})$.
- Kombinaatortermide süntaks

$$E ::= \mathbf{K} \mid \mathbf{S} \mid (E_1 E_2)$$

- Reduktsioonid

$$\begin{array}{lll} \mathbf{I} x & \rightarrow & x \\ \mathbf{K} x y & \rightarrow & x \\ \mathbf{S} f g x & \rightarrow & f x (g x) \end{array}$$

- Identsuskombinaator on teistest defineeritav: $\mathbf{SKK} = \mathbf{I}$

Teooria *CL*

- Aksioomid

$$P = P$$

$$\mathbf{K} \ P \ Q = P$$

$$\mathbf{S} \ P \ Q \ R = P \ R \ (Q \ R)$$

- Tuletusreeglid

$$\frac{P = Q}{Q = P}$$

$$\frac{P = Q \quad Q = R}{P = R}$$

$$\frac{P = Q}{PR = QR}$$

$$\frac{P = Q}{RP = RQ}$$

Kombinaatorloogika ja λ -arvutus

- $CL \Rightarrow \Lambda$

$$\mathbf{I} \equiv \lambda x. x$$

$$\mathbf{K} \equiv \lambda x y. x$$

$$\mathbf{S} \equiv \lambda f g x. f x (g x)$$

- Abstraktsioon:

$$[x] x \equiv \mathbf{I}$$

$$[x] y \equiv \mathbf{K} y$$

$$[x] c \equiv \mathbf{K} c$$

$$[x] (E_1 E_2) \equiv \mathbf{S} ([x] E_1) ([x] E_2)$$

Kombinaatorloogika ja λ -arvutus

- $\Lambda \Rightarrow CL$

$$\begin{aligned}
 C[[x]] &= x \\
 C[[c]] &= c \\
 C[[E_1 E_2]] &= (C[[E_1]]) (C[[E_2]]) \\
 C[[\lambda x. E]] &= [x] (C[[E]])
 \end{aligned}$$

- Näide:

$$\begin{aligned}
 &C[[\lambda x y. y x]] \\
 &= [x] ([y] (y x)) \\
 &= [x] (\mathbf{S} ([y] y) ([y] x)) \\
 &= [x] (\mathbf{S} \mathbf{I} (\mathbf{K} x)) \\
 &= \mathbf{S} ([x] \mathbf{S} \mathbf{I}) ([x] \mathbf{K} x) \\
 &= \mathbf{S} (\mathbf{S} ([x] \mathbf{S}) ([x] \mathbf{I})) (\mathbf{S} ([x] \mathbf{K}) ([x] x)) \\
 &= \mathbf{S} (\mathbf{S} (\mathbf{K} \mathbf{S}) (\mathbf{K} \mathbf{I})) (\mathbf{S} (\mathbf{K} \mathbf{K}) \mathbf{I})
 \end{aligned}$$

Kombinaatorloogika ja λ -arvutus

- Lemma: $CL \vdash P = Q \implies \lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda$
- Vastupidine ei kehti!! (Näiteks: $SK \neq KI$)
- Curry aksioomid:

$$K = S(S(KS)(S(KK)K))(K(SKK))$$

$$S = S(S(KS)(S(K(S(KS))))(S(K(S(KK)))S)))(K(K(SKK)))$$

$$S(S(KS)(S(KK)(S(KS)K)))(KK) = S(KK)$$

$$S(KS)(S(KK)) = S(KK)(S(S(KS)(S(KK)(SKK)))(K(SKK)))$$

$$S(K(S(KS)))(S(KS)(S(KS)))$$

$$= S(S(KS)(S(KK)(S(KS)(S(K(S(KS)))S))))(KS)$$

Optimiseerimised

- Kombinaatortermi suurus on eksponentsiaalne esialgse termi argumentide arvust!
- Kombinaatorid **B** ja **C**

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K}$$

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{S}(\mathbf{BS}(\mathbf{BKS}))(\mathbf{KK})$$

- Reduktsioonid

$$\mathbf{B} \ f \ g \ x \ \longrightarrow \ f \ (g \ x)$$

$$\mathbf{C} \ f \ g \ x \ \longrightarrow \ f \ x \ g$$

Optimiseerimised

- Optimiseerimisreeglid

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) (\mathbf{K} q) = \mathbf{K} (p q)$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) \mathbf{I} = p$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) q = \mathbf{B} p q$$

$$\mathbf{S} p (\mathbf{K} q) = \mathbf{C} p q$$

- Näide:

$$\begin{aligned} C[(\lambda x y. y x)] &= [x] (\mathbf{S} \mathbf{I} (\mathbf{K} x)) \\ &= [x] (\mathbf{C} \mathbf{I} x) \\ &= \mathbf{S} ([x](\mathbf{C} \mathbf{I}) ([x]x)) \\ &= \mathbf{S} (\mathbf{S} (\mathbf{K} \mathbf{C}) (\mathbf{K} \mathbf{I})) \mathbf{I} \\ &= \mathbf{S} (\mathbf{K} (\mathbf{C} \mathbf{I})) \mathbf{I} \\ &= \mathbf{C} \mathbf{I} \end{aligned}$$

Optimiseerimised

- Optimiseeritud kombinaatortermi suurus on esialgse termi ruut!

$$C[[\lambda x_1. p \ q]] = S \ p_1 \ q_1$$

$$C[[\lambda x_2 x_1. p \ q]] = S \ (B \ S \ p_2) \ q_2$$

$$C[[\lambda x_3 x_2 x_1. p \ q]] = S \ (B \ S \ (B \ (B \ S) \ p_3)) \ q_3$$

$$C[[\lambda x_4 x_3 x_2 x_1. p \ q]] = S \ (B \ S \ (B \ (B \ S) \ (B \ (B \ (B \ S)) \ p_4))) \ q_4$$

- Turneri kombinaatorid

$$S' \ c \ f \ g \ x \ \rightarrow \ c \ (f \ x) \ (g \ x)$$

$$B' \ c \ f \ g \ x \ \rightarrow \ c \ f \ (g \ x)$$

$$C' \ c \ f \ g \ x \ \rightarrow \ c \ (f \ x) \ g$$

$$B^* \ c \ f \ g \ x \ \rightarrow \ c \ (f \ (g \ x))$$

Optimiseerimised

- Optimiseerimisreeglid

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} \ p) (\mathbf{K} \ q) = \mathbf{K} (p \ q)$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} \ p) \mathbf{I} = p$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} \ p) (\mathbf{B} \ q \ r) = \mathbf{B}^{\star} \ p \ q \ r$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} \ p) \ q = \mathbf{B} \ p \ q$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{B} \ p \ q) (\mathbf{K} \ r) = \mathbf{C}' \ p \ q \ r$$

$$\mathbf{S} \ p (\mathbf{K} \ q) = \mathbf{C} \ p \ q$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{B} \ p \ q) \ r = \mathbf{S}' \ p \ q \ r$$