

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus

- Tüübid: olgu U (loenduv) tüübimuutujate hulk; lihtsate tüüpide hulk Π on defineeritud järgneva grammatikaga:

$$\Pi := U \mid (\Pi \rightarrow \Pi)$$

Tüübimuutujaid tähistame $\alpha, \beta, \dots \in U$; tüüpe $\sigma, \tau, \dots \in \Pi$.

- Kontekstid: muutujast ja tüübist koosnevate paaride jada

$$\Gamma = \{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n\}$$

Kontekstide hulka tähistame C ning kontektsi Γ doomenit $\text{dom}(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Curry

- Tüüpimine: relatsioon $\vdash \subseteq C \times \Lambda \times \Pi$

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \quad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

kus $x \notin \Gamma$.

- Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Curry ($\lambda \rightarrow$ à la Curry) on kolmik $(\Lambda, \Pi, \vdash)$.
- Näiteid:

$$\vdash \lambda x. x : \sigma \rightarrow \sigma$$

$$\vdash \lambda xy. x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$$

$$\vdash \lambda xyz. xz(yz) : (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$$

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Curry

- Näide:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \vdash x : \sigma \rightarrow \tau \quad \frac{\Gamma \vdash y : \rho \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash z : \rho}{\Gamma \vdash yz : \sigma} \\
 \hline
 \Gamma \vdash x(yz) : \tau \\
 \hline
 \Gamma_2 \vdash \lambda z. x(yz) : \rho \rightarrow \tau \\
 \hline
 \Gamma_1 \vdash \lambda yz. x(yz) : (\rho \rightarrow \sigma) \rightarrow \rho \rightarrow \tau \\
 \hline
 \vdash \lambda xyz. x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow (\rho \rightarrow \sigma) \rightarrow \rho \rightarrow \tau
 \end{array}$$

kus

$$\begin{array}{lcl}
 \Gamma_1 & = & \{x:\sigma \rightarrow \tau\} \\
 \Gamma_2 & = & \{x:\sigma \rightarrow \tau, y:\rho \rightarrow \sigma\} \\
 \Gamma & = & \{x:\sigma \rightarrow \tau, y:\rho \rightarrow \sigma, z:\rho\}
 \end{array}$$

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Curry

- Moodustamislemma:

$$\Gamma \vdash x : \sigma \quad \Rightarrow \quad x : \sigma \in \Gamma$$

$$\Gamma \vdash MN : \sigma \quad \Rightarrow \quad \exists \tau [\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \wedge \Gamma \vdash N : \tau]$$

$$\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \quad \Rightarrow \quad \exists \tau, \rho [\Gamma, x : \tau \vdash M : \rho \wedge \sigma = \tau \rightarrow \rho]$$

- Subjektreduktsioon: kui $\Gamma \vdash M : \sigma$ ja $M \rightarrow N$, siis $\Gamma \vdash N : \sigma$.
- Teoreem: relatsioon $\rightarrow$ on Church-Rosser.

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Church

- Pseudotermide hulk Λ_{Π} on defineeritud grammatikaga:

$$\Lambda_{\Pi} := V \mid (\lambda V : \Pi. \Lambda_{\Pi}) \mid (\Lambda_{\Pi} \Lambda_{\Pi})$$

- Tüüpimine: relatsioon $\Vdash \subseteq C \times \Lambda_{\Pi} \times \Pi$

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \Vdash x : \tau} \quad \frac{\Gamma, x : \sigma \Vdash M : \tau}{\Gamma \Vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} \quad \frac{\Gamma \Vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \Vdash N : \sigma}{\Gamma \Vdash MN : \tau}$$

- Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Church ($\lambda \rightarrow$ à la Church) on kolmik $(\Lambda_{\Pi}, \Pi, \Vdash)$.

- Näiteid:

$$\Vdash \lambda x : \sigma. x : \sigma \rightarrow \sigma$$

$$\Vdash \lambda x : \sigma. \lambda y : \tau. x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$$

$$\Vdash \lambda x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho. \lambda y : \sigma \rightarrow \tau. \lambda z : \sigma. xz(yz) : (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$$

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Church

- Moodustamislemma:

$$\Gamma \Vdash x : \sigma \quad \Rightarrow \quad x : \sigma \in \Gamma$$

$$\Gamma \Vdash MN : \sigma \quad \Rightarrow \quad \exists \tau [\Gamma \Vdash M : \tau \rightarrow \sigma \wedge \Gamma \Vdash N : \tau]$$

$$\Gamma \Vdash \lambda x:\tau.M : \sigma \quad \Rightarrow \quad \exists \rho [\Gamma, x:\tau \Vdash M : \rho \wedge \sigma = \tau \rightarrow \rho]$$

- Subjektreduktsioon: kui $\Gamma \Vdash M : \sigma$ ja $M \rightarrow N$, siis $\Gamma \Vdash N : \sigma$.
- Teoreem: relatsioon $\rightarrow$ on Church-Rosser.
- Tüüpide unikaalsus:
 - kui $\Gamma \Vdash M : \sigma$ ja $\Gamma \Vdash M : \tau$, siis $\sigma = \tau$;
 - kui $\Gamma \Vdash M : \sigma$ ja $\Gamma \Vdash N : \tau$ ja $M = N$, siis $\sigma = \tau$.

Church vs. Curry

- Tüüpide kustutamise funktsioon $|\cdot| : \Lambda_{\Pi} \rightarrow \Lambda$
$$\begin{aligned} |x| &= x \\ |MN| &= |M| |N| \\ |\lambda x:\sigma.M| &= \lambda x.|M| \end{aligned}$$
- Teoreem: Olgu $M, N \in \Lambda_{\Pi}$
 - kui $M \rightarrow N$, siis $|M| \rightarrow |N|$;
 - kui $\Gamma \vdash M : \sigma$, siis $\Gamma \vdash |M| : \sigma$.
- Teoreem: Olgu $M, N \in \Lambda$
 - kui $M \rightarrow N$, siis iga $M' \in \Lambda_{\Pi}$ mille korral $|M'| = M$ leidub $N' \in \Lambda_{\Pi}$ nii et $|N'| = N$ ja $M' \rightarrow N'$;
 - kui $\Gamma \vdash M:\sigma$, siis leidub $M' \in \Lambda_{\Pi}$ nii et $|M'| = M$ ja $\Gamma \vdash M':\sigma$.

Väljendusvõimsus

- Olgu $N = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$. Funktsioon $f : \mathbf{N}^m \rightarrow \mathbf{N}$ on $\lambda \rightarrow$ -defineeritav kui leidub $F \in \Lambda$ nii et $\vdash F : N \rightarrow \dots \rightarrow N$ ($m + 1$ korda) ja $F \underline{n_1} \dots \underline{n_m} = \underline{f(n_1, \dots, n_m)}$.
- Teoreem: $\lambda \rightarrow$ -defineeritavad funktsioonid on täpselt laiendatud polünoomid
 - (1) projektsioonid: $U_i^m(n_1, \dots, n_m) = n_i$ ($1 \leq i \leq m$);
 - (2) konstantfunktsioonid: $k(n) = k$;
 - (3) märgifunktsioon: $\text{sg}(0) = 0$ ja $\text{sg}(m + 1) = 1$;
 - (4) liitmine:
$$(f + g)(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l) = f(n_1, \dots, n_k) + g(m_1, \dots, m_l);$$
 - (5) korrutamine:
$$(f \cdot g)(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l) = f(n_1, \dots, n_k) \cdot g(m_1, \dots, m_l);$$

Lahenduvus

- Termi M nimetatakse $(\lambda \rightarrow)$ tüübitavaks parajasti siis, kui leiduvad Γ ja τ mille korral $\Gamma \vdash M : \tau$.
- $\lambda \rightarrow$ tüübitavate termide klass on lahenduv (so. leidub algoritm, mis tuvastab kas antud term on tüübitav).
- Nõrgalt normaliseeruvuse teoreem: Iga $\lambda \rightarrow$ tüübitav term omab nii β - kui ka $\beta\eta$ -normaalkuju.
- Tugevalt normaliseeruvuse teoreem: Iga $\lambda \rightarrow$ tüübitavast termist lähtuv β - ($\beta\eta$ -) reduktsioonijada on lõplik.
- Teoreem: $\lambda \rightarrow$ tüübitavate termide β - ($\beta\eta$ -) võrduse kontrollimiseks leidub otsustusprotseduur (so. algoritm, mis saades 2 tüübitud termi P ja Q , tuvastab kas $P = Q$).